

02空间中的位置关系

一、点、线、面的位置关系

1. 平面的相关概念

定义

平面内有无数个点，**平面可以看成是空间点的集合**。几何里的平面是**无限延展**的。

画法

①通常把水平的平面画成锐角为 45° ，横边长等于其邻边长2倍的平行四边形，如图1所示。

②如果一个平面被另一个平面挡住，则被遮挡的部分用虚线画出来，如图2所示

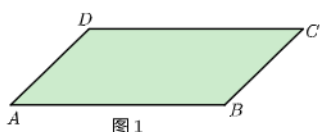


图 1

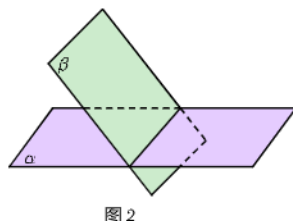


图 2

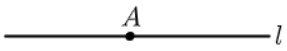
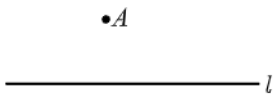
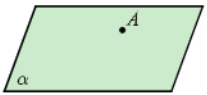
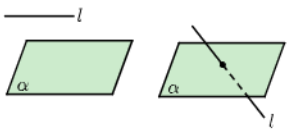
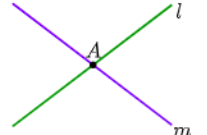
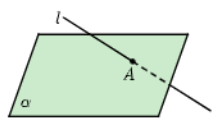
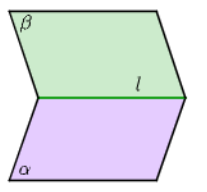
表示法

①平面通常用一个希腊字母表示，如：平面 α 、平面 β 、平面 γ 等。

②用代表平面的平行四边形的四个顶点表示，如：平面 $ABCD$ (如图1)。

③用相对顶点的两个大写英文字母来表示，如：平面 AC 或平面 BD (如图1)。

2. 点、线、面的位置关系及符号表示

图形语言	文字语言	符号语言
	点 A 在直线 l 上	$A \in l$
	点 A 在直线 l 外	$A \notin l$
	点 A 在平面 α 内	$A \in \alpha$
	点 A 在平面 α 外	$A \notin \alpha$
	直线 l 在平面 α 内	$l \subset \alpha$
	直线 l 不在平面 α 内	$l \not\subset \alpha$
	直线 l, m 相交于点 A	$l \cap m = A$
	直线 l 与平面 α 相交于点 A	$l \cap \alpha = A$
	α, β 相交于直线 l	$\alpha \cap \beta = l$

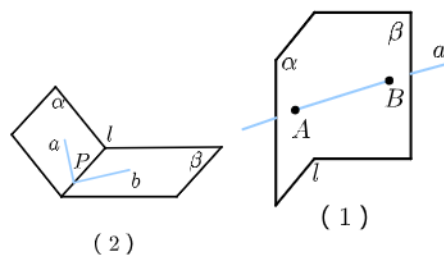
3. 例题精讲

1 用符号表示下列语句

(1) 点 A 在平面 α 内，但点 B 在平面 α 外

- (2) 直线 a 经过平面 α 外的一点 M .
 (3) 直线 a 既在平面 α 内, 又在平面 β 内 .

2 如图, 用符号表示下列图形中直线、平面之间的位置关系 .



4. 课堂巩固

3 下列命题正确的是 () .

- | | |
|--------------------|-------------------|
| A. 三点确定一个平面 | B. 一条直线和一个点确定一个平面 |
| C. 圆心和圆上两点可以确定一个平面 | D. 梯形可确定一个平面 |

二、公理体系 (平面的基本性质)

1. 公理体系

	公理1	公理2	公理3
文字语言	如果一条直线上的两点在同一个平面内，那么这条直线在此平面内	过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面	如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线
图形语言			
符号语言	$A \in l, B \in l, A \in \alpha, B \in \alpha \Rightarrow l \subset \alpha$	A, B, C 三点不共线 $\Rightarrow$ 有且只有一个平面 α , 使 $A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha$	$P \in \alpha \cap \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = l$ 且 $P \in l$
主要应用	(1)判定直线在平面内; (2)判断点是否在平面内	(1)确定平面; (2)证明点、线共面问题; (3)判定两个平面重合	(1)判定两个平面相交; (2)证明点共线; (3)证明线共点



公理3应用(2): 证明空间三点共线问题

证明这类问题一般根据公理3证明这些点都在两个平面的交线上，即先确定出某两个点在某两个平面内，再证明第三个点既在第一个平面内，又在第二个平面内，当然必在两平面的交线上。



公理3应用(3): 证明空间三线共点问题

证明三线共点问题的基本方法是先证明两条线交于一点，再证明第三条直线过该点，常结合公理3，证明该点在不重合的两个平面内，故该点在它们的交线(第三条直线)上，从而证明三线共点。



公理2: 证明空间点共面问题

根据公理2，先取三点(不共线的三点)确定一个平面，再证其他点都在这个平面内。

2. 公理2的三个推论

	推论1	推论2	推论3
文字语言	经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面	经过两条相交直线，有且只有一个平面	经过两条平行直线，有且只有一个平面
图形语言			
符号语言	点 $A \notin$ 直线 $a \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α ，使 $A \in$ 平面 α ， $a \subset \alpha$	直线 $a \cap b =$ 点 $A \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α ，使 $a \subset \alpha$ ， $b \subset \alpha$	直线 $a //$ 直线 $b \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α ，使 $a \subset \alpha$ ， $b \subset \alpha$



公理2及三个推论应用：证明空间直线共面问题

证明此类问题，常用的方法有：

①纳入法：先利用公理2及平面公理的三个推论证明某些点和直线在一个确定的平面内，再证明其余的点和直线也在这个确定的平面内。

②同一法：先利用公理2及平面公理的三个推论证明某些点和直线在一个确定的平面内，另一些点和直线在另外一个确定的平面内，……，最后证明这些平面重合。

③反证法：可以假设这些点和直线不在同一个平面内，然后通过推理找出矛盾，从而否定假设，肯定结论。

3. 平行公理

名称	文字语言	图形语言	符号语言	作用
平行公理 (公理四)	平行于同一条直线的两条直线互相平行		$a // b, b // c \Rightarrow a // c$	证明空间两直线平行



平行公理的应用

证明空间中两条直线平行可利用公理4，即找到条直线 c ，使得 $a // c$ ，同时 $b // c$ ，则由公理4得到 $a // b$ 。

4. 例题精讲

4 以下四个命题中，

- ①不共面的四点中，其中任意三点不共线；
- ②若点 A 、 B 、 C 、 D 共面，点 A 、 B 、 C 、 E 共面，则点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 共面；
- ③若直线 a 、 b 共面，直线 a 、 c 共面，则直线 b 、 c 共面；
- ④依次首尾相接的四条线段必共面。

正确命题的个数是（ ）。

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5 有下列几个命题：①过三个点确定一个平面；②矩形是一个平面图形；③若两个平面有无数个公共点，则两个平面重合；④若 l 、 m 是两条异面直线， α 、 β 是两个平面，若 $l//\alpha$ ， $m//\beta$ ，则 $\alpha//\beta$ 。其中错误命题的序号是（ ）。

- A. ①②③ B. ①③④ C. ①②④ D. ②③④

6 已知 l 、 m 、 n 是三条直线， α 是一个平面，下列命题：

- ①若 $l\perp\alpha$ ，则 l 与 α 相交，
- ②若 $l//\alpha$ ，则 α 内所有直线与 l 平行，
- ③若 $m\subset\alpha$ ， $n\subset\alpha$ ， $l\perp m$ ， $l\perp n$ ，则 $l\perp\alpha$ ，
- ④若 $l//m$ ， $m//n$ ， $l\perp\alpha$ ，则 $n\perp\alpha$ 。

其中，正确的是（ ）。

- A. ①② B. ①④ C. ②③ D. ②④

5. 课堂巩固

7 下列说法正确的是（ ）。

- A. 若直线 a 与平面 α 内无数条直线平行，则 $a//\alpha$
- B. 平行四边形的直观图是平行四边形
- C. 经过一条直线和一个点确定一个平面

D. 如果两个平面平行，那么在这两个平面内的两条直线平行

8 以下说法正确的有几个（ ）。

- ①四边形确定一个平面；
- ②如果一条直线在平面外，那么这条直线与该平面没有公共点；
- ③过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行；
- ④如果两条直线垂直于同一条直线，那么这两条直线平行；

A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 3个

三、线线、线面、面面的位置关系

1. 空间中两条直线的位置关系

位置关系	共面情况	公共点个数
相交	在同一平面内	有且只有一个交点
平行	在同一平面内	没有交点
异面	不同在任何一个平面内	没有交点

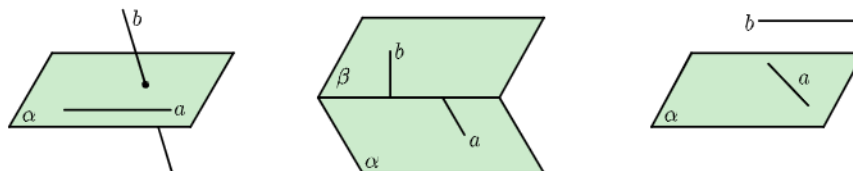
2. 异面直线



定义及画法

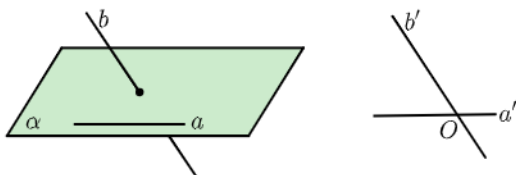
①定义:我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线.

②画法:如图.



异面直线所成角的定义及范围

①定义:如图, a, b 是两条异面直线, 经过空间任意一点 O 作直线 $a' // a, b' // b$, 我们把 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a 与 b 所成的角.



②范围: $(0, \frac{\pi}{2}]$.

3. 直线与平面的位置关系

位置关系	直线 a 在平面 α 内	直线 a 与平面 α 相交	直线 a 与平面 α 平行
公共点个数	有无数个公共点	有且只有一个公共点	没有公共点
符号表示	$a \subset \alpha$	$a \cap \alpha = A$	$a // \alpha$
图形表示			

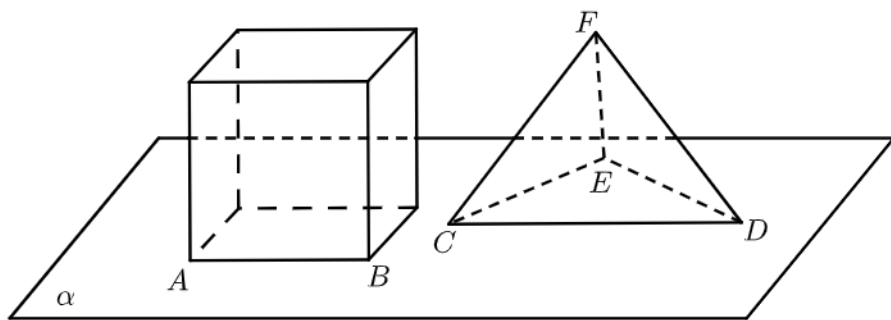
我们把直线 a 与平面 α 相交或平行的情况统称为直线在平面外, 记作 $a \not\subset \alpha$.

4. 两个平面的位置关系

位置关系	两平面平行	两平面相交
公共点个数	没有公共点	有一条公共直线
符号表示	$\alpha // \beta$	$\alpha \cap \beta = a$
图象表示		

5. 例题精讲

- 9 如图, 正方体的底面与正四面体的底面在同一平面 α 上, 且 $AB \parallel CD$, 正方体的六个面所在的平面与直线 CE, EF 相交的平面个数分别记为 m, n , 那么 $m+n=(\quad)$.



- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

- 10 给出以下四个命题:

- ①如果一条直线和一个平面平行, 经过这条直线的一个平面和这个平面相交, 那么这条直线和交线平行,
- ②如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直, 那么这条直线垂直于这个平面,
- ③如果两条直线都平行于一个平面, 那么这两条直线互相平行,
- ④如果一个平面经过另一个平面的一条垂线, 那么这两个平面互相垂直.

其中真命题的个数是 $(\quad)$.

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

- 11 a, b, c 是空间中的三条直线, 下面给出四个命题: (1) 若 $a \parallel b, b \parallel c$, 则 $a \parallel c$, (2) 若 $a \perp b, b \perp c$, 则 $a \parallel c$, (3) 若 a 与 b 相交, b 与 c 相交, 则 a 与 c 也相交, (4) 若 a, b 分别在两个相交平面内, 则这两条直线不可能平行. 则上述命题中真命题是 (仅填序号).

- 12 平面 α 外有两条直线 m 和 n , 如果 m 和 n 在平面 α 内的射影分别是 m_1 和 n_1 , 给出下列四个命题: ① $m_1 \perp n_1 \Rightarrow m \perp n$; ② $m \perp n \Rightarrow m_1 \perp n_1$; ③ m_1 与 n_1 相交 $\Rightarrow m$ 与 n 相交或重合; ④ m_1 与 n_1 平行 $\Rightarrow m$ 与 n 平行或重合; 其中不正确的命题个数是 $(\quad)$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

- 13 已知 m, n 是两条不重合的直线, α 是一个平面, 则下列命题中正确的是 $(\quad)$.

A. 若 $m // \alpha, n // \alpha$, 则 $m // n$

B. 若 $m // \alpha, n \subset \alpha$, 则 $m // n$

C. 若 $m \perp n, m \perp \alpha$, 则 $n // \alpha$

D. 若 $m \perp \alpha, n // \alpha$, 则 $m \perp n$

6. 课堂巩固

14 已知平面 $\alpha \perp$ 平面 $\beta, \alpha \cap \beta = l$, 点 $A \in \alpha, A \notin l$, 直线 $AB // l$, 直线 $AC \perp l$, 直线 $m // \alpha, m // \beta$, 则下列四种位置关系中, 不一定成立的是 () .

A. $AC \perp \beta$

B. $AC \perp m$

C. $AB // \beta$

D. $AB // m$

15 空间两条直线 a, b 与直线 l 都成异面直线, 则 a, b 的位置关系是 () .

A. 平行或相交

B. 异面或平行

C. 异面或相交

D. 平行或异面或相交

16 若 a, b 是异面直线, $a // \alpha$, 则 b 与 α 的位置关系是 () .

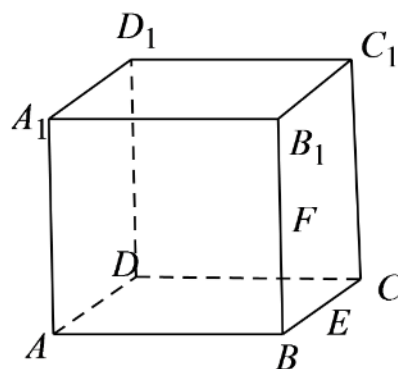
A. $b // \alpha$ 或 $b \subset \alpha$

B. b 与 α 相交或 $b // \alpha$

C. b 与 α 相交或 $b \subset \alpha$

D. b 与 α 相交或 $b \subset \alpha$ 或 $b // \alpha$

17 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 BC, BB_1 的中点, 则下列直线中与直线 EF 相交的是 () .



A. 直线 AA_1

B. 直线 A_1B_1

C. 直线 A_1D_1

D. 直线 B_1C_1