

解三角形综合-习题

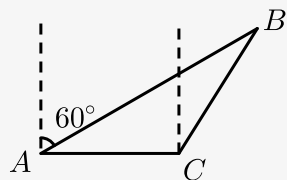
一、选择题

1. 一船以每小时15km的速度向东航行，船在A处看到一灯塔B在北偏东60°的方向上，行驶4h后，船到达C处，看到这个灯塔在北偏东15°的方向上，这时船与灯塔的距离为（ ）。

A. $30\sqrt{2}\text{km}$ B. $30\sqrt{6}\text{km}$ C. $15\sqrt{2}\text{km}$ D. $15\sqrt{6}\text{km}$

【答案】A

【解析】如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = 60\text{km}$ ， $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$ ，



$$\angle ACB = \frac{7\pi}{12}, \angle ABC = \frac{\pi}{4},$$

由正弦定理得： $\frac{BC}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{AC}{\sin \frac{\pi}{4}}$ ，

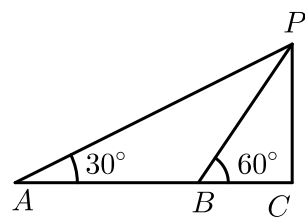
$$\text{故 } BC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 60 = 30\sqrt{2}\text{km},$$

故船与灯塔的距离为 $30\sqrt{2}\text{km}$ 。

故选A。

【标注】 【知识点】AAS类三角形（利用正弦定理）；测量距离的问题

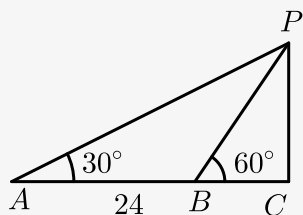
2. 海春轩塔（又名广福寺塔），江苏第一古塔，为唐代建筑物，位于江苏省东台市古镇西溪。距今已有1300多年历史，为东台西溪旅游观光主要景点之一。在一次春游活动中，同学们为了估算塔高，某同学在该塔正西方向的A处测得该塔仰角为 30° ，对着塔向正东方向前进了24米到达B处后测得该塔仰角为 60° ，则该塔的高度估计为（ ）。



A. $8\sqrt{3}$ 米 B. 12米 C. $12\sqrt{3}$ 米 D. $24\sqrt{3}$ 米

【答案】C

【解析】由 $\angle PBC = 60^\circ$ 得， $\angle ABP = 120^\circ$ ，
则 $\angle APB = 30^\circ$ ，



$\therefore \triangle PAB$ 是等腰三角形， $PB = AB = 24$ ，

在 $\text{Rt}\triangle PBC$ 中，

$$PC = PB \cdot \sin 60^\circ = 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}.$$

故选C.

【标注】【知识点】测量高度的问题；AAS类三角形（利用正弦定理）

【素养】数学建模；数学运算；直观想象

3. 已知在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ， $B = 60^\circ$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ，则 b 的取值范围是（ ）.
- A. $[2, \sqrt{6})$ B. $[\sqrt{2}, \sqrt{6})$ C. $[2, 6)$ D. $[4, 6)$

【答案】A

【解析】由题可知， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2}ac \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ，

$\therefore ac = 4$ ，又 $\because \triangle ABC$ 是锐角，

$$\therefore \begin{cases} 0 < A < 90^\circ \\ 0 < 120^\circ - A < 90^\circ \end{cases} \text{即 } 30^\circ < A < 90^\circ,$$

$\therefore$ 根据正弦定理可得，

$$ac = \frac{b}{\sin B} \cdot \sin A \cdot \frac{b}{\sin B} \cdot \sin C$$

$$= \frac{b^2}{\sin^2 B} \cdot \sin A \cdot \sin C,$$

$$4 = \frac{b^2}{\frac{3}{4}} \cdot \sin A \cdot \sin (120^\circ - A),$$

$$\text{即 } b^2 = \frac{3}{\sin A \cdot \sin (120^\circ - A)}$$

$$= \frac{3}{\sin A \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A \right)}$$

$$= \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2A + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2A}$$

$$= \frac{3}{\frac{1}{2}\sin(2A-30^\circ) + \frac{1}{4}},$$

$$\because A \in (30^\circ, 90^\circ),$$

$$\therefore 2A - 30^\circ \in (30^\circ, 150^\circ),$$

$$\therefore \sin(2A - 30^\circ) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \text{ 则 } b^2 \in [4, 6),$$

$$\text{即 } b \in [2, \sqrt{6}).$$

故选：A.

【标注】 【知识点】求边长相关最值或范围问题

4. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且满足 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$ ， $\vec{AB} \cdot \vec{BC} > 0$ ， $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 $b + c$ 的取值范围是（ ）.

- A. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ B. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

【答案】 B

【解析】 在 $\triangle ABC$ 中， $b^2 + c^2 - a^2 = bc$ ，

$$\text{由余弦定理可得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2},$$

因为 A 是 $\triangle ABC$ 的内角，

$$\text{所以 } A = 60^\circ,$$

$$\text{因为 } a = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以由正弦定理得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{c}{\sin(120^\circ - B)} = 1,$$

$$\text{所以 } b + c = \sin B + \sin(120^\circ - B) = \frac{3}{2}\sin B + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B = \sqrt{3}\sin(B + 30^\circ),$$

$$\text{因为 } \vec{AB} \cdot \vec{BC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos(\pi - B) > 0,$$

所以 $\cos B < 0$ ， B 为钝角，

$$\text{所以 } 90^\circ < B < 120^\circ, 120^\circ < B + 30^\circ < 150^\circ,$$

$$\text{故 } \sin(B + 30^\circ) \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\text{所以 } b + c = \sqrt{3}\sin(B + 30^\circ) \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

【标注】 【知识点】正余弦定理综合求解边角；余弦定理

5. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $a = 1$ ， $2\cos C + c = 2b$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围是（ ）.

- A. $(\sqrt{3} - 1, \sqrt{3}]$ B. $[1, \sqrt{3}]$ C. $(\sqrt{3} + 1, 3]$ D. $(0, 3]$

【答案】C

【解析】由余弦定理以及 $2\cos C + c = 2b$ 得 $2 \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c = 2b$,

因为 $a = 1$,

所以 $1 + bc = b^2 + c^2$,

由余弦定理 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc + 1 - 1^2}{2bc} = \frac{1}{2}$,

所以 $A = \frac{\pi}{3}$,

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

所以 $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin B$, $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin C$,

因此 $b + c = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\sin B + \sin C) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2\sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}$
 $= \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2\sin \frac{\pi-A}{2} \cos \frac{(\pi-A-2C)}{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - C\right)$,

由于 $\triangle ABC$ 是锐角三角形且 $\angle A = \frac{\pi}{3}$,

所以 $C \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $b + c \in (\sqrt{3}, 2]$,

从而 $a + b + c \in (\sqrt{3} + 1, 3]$.

故选C.

【标注】 【知识点】 求边长相关最值或范围问题

6. 已知锐角三角形 $\triangle ABC$, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a \sin \frac{A+C}{2} = b \sin A$, $c = 2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的取值范围为 ().

A. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3}\right)$

B. $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$

D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

【答案】A

【解析】 $\because a \sin \frac{A+C}{2} = b \sin A$,

$\therefore \sin\left(\frac{\pi-B}{2}\right) = a \cos \frac{B}{2} = b \sin A$,

$\therefore$ 由正弦定理可得: $\sin A \cos \frac{B}{2} = \sin B \sin A$,

$\because \sin A > 0$,

$\therefore$ 可得: $\cos \frac{B}{2} = \sin B = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$,

$\because B$ 为锐角, $\frac{B}{2}$ 也为锐角,

$\therefore$ 可得 $\sin \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$, 可得 $\frac{B}{2} = \frac{\pi}{6}$, 可得 $B = \frac{\pi}{3}$,

$\because c = 2$,

$\therefore$ 由题设知 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$$\text{由正弦定理得 } a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{2 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - C \right)}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\tan C} + 1 ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为锐角三角形 ,

$$\therefore 0^\circ < A < 90^\circ , 0^\circ < C < 90^\circ ,$$

$$\text{由 (1) 知 } A + C = 180^\circ - B = 120^\circ ,$$

$$\therefore 30^\circ < C < 90^\circ ,$$

$$\therefore \tan C \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty \right) ,$$

$$\therefore 1 < a < 4 ,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} < S_{\triangle ABC} < 2\sqrt{3} ,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 面积的取值范围是 } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3} \right) ,$$

故选 A .

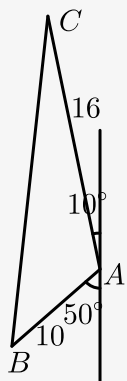
【标注】 【知识点】求面积最值或范围问题

二、 填空题

7. 甲船在岛 A 处南偏西 50° 的 B 处 , 且 AB 的距离为 10 海里 , 另有乙船正离开岛沿北偏西 10° 的方向以每小时 8 海里的速度航行 , 若甲船要用 2 小时追上乙船 , 则速度大小为 _____ 海里 .

【答案】 $\sqrt{129}$

【解析】 由图知 ,



$$\angle BAC = 180^\circ - 10^\circ - 50^\circ = 120^\circ ,$$

$$AC = 8 \times 2 = 16 ,$$

$$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 120^\circ = 100 + 256 - 2 \times 10 \times 16 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = 356 + 160 = 516 ,$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{129} ,$$

$$\therefore V = \frac{BC}{2} = \sqrt{129}.$$

【标注】【素养】数学运算；数学建模

【知识点】正余弦定理综合求解边角；测量距离的问题

三、解答题

8. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，已知 $(a - 3b) \cos C = C(3 \cos B - \cos A)$ 。

(1) 求 $\frac{\sin B}{\sin A}$ 的值。

(2) 若 $c = \sqrt{7}a$ ，求角 C 的大小。

【答案】(1) 3。

(2) $C = 60^\circ$ 。

【解析】(1) 由正弦定理得： $(\sin A - 3 \sin B) \cos C = \sin C(3 \cos B - \cos A)$ ，

$$\therefore \sin A \cos C + \cos A \sin C = \sin C \cos B + 3 \cos C \sin B,$$

$$\text{即} \sin(A + C) = 3 \sin(C + B), \text{ 即} \sin B = 3 \sin A,$$

$$\therefore \frac{\sin B}{\sin A} = 3.$$

(2) 由(1)知 $b = 3a$ ，

$$\therefore c = \sqrt{7}a,$$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + 9a^2 - 7a^2}{2 \times a \times 3a} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore C \in (0, \pi),$$

$$\therefore C = 60^\circ.$$

【标注】【知识点】余弦定理；正弦定理；正余弦定理综合求解边角

9. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $\frac{\cos A - 2 \cos C}{\cos B} = \frac{2c - a}{b}$ 。

(1) 求 $\frac{\sin C}{\sin A}$ 的值。

(2) 若 $\cos B = \frac{1}{4}$ ， $b = 2$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

【答案】(1) 2。

$$(2) \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

【解析】(1) 由正弦定理得： $\frac{\cos A - 2 \cos C}{\cos B} = \frac{2c - a}{b} = \frac{2 \sin C - \sin A}{\sin B}$ ，

$$\therefore \sin B \cos A - 2 \sin B \cos C = 2 \sin C \cos B - \sin A \cos B,$$

$$\therefore \sin(A+B) = 2\sin(B+C),$$

$$\therefore \sin C = 2\sin A,$$

$$\therefore \frac{\sin C}{\sin A} = 2.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知: } \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A} = 2, \text{ 即 } c = 2a,$$

$$\text{由余弦定理得: } b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B,$$

$$\text{即 } 2^2 = 4a^2 + a^2 - 2a \times 2a \times \frac{1}{4},$$

$$\text{解得 } a = 1,$$

$$\therefore c = 2,$$

$$\therefore \cos B = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 面积 } S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

【标注】 【知识点】 三角形面积公式；正弦定理；余弦定理

10. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin B + \sin A}$ 。

(1) 求角 A 的大小。

(2) 若 $a = \sqrt{7}, b = 2c$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

【答案】 (1) $\frac{2\pi}{3}$
(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】 (1) 由正弦定理， $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin B + \sin A} = \frac{b+c}{b+a}$ 。

$$\text{故 } (a-b)(b+a) = c(b+c), \text{ 即 } a^2 - b^2 = bc + c^2,$$

$$\text{即 } a^2 = b^2 + c^2 + bc, \text{ 故由余弦定理}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2}, A = \frac{2\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 由 } a^2 = b^2 + c^2 + bc \text{ 代入 } a = \sqrt{7}, b = 2c,$$

$$\text{可以解得 } b = 2, c = 1, \text{ 故 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角

11. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c ，且满足 $a^2 + c^2 - b^2 = \sqrt{3}ac$ 。

(1) 求角 B 的大小。

(2) 若 $2b \cos A = \sqrt{3}(c \cos A + a \cos C)$ ， BC 边上的中线 AM 的长为 $\sqrt{7}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

【答案】 (1) $\angle B = 30^\circ$ 。

$$(2) \sqrt{3}.$$

【解析】(1) $\because a^2 + c^2 - b^2 = \sqrt{3}ac$,

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2 - \sqrt{3}ac,$$

$$\text{又} \because b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$\therefore 2 \cos B = \sqrt{3},$$

$$\therefore \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ.$$

$$(2) 2b \cos A = \sqrt{3}(c \cos A + a \cos C),$$

$$\therefore 2 \sin B \cos A = \sqrt{3}(\sin C \cos A + \sin A \cos C),$$

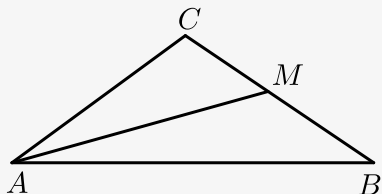
$$\therefore 2 \sin B \cos A = \sqrt{3} \sin(A + C),$$

$$\therefore 2 \sin B \cos A = \sqrt{3} \sin B,$$

$$\because \sin B \neq 0,$$

$$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ,$$



$$\therefore \angle A = \angle B = 30^\circ$$

设 $AC = x$,

$$\therefore BC = x, AB = \sqrt{3}x,$$

由中线长公式知,

$$x^2 + x^2 + (\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{3}x)^2 = x^2 + (2\sqrt{7})^2,$$

$$\therefore 7x^2 = 28,$$

$$x^2 = 4,$$

$$\therefore x = 2,$$

$$\therefore AC = BC = 2,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \sin 120^\circ = \sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角；余弦定理；三角形面积公式

12. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $c = \sqrt{3}a \sin C - c \cos A$.

(1) 求 A .

(2) 若 $a = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 b, c .

【答案】(1) $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) $b = c = 2$.

【解析】(1) $c = \sqrt{3}a \sin C - c \cos A$,

有正弦定理有: $\sqrt{3} \sin A \sin C - \sin C \cos A - \sin C = 0$,

即 $\sin C \cdot (\sqrt{3} \sin A - \cos A - 1) = 0$,

又 $\sin C \neq 0$,

所以 $\sqrt{3} \sin A - \cos A - 1 = 0$,

即 $2 \sin \left(A - \frac{\pi}{6} \right) = 1$,

所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{3}$,

所以 $bc = 4$, $a = 2$,

由余弦定理得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

即 $4 = b^2 + c^2 - bc$,

即有 $\begin{cases} bc = 4 \\ b^2 + c^2 - bc = 4 \end{cases}$.

$\therefore b = c = 2$.

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 已知 $b \sin^2 \frac{A}{2} + a \sin^2 \frac{B}{2} = \frac{c}{2}$.

(1) 若 $c = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

(2) 若 $C = \frac{\pi}{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 求 c .

【答案】(1) 周长为 6.

(2) $c = 2\sqrt{2}$.

【解析】(1) $\because b \sin^2 \frac{A}{2} + a \sin^2 \frac{B}{2} = \frac{c}{2}$

$\therefore$ 由正弦定理可得 $\sin A \cdot \left(\frac{1 - \cos B}{2} \right) + \sin B \cdot \left(\frac{1 - \cos A}{2} \right) = \frac{1}{2} \sin C$

$\therefore \sin A - \sin A \cos B + \sin B - \sin B \cos A = \sin C$,

$\therefore \sin A + \sin B - \sin(A + B) = \sin C$, 可得: $\sin A + \sin B = 2 \sin C$,

$\therefore a + b = 2c$,

$\therefore c = 2$,

$\therefore \triangle ABC$ 的周长 $a + b + c = 3c = 6$.

(2) $\because C = \frac{\pi}{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3} = \frac{1}{2}ab \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore ab = 8$$

$$\therefore \text{由余弦定理可得: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

$$\therefore \cos C = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab,$$

$$\text{由(1)可知 } a+b=2c,$$

$$\therefore c^2 = 4c^2 - 24, \text{ 即 } c^2 = 8,$$

$$\therefore c = 2\sqrt{2}.$$

【标注】 【知识点】 SAS类三角形（利用余弦定理）；三角形面积公式；边角互化（利用正弦定理）

14. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $b^2 + c^2 - a^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}bc$ 。

(1) 求 $\sin A$ 的值。

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{2}$ ，且 $\sqrt{2}\sin B = 3\sin C$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$ 。

(2) $2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ 。

【解析】 (1) $\therefore b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A,$

$$\therefore 2bc \cos A = \frac{4\sqrt{2}}{3}bc,$$

$$\therefore \cos A = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \text{在}\triangle ABC\text{中, } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{1}{3}.$$

(2) $\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{2}$ ，即 $\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{6}bc = \sqrt{2}$ ，

$$\therefore bc = 6\sqrt{2},$$

$$\text{又}\therefore \sqrt{2}\sin B = 3\sin C, \text{ 由正弦定理得 } \sqrt{2}b = 3c,$$

$$\therefore b = 3\sqrt{2}, c = 2,$$

$$\text{则 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 6,$$

$$\therefore a = \sqrt{6},$$

$$\therefore \triangle ABC\text{的周长为 } 2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}.$$

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角

15. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $b+c=2a$ ， $3c\sin B=4a\sin C$ 。

(1) 求 $\cos B$ 的值。

(2) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值。

【答案】 (1) $-\frac{1}{4}$.

(2) $-\frac{3\sqrt{5}+7}{16}$.

【解析】 (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

得 $b \sin C = c \sin B$,

又由 $3c \sin B = 4a \sin C$,

得 $3b \sin C = 4a \sin C$, 即 $3b = 4a$,

又因为 $b + c = 2a$,

得到 $b = \frac{4}{3}a$, $c = \frac{2}{3}a$,

由余弦定理可得

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot \frac{2}{3}a} = \frac{a^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{9}a^2}{2 \cdot a \cdot \frac{2}{3}a} = -\frac{1}{4}.$$

(2) 由(1)可得 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

从而 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = -\frac{\sqrt{15}}{8}$,

$\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = -\frac{7}{8}$,

故 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2B \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2B \sin \frac{\pi}{6}$

$= -\frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{8} \times \frac{1}{2}$

$= -\frac{3\sqrt{5}+7}{16}$.

【标注】 【知识点】倍角、和差角公式综合；正余弦定理综合求解边角

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{15}$, $b - c = 2$, $\cos A = -\frac{1}{4}$.

(1) 求 a 和 $\sin C$ 的值.

(2) 求 $\cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

【答案】 (1) $a = 8$, $\sin C = \frac{\sqrt{15}}{8}$

(2) $\frac{\sqrt{15}-7\sqrt{3}}{16}$.

【解析】 (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\cos A = -\frac{1}{4}$, 可得 $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 3\sqrt{15}$, 得 $bc = 24$,

又由 $b - c = 2$, 解得 $b = 6$, $c = 4$,

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 解得 $a = 8$,

再由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $\sin C = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \cos 2A \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \sin 2A \cdot \sin \frac{\pi}{6} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(2\cos^2 A - 1) - \frac{1}{2} \cdot 2\sin A \cos A \\
 &= \frac{\sqrt{15} - 7\sqrt{3}}{16}.
 \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】两角和与差的余弦；和差角公式化简求值综合运用；正弦定理；三角形面积公式；正余弦定理综合求解边角

17. 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边，已知 $b^2 = ac$ 且 $a^2 - c^2 = ac - bc$ 。

(1) 求 $\angle A$ 的大小。

(2) 设 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{A}{2}\right) + \sin(\omega x)$ ($\omega > 0$) 且 $f(x)$ 的最小正周期为 π ，求 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的最大值。

【答案】 (1) $\frac{\pi}{3}$ 。

(2) $\sqrt{3}$ 。

【解析】 (1) 因为 $b^2 = ac$ 且 $a^2 - c^2 = ac - bc$ ，所以 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$ ，

$$\text{所以 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2cb} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2},$$

又 $0 < x < \pi$ ，所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 。

$$(2) \quad f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin(\omega x)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \omega x + \frac{1}{2}\sin \omega x + \sin \omega x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \omega x + \frac{3}{2}\sin \omega x$$

$$= \sqrt{3}\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{因为 } \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \text{ 所以 } \omega = 2, \text{ 所以 } f(x) = \sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{因为 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 所以 } 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right],$$

$$\text{所以当 } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ 即 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 时, } f(x)_{\max} = \sqrt{3}.$$

【标注】 【知识点】余弦定理；正弦函数的图象和性质

18. 在 $\triangle ABC$ 中，设边 a, b, c 所对的角为 A, B, C ，且 A, B, C 都不是直角，

$$(bc - 8)\cos A + ac\cos B = a^2 - b^2.$$

(1) 若 $b + c = 5$ ，求 b, c 的值。

(2) 若 $a = \sqrt{5}$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

【答案】 (1) $\begin{cases} b=1 \\ c=4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} b=4 \\ c=1 \end{cases}.$

$$(2) \frac{\sqrt{55}}{4}.$$

【解析】(1) $\because (bc-8) \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + ac \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = a^2-b^2$,

$$\therefore \frac{b^2+c^2-a^2}{2} - 8 \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2} = a^2-b^2,$$

$$\therefore b^2+c^2-a^2-8 \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = 0,$$

$\therefore \triangle ABC$ 不是直角三角形,

$$\therefore bc = 4,$$

$$\text{又} \because b+c=5,$$

$$\therefore \text{解得} \begin{cases} b=1 \\ c=4 \end{cases} \text{或} \begin{cases} b=4 \\ c=1 \end{cases}.$$

$$(2) \because a = \sqrt{5}, \text{由余弦定理可得 } 5 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \geq 2bc - 2bc \cos A = 8 - 8 \cos A,$$

$$\therefore \cos A \geq \frac{3}{8},$$

$$\therefore \sin A \leq \frac{\sqrt{55}}{8},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A \leq \frac{\sqrt{55}}{4}.$$

$$\therefore \text{当 } \cos A = \frac{3}{8} \text{ 时 } \triangle ABC \text{ 面积取得最大值, } \triangle ABC \text{ 面积的最大值是 } \frac{\sqrt{55}}{4}.$$

【标注】 【知识点】 求面积最值或范围问题

19. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, 且 $4 \sin A \cos^2 A - \sqrt{3} \cos(B+C) = \sin 3A + \sqrt{3}$.

(1) 求 A 的大小.

(2) 若 $b=2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

【答案】(1) $A = \frac{\pi}{3}$.

$$(2) S_{\triangle ABC} \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3} \right).$$

【解析】(1) $\because A+B+C = \pi$,

$$\therefore \cos(B+C) = -\cos A \text{ ①},$$

$$\text{又} \because 3A = 2A + A,$$

$$\therefore \sin 3A = \sin(2A + A) = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A \text{ ②},$$

$$\text{又} \sin 2A = 2 \sin A \cos A \text{ ③}, \text{将①, ②, ③代入已知得},$$

$$2 \sin 2A \cos A + \sqrt{3} \cos A = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A + \sqrt{3},$$

$$\text{整理得 } \sin A + \sqrt{3} \cos A = \sqrt{3},$$

$$\text{即 } \sin \left(A + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{又} \because A \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\therefore A + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, \text{即 } A = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 由(1)得 $B + C = \frac{2\pi}{3}$,
 $\therefore C = \frac{2\pi}{3} - B$,
 $\because \triangle ABC$ 为锐角三角形 ,
 $\therefore \frac{2\pi}{3} - B \in (0, \frac{\pi}{2})$ 且 $B \in (0, \frac{\pi}{2})$,
解得 $B \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$,
在 $\triangle ABC$ 中 , 由正弦定理得 : $\frac{2}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,
 $\therefore c = \frac{2 \sin C}{\sin B} = \frac{2 \sin (\frac{2\pi}{3} - B)}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\tan B} + 1$,
又 $B \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$,
 $\therefore \frac{1}{\tan B} \in (0, \sqrt{3})$,
 $\therefore c \in (1, 4)$,
又 $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} c$,
 $\therefore S_{\triangle ABC} \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3})$.

【标注】 【知识点】求面积最值或范围问题

20. $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $a = c \cos B + \frac{1}{3}b$.

(1) 求 $\cos C$.

(2) 若 $c = 3$, 求 $a + b$ 的最大值 .

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$.

(2) $3\sqrt{3}$.

【解析】 (1) 由正弦定理及 $a = c \cos B + \frac{1}{3}b$ 得 $\sin A = \sin C \cos B + \frac{1}{3} \sin B$

因为 $\sin A = \sin (B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$,

所以 $\sin B \cos C = \frac{1}{3} \sin B$,

因为 $B \in (0, \pi)$, $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos C = \frac{1}{3}$.

(2) 由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, 即 :

$$9 = a^2 + b^2 - \frac{2}{3}ab = (a+b)^2 - \frac{8}{3}ab \geq (a+b)^2 - \frac{8}{3} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{1}{3}(a+b)^2 \text{ 所以 } (a+b)^2 \leq 27 ,$$

$a+b \leq 3\sqrt{3}$, 当 $a=b=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 时取等号 .

所以 $a+b$ 的最大值为 $3\sqrt{3}$.

【标注】 【知识点】求边长相关最值或范围问题 ; 边角互化 (利用正弦定理) ; SAS 类三角形 (利用余弦定理)