

04线面垂直与面面垂直

一、线面垂直

1. 线面垂直的概念

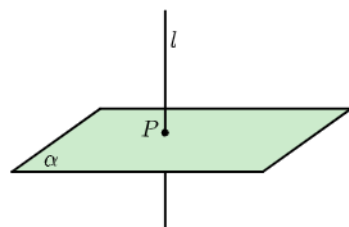
定义&画法

(1)定义：如果直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们就说**直线 l 与平面 α 垂直**，记作 $l \perp \alpha$ 。

直线 l 叫做平面 α 的**垂线**，平面 α 叫做直线 l 的**垂面**。

直线与平面垂直时，它们唯一的公共点 P 叫做**垂足**。

(2)画法：画直线与平面垂直时，通常把直线画成与表示平面的平行四边形的一边垂直，如图所示。



理解线面垂直

①注意定义中的“任何一条直线”，它与“所有直线”是同义语，但与“无数条直线”不同，定义的实质就是直线和平面内的所有直线都垂直。

②直线与平面垂直是直线和平面相交的一种特殊形式。

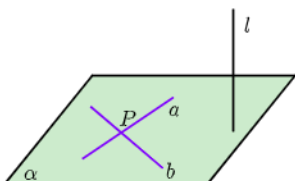
③有了这样的定义，就可判定线线垂直，即当直线和平面垂直时，该直线就垂直于这个平面内的任何一条直线，可以作为线线垂直的判定依据。

两个重要结论

①过一点有且只有一条直线和已知平面垂直。

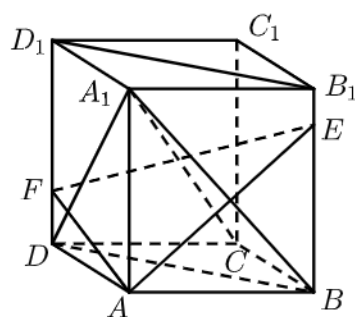
②过一点有且只有一个平面和已知直线垂直。

2. 线面垂直判定定理

	文字语言	图形语言	符号语言
线面垂直判定定理	一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直, 则该直线与此平面垂直		$\left. \begin{array}{l} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \cap b = P \\ l \perp a \\ l \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow l \perp \alpha$

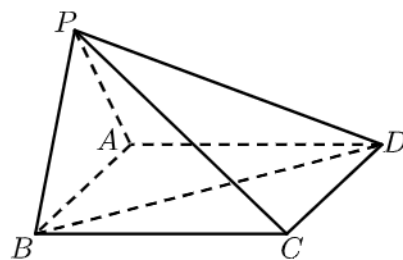
3. 例题精讲

- 1 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别在 BB_1, DD_1 上, 且 $AE \perp A_1B, AF \perp A_1D$.



求证: $A_1C \perp$ 平面 AEF .

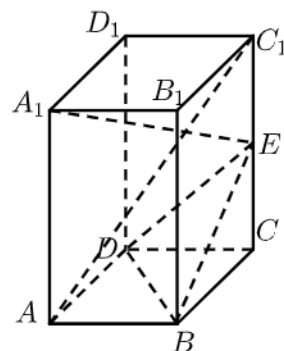
- 2 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, 已知 $AB = 3, AD = 2, PA = 2, PD = 2\sqrt{2}$, $\angle PAB = 60^\circ$.



求证: $AD \perp$ 平面 PAB .

4. 课堂巩固

- 3 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2AB = 2$, E 为 CC_1 的中点.



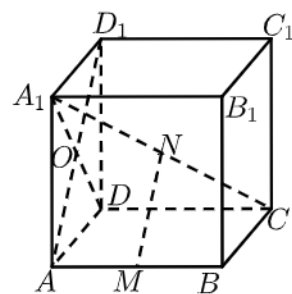
求证： $A_1E \perp$ 平面 BDE 。

5. 线面垂直性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
线面垂直 性质定理	垂直于同一个平面的两条直线平行		$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a // b$

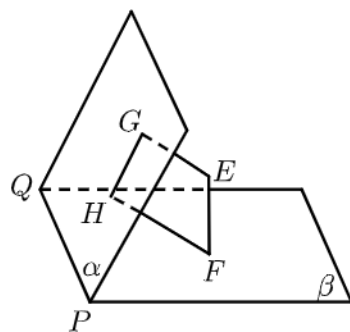
6. 例题精讲

- 4 如图所示，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， M 是 AB 上一点， N 是 A_1C 的中点， $MN \perp$ 平面 A_1DC 。求证：



- (1) $MN // AD_1$ 。
- (2) M 是 AB 的中点。

- 5 如图，设平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = PQ$ ， $EG \perp$ 平面 α ， $FH \perp$ 平面 α ，垂足分别为 G ， H ，为使 $PQ \perp GH$ ，则需增加的一个条件是（ ）。



A. $EF \perp$ 平面 α

B. $EF \perp$ 平面 β

C. $PQ \perp GE$

D. $PQ \perp FH$

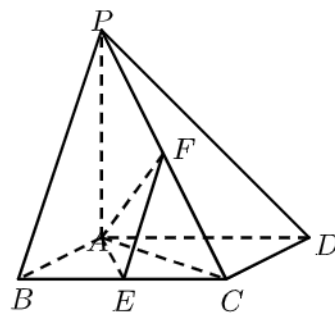
7. 线线垂直

如果一条直线垂直于一个平面，那么该直线垂直于平面内的所有直线

(非常重要，经常考，常用在证明线面垂直、面面垂直的过程中)

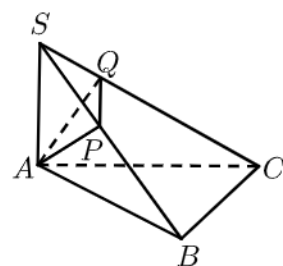
8. 例题精讲

- 6 如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为菱形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， E ， F 分别是 BC ， PC 的中点。

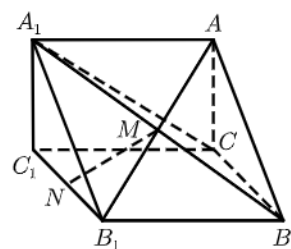


证明： $AE \perp PD$ 。

- 7 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle ABC = 90^\circ$ ， $SA \perp \triangle ABC$ 所在平面，又点 A 在 SB 和 SC 上的射影分别是 P 、 Q ，求证： $PQ \perp SC$ 。



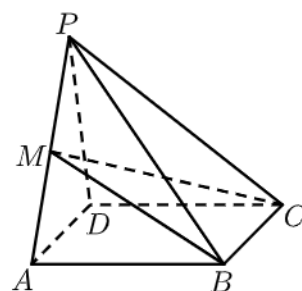
- 8 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AC \perp BC$ ，且 $AC = BC = CC_1 = 2$ ， M 是 AB_1 ， A_1B 的交点， N 是 B_1C_1 的中点。



求证： $MN \perp$ 平面 A_1BC 。

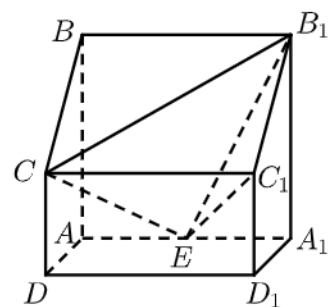
9. 课堂巩固

- 9 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形， M 是 PA 的中点， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $PD = CD = 4$ ， $AD = 2$ 。



求证： $PA \perp CD$ 。

- 10 如图，在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，侧棱 $A_1A \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB \perp AD$ ， $AD = CD = 1$ ， $A_1A = AB = 2$ ， E 为棱 A_1A 的中点。



证明： $B_1C_1 \perp CE$.

二、面面垂直

1. 面面垂直的概念

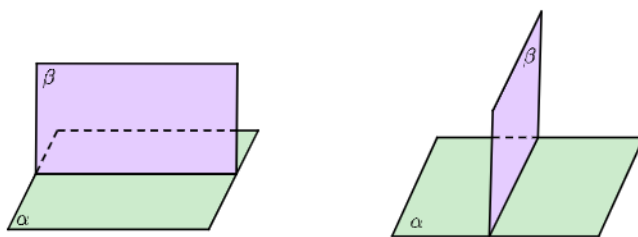
定义&画法

(1)定义

两个平面相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直.

(2)画法及表示

在画两个垂直的平面时，通常把表示直立平面的平行四边形的竖边画成和表示水平平面的平行四边形的横边垂直，如图，平面 α 与平面 β 垂直，记作 $\alpha \perp \beta$.

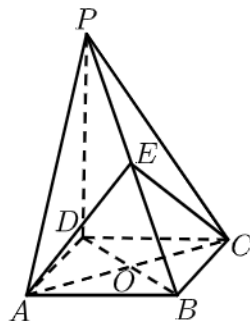


2. 面面垂直判定定理

	文字语言	图形语言	符号语言
面面垂直判定定理	一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直		$\left. \begin{array}{l} l \subset \beta \\ l \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \perp \alpha$

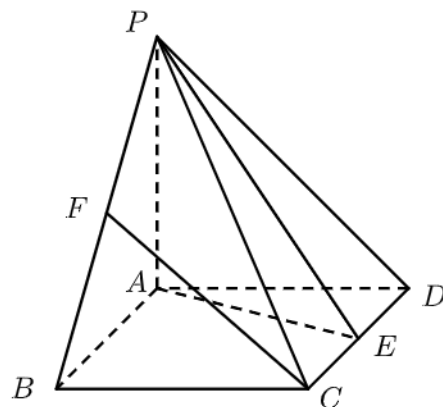
3. 例题精讲

- 11 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为2的菱形， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ，点 E 在棱 PB 上。



求证：平面 $AEC \perp$ 平面 PDB 。

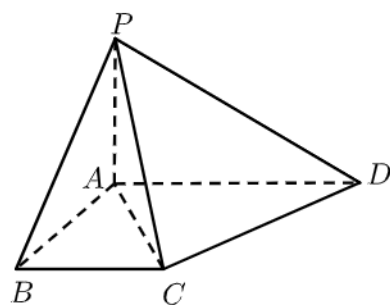
- 12 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle ABC = 60^\circ$ ， E 为 CD 的中点， F 为 PB 的中点。



求证：平面 $PAB \perp$ 平面 PAE 。

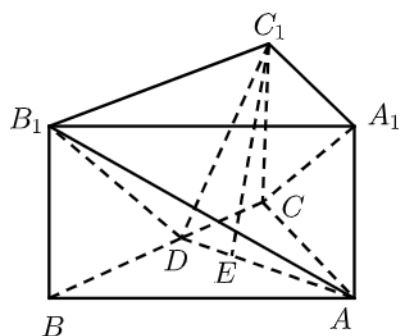
4. 课堂巩固

- 13 在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是直角梯形， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ，且 $AB = BC = 1$ ， $AD = 2$ ，点 E 是线段 PD 的中点。



求证：平面 $PAC \perp$ 平面 PCD 。

- 14 如图，直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，底面边长 $AB = 5$ ， $BC = 4$ ， $AC = 3$ ，侧棱长为 $2\sqrt{3}$ ， D 为 BC 中点， $CE \perp AD$ ， E 为垂足。



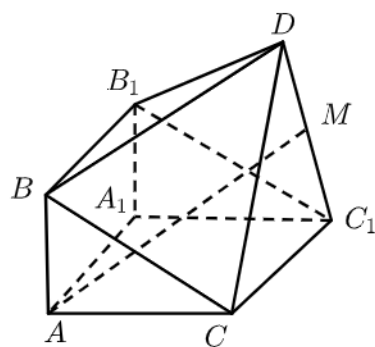
求证：平面 $AB_1D \perp$ 平面 CC_1E 。

5. 面面垂直性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
面面垂直性质定理	两个平面垂直，则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直		$\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = l \\ a \subset \beta \\ a \perp l \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp \alpha$

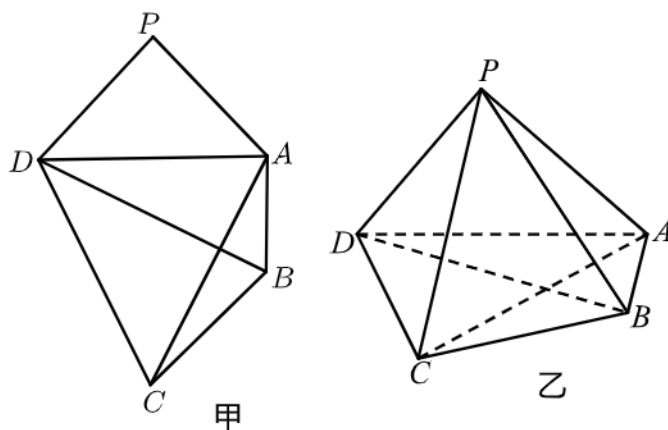
6. 例题精讲

- 15 如图，由直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 和四棱锥 $D - BB_1C_1C$ 构成的几何体中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 1$ ， $BC = BB_1 = 2$ ， $C_1D = CD = \sqrt{5}$ ，平面 $CC_1D \perp$ 平面 ACC_1A_1 。



求证： $AC \perp DC_1$.

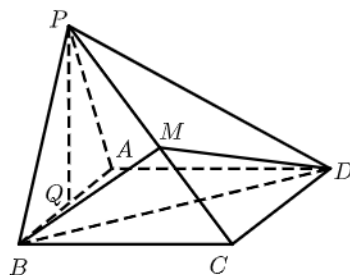
- 16 如图甲的平面五边形 $PABCD$ 中, $PD = PA$, $AC = CD = BD = \sqrt{5}$, $AB = 1$, $AD = 2$, $PD \perp PA$, 现将图甲中的 $\triangle PAD$ 沿 AD 边折起, 使平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ 得图乙的四棱锥 $P - ABCD$, 在图乙中.



求证： $PD \perp$ 平面 PAB .

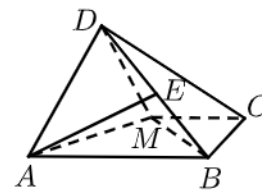
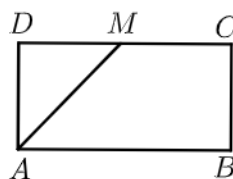
7. 课堂巩固

- 17 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle ABC = 60^\circ$, 侧面 PAB 是边长为 2 的正三角形, 侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$, AB 的中点为 Q .



求证： $PQ \perp$ 平面 $ABCD$.

- 18 如图，已知长方形 $ABCD$ 中， $AB = 2\sqrt{2}$ ， $AD = \sqrt{2}$ ， M 为 DC 的中点．将 $\triangle ADM$ 沿 AM 折起，使得平面 $ADM \perp$ 平面 $ABCM$ ．



求证： $AD \perp BM$ ．