

正余弦定理及面积公式

一、正余弦定理

1. 知识讲解

(1) 正弦定理的内容

在一个三角形中, 各边和它所对角的正弦的比相等, 即在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径).

(2) 正弦定理的变形

$$\textcircled{1} a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C ;$$

$$\textcircled{2} a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C ;$$

$$\textcircled{3} \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} ;$$

$$\textcircled{4} a \sin B = b \sin A, c \sin B = b \sin C, c \sin A = a \sin C ;$$

$$\textcircled{5} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B} = \frac{a+c}{\sin A + \sin C} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} .$$

2. 例题精讲

正弦定理的简单运用

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b = 2a \sin B$, 则 A 等于 () .

A. 30° 或 60°

B. 45° 或 60°

C. 30° 或 150°

D. 120° 或 60°

【答案】 C

【解析】 根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

化简 $b = 2a \sin B$, 得 $\sin B = 2 \sin A \sin B$,

$\because \sin B \neq 0$, 在等式两边同时除以 $\sin B$ 得 $\sin A = \frac{1}{2}$,

又 A 为三角形的内角,

则 $A = 30^\circ$ 或 150° .

故选: C.

【标注】 【知识点】边角互化 (利用正弦定理)

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $A : B : C = 1 : 2 : 3$, 则 $a : b : c$ 等于 () .

A. 1:2:3

B. 3:2:1

C. 1: $\sqrt{3}$:2D. 2: $\sqrt{3}$:1**【答案】** C**【解析】** 在 $\triangle ABC$ 中, $A:B:C=1:2:3$,

$$\text{又 } \angle A + \angle B + \angle C = \pi$$

$$\text{所以 } \angle A = \frac{\pi}{6}, \angle B = \frac{\pi}{3}, \angle C = \frac{\pi}{2}.$$

$$a:b:c = \sin \angle A : \sin \angle B : \sin \angle C$$

$$= \sin \frac{\pi}{6} : \sin \frac{\pi}{3} : \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= 1:\sqrt{3}:2$$

【标注】 【知识点】边角互化 (利用正弦定理)3. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 若 $2c \cos C = b \cos A + a \cos B$, 则 $\angle C$ 的值为 ().

A. $\frac{2\pi}{3}$

B. $\frac{5\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{6}$

D. $\frac{\pi}{3}$

【答案】 D**【解析】** $2c \cos C = b \cos A + a \cos B$,

$$\therefore 2 \sin C \cos C = \sin B \cos A + \sin A \cos B,$$

$$\therefore 2 \sin C \cos C = \sin(A+B) = \sin C,$$

$$\text{又 } \because C \in (0^\circ, 180^\circ),$$

$$\therefore \sin C > 0,$$

$$\therefore \cos C = \frac{1}{2},$$

$$\therefore C = 60^\circ.$$

【标注】 【知识点】两角和与差的正弦; 和差角公式化简求值综合运用; 正弦定理4. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $a = \sqrt{13}$, 则 $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$ 等于 ().

A. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$

C. $\frac{26\sqrt{3}}{3}$

D. $2\sqrt{3}$

【答案】 B**【解析】** 由正弦定理, 得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{39}}{3},$$

$$\therefore a = \frac{2\sqrt{39}}{3} \sin A,$$

$$\begin{aligned}
b &= \frac{2\sqrt{39}}{3} \sin B, \\
c &= \frac{2\sqrt{39}}{3} \sin C, \\
\therefore \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} &= \frac{\frac{2\sqrt{39}}{3} \sin A + \frac{2\sqrt{39}}{3} \sin B + \frac{2\sqrt{39}}{3} \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} \\
&= \frac{\frac{2\sqrt{39}}{3} (\sin A + \sin B + \sin C)}{\sin A + \sin B + \sin C} \\
&= \frac{2\sqrt{39}}{3},
\end{aligned}$$

故选：B .

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角；正弦定理

5. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 向量 $\vec{m} = (a, b+c)$,

$\vec{n} = (\sqrt{3} \sin C + \cos C, -1)$, 若 $\vec{m} \perp \vec{n}$, 则 $A = ()$.

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】 B

【解析】 $\because \vec{m} = (a, b+c), \vec{n} = (\sqrt{3} \sin C + \cos C, -1), \vec{m} \perp \vec{n}$,

$$\therefore a(\sqrt{3} \sin C + \cos C) - b - c = 0.$$

$$\text{由正弦定理可得: } \sin A(\sqrt{3} \sin C + \cos C) - \sin B - \sin C = 0.$$

$$\text{又 } A + B + C = \pi,$$

$$\therefore B = \pi - A - C,$$

$$\therefore \sin B = \sin(A + C),$$

$$\therefore \sqrt{3} \sin A \sin C + \sin A \cos C - \sin(A + C) - \sin C = 0,$$

$$\sqrt{3} \sin A \sin C + \sin A \cos C - \sin A \cos C - \sin C \cos A - \sin C = 0,$$

$$\sin C(\sqrt{3} \sin A - \cos A - 1) = 0.$$

$$\text{又 } C \in (0, \pi),$$

$$\therefore \sin C \neq 0,$$

$$\therefore \sqrt{3} \sin A - \cos A - 1 = 0,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A - \frac{1}{2} \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } A \in (0, \pi), A - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right),$$

$$\therefore A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

故选：B

【标注】 【知识点】 正弦定理；和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正弦

 知两角和任一边，求其他边和角

6. 在 $\triangle ABC$ 中， $A = 30^\circ$ ， $C = 105^\circ$ ， $b = 8$ ，则 $a = (\quad)$.

A. 4

B. $4\sqrt{5}$

C. $4\sqrt{3}$

D. $4\sqrt{2}$

【答案】 D

【解析】 因为 $A = 30^\circ$ ， $C = 105^\circ$ ，

所以 $B = 180 - A - C = 45^\circ$ ，

根据正弦定理可得 $\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{8}{\sin 45^\circ}$ ，

解得 $a = 4\sqrt{2}$ ，

故选D .

【标注】 【知识点】 ASA类三角形（利用正弦定理）

 知两边和其中一边对角，求其他边和角

7. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A = 60^\circ$ ， $a = 6$ ， $b = 2\sqrt{3}$ ，则 $B = (\quad)$.

A. 30°

B. 60°

C. 30° 或 150°

D. 60° 或 120°

【答案】 A

【解析】 由正弦定理知：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$
$$\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin B}$$

$$\therefore 6 \sin B = 3, \sin B = \frac{1}{2},$$

$$\therefore B = 30^\circ \text{或} 150^\circ .$$

$$\because a > b ,$$

$$\therefore A > B ,$$

$$\therefore B < 60^\circ ,$$

$$\therefore B = 30^\circ .$$

故选A .

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角；正弦定理

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a = \sqrt{2}, b = 2, \sin B + \cos B = \sqrt{2}$, 则角 A 的大小为 ().

A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

【答案】 B

【解析】 $\sin B + \cos B = \sqrt{2}$,

$$\sqrt{2} \sin(B + 45^\circ) = \sqrt{2},$$

$$\therefore B + 45^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore B = 45^\circ,$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin A} = \frac{2}{\sin B},$$

$$\therefore \sin A = \frac{1}{2},$$

$$\text{又} \because a < b,$$

$$\therefore \angle A < \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore A = 30^\circ = \frac{\pi}{6}.$$

$\therefore$ 选B.

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角；正弦定理

3. 课堂巩固

正余弦定理简单应用

9. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B 所对的边长分别为 a, b . 若 $2a \sin B = \sqrt{3}b$, 则角 A 等于 ().

A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

【答案】 D

【解析】 由 $2a \sin B = \sqrt{3}b$, 得 $2 \sin A \sin B = \sqrt{3} \sin B$, $\therefore \triangle ABC$ 为锐角三角形, 故 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 $A = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$. 又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 故 $A = \frac{\pi}{3}$.

【标注】 【知识点】 边角互化 (利用正弦定理)

10. 在 $\triangle ABC$ 中, $A:B:C=4:1:1$, 则 $a:b:c$ 等于() .

A. $4:1:1$

B. $2:1:1$

C. $\sqrt{2}:1:1$

D. $\sqrt{3}:1:1$

【答案】 D

【解析】 由 $A:B:C=4:1:1$ 且 $A+B+C=\pi$, 得 $A=\frac{2\pi}{3}$, $B=\frac{\pi}{6}$, $C=\frac{\pi}{6}$, 所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin B=\frac{1}{2}$, $\sin C=\frac{1}{2}$.

又由 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ 得, $a:b:c=\sqrt{3}:1:1$.

【标注】 【知识点】 边角互化(利用正弦定理)

11. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 且 $(2a+c)\cos B+b\cos C=0$, 角 B 的值为() .

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】 C

【解析】 $(2a+c)\cos B+b\cos C=0$,

$$\therefore 2\sin A\cos B+\sin C\cos B+\sin B\cos C=0,$$

$$\therefore 2\sin A\cos B+\sin(B+C)=0,$$

$$\therefore 2\sin A\cos B+\sin A=0,$$

$$\because A\in(0^\circ, 180^\circ),$$

$$\therefore \sin A>0,$$

$$\therefore 2\cos B=-1,$$

$$\therefore \cos B=-\frac{1}{2},$$

$$\therefore B=120^\circ.$$

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角; 正弦定理; 和差角公式化简求值综合运用; 两角和与差的正弦

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\cos A=\frac{1}{2}$, $a=\sqrt{3}$, 则 $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$ 等于() .

A. 2

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】 A

【解析】 $\because 0<A<\pi$,

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{由正弦定理可得 } \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A} = 2.$$

故选A.

【标注】 【知识点】边角互化（利用正弦定理）

13. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，向量 $\vec{m}, \vec{n}$ 满足 $\vec{m} = (\sqrt{3}b - c, \cos C)$ ， $\vec{n} = (a, \cos A)$ ， $\vec{m} // \vec{n}$ ，则 $\cos A$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】 $\because \vec{m} // \vec{n}$,

$$\therefore (\sqrt{3}b - c) \cos A - a \cos C = 0,$$

再由正弦定理得

$$\sqrt{3} \sin B \cos A = \sin C \cos A + \cos C \sin A,$$

$$\therefore \sqrt{3} \sin B \cos A = \sin(C + A) = \sin B,$$

$$\text{即 } \cos A = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【标注】 【知识点】坐标表示平面向量的共线；坐标表示平面向量的垂直；正弦定理

知两角和任一边，求其他边角

14. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $BC = 3\sqrt{2}$ ，则 $AC =$ () .

A. $4\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】 B

【解析】 由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}$ ，即 $\frac{3\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ}$ ，所以 $AC = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3}$.

故选B.

【标注】 【知识点】AAS类三角形（利用正弦定理）

知两边和其中一边对角，求其他边和角

15. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $a = 1$ ， $b = \sqrt{3}$ ， $A = 30^\circ$ ，则角 B 等于 () .

A. 60° 或 120° B. 30° 或 150° C. 60° D. 120° **【答案】** A**【解析】** $\because \triangle ABC$ 中, $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $A = 30^\circ$, $\therefore$ 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

$$\text{得: } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

 $\because a < b$, $\therefore A < B$,则 $B = 60^\circ$ 或 120° ,

故选A.

【标注】 【素养】数学运算**【知识点】** SSA类三角形 (利用正弦定理)

16. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin B + \sin A(\sin C - \cos C) = 0$, $a = 2$, $c = \sqrt{2}$, 则 $C =$ ().

A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$ **【答案】** B**【解析】** $\sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$, $\therefore \sin B + \sin A(\sin C - \cos C) = 0$, $\therefore \sin A \cos C + \cos A \sin C + \sin A \sin C - \sin A \cos C = 0$, $\therefore \cos A \sin C + \sin A \sin C = 0$, $\because \sin C \neq 0$, $\therefore \cos A = -\sin A$, $\therefore \tan A = -1$, $\because \frac{\pi}{2} < A < \pi$, $\therefore A = \frac{3\pi}{4}$,由正弦定理可得 $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$, $\therefore \sin C = \frac{c \sin A}{a}$, $\therefore a = 2$, $c = \sqrt{2}$,

$$\therefore \sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2},$$

 $\because a > c$,

$$\therefore C = \frac{\pi}{6} .$$

故选B .

【标注】 【知识点】 正弦定理；正余弦定理综合求解边角

二、余弦定理

1. 知识讲解

(1)余弦定理的内容

三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的二倍，即在

$\triangle ABC$ 中，

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA , \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB , \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC . \end{cases}$$

(2) 余弦定理的变形

$$\begin{cases} cosA = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} , \\ cosB = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} , \\ cosC = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} . \\ b^2 + c^2 - a^2 = 2bccosA , \\ a^2 + c^2 - b^2 = 2accosB , \\ a^2 + b^2 - c^2 = 2abcosC . \end{cases}$$

2. 例题精讲

余弦定理的简单运用

17. 已知 $\triangle ABC$ 中， $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab$ ，那么角C的大小是（ ） .

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】 A

【解析】 由题可知 $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab$ ，

$$\therefore \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} = \sqrt{3} ,$$

$$cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

又 $\because$ 角C为 $\triangle ABC$ 的内角，

$$\therefore C = \frac{\pi}{6} .$$

故选A .

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角；余弦定理

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a^2 - b^2 = \sqrt{3}bc$, $\sin C = 2\sqrt{3}\sin B$, 则 A 角大小为 _____ .

【答案】 $\frac{\pi}{6}$

【解析】 $\because \sin C = 2\sqrt{3}\sin B$,

$$\therefore c = 2\sqrt{3}b,$$

$$\therefore a^2 - b^2 = \sqrt{3}bc = \sqrt{3}b \cdot 2\sqrt{3}b = 6b^2,$$

$$\therefore a^2 = 7b^2, \text{ 即 } a = \sqrt{7}b,$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + 12b^2 - 7b^2}{2b \cdot 2\sqrt{3}b} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 且 } A \in (0, \pi), \\ \therefore A &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 余弦定理；正弦定理

19. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对应的边为 a, b, c , 且 $a\sin A + c\sin C - b\sin B = \sqrt{2}a\sin C$, 则 $\cos B$ 的值为 _____ .

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】 由正弦定理知 $a^2 + c^2 - b^2 = \sqrt{2}ac$,

$$\text{由余弦定理知 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{2}ac}{2ac} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【标注】 【知识点】 边角互化 (利用余弦定理)

【素养】 数学运算

知三边, 求三个角

20. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 4, b = 5, c = 6$, 则 $\frac{\sin 2A}{\sin C} =$ _____ .

【答案】 1

$$\begin{aligned} \text{【解析】 方法一: } & \frac{\sin 2A}{\sin C} \\ &= \frac{2\sin A \cos A}{\sin C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2a}{c} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\
 &= \frac{4}{6} \times \frac{25 + 36 - 16}{30} \\
 &= \frac{90}{90} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

方法二：由余弦定理可得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 36 - 16}{2 \times 5 \times 6} = \frac{3}{4}$ ，

由正弦定理和二倍角公式可得， $\frac{\sin 2A}{\sin C} = \frac{2 \sin A \cos A}{\sin C} = 2 \cos A \frac{a}{c} = 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = 1$ 。

故答案为：1。

【标注】 【知识点】余弦定理

21. 在 $\triangle ABC$ 中，已知三个内角 A, B, C 满足 $\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 5 : 4$ ，则 $\cos B = (\quad)$ 。

A. $\frac{9}{16}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{5\sqrt{7}}{16}$

D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

【答案】 A

【解析】 由 $\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 5 : 4$ 结合正弦定理可得 $a : b : c = 6 : 5 : 4$ ，

设 $a = 6x (x > 0)$ ，则 $b = 5x$ ， $c = 4x$ ，

$$\text{所以 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{36x^2 + 16x^2 - 25x^2}{2 \cdot 6x \cdot 4x} = \frac{9}{16}.$$

故选A。

【标注】 【知识点】边角互化（利用正弦定理）；SSS类三角形（利用余弦定理）

22. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a = 8$ ， $b = 7$ ， $\cos C = \frac{13}{14}$ ，则最大角的余弦值是（ ）。

A. $-\frac{1}{5}$

B. $-\frac{1}{6}$

C. $-\frac{1}{7}$

D. $-\frac{1}{8}$

【答案】 C

【解析】 因为在 $\triangle ABC$ 中， $a = 8$ ， $b = 7$ ， $\cos C = \frac{13}{14}$ ，

$$\text{所以由余弦定理可得：} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 8^2 + 7^2 - 2 \times 8 \times 7 \times \frac{13}{14} = 9，$$

所以 $c = 3$ ，

因为 $a > b > c$ ，

所以 $A > B > C$ ，

所以 $\triangle ABC$ 最大的角为 A ，

$$\text{由余弦定理可得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 3^2 - 8^2}{2 \times 7 \times 3} = -\frac{1}{7}.$$

故选C。

【标注】 【知识点】 求角相关的最值或范围问题；SAS类三角形（利用余弦定理）

🗣 知两边和它们夹角，求其他边角

23. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $a = 2, B = \frac{\pi}{6}, c = 2\sqrt{3}$ ，则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2

【解析】 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2^2 + (2\sqrt{3})^2 - b^2}{2 \times 2 \times 2\sqrt{3}} ,$$

$$\therefore b = 2 .$$

故答案为：2 .

24. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = \frac{\pi}{4}, AB = \sqrt{2}, BC = 3$ ，则 $\sin \angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【解析】 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC = 5, AC = \sqrt{5}$,

$$\therefore \sin \angle BAC = \frac{BC}{AC} \sin \angle ABC = \frac{3\sqrt{10}}{10} .$$

【标注】 【知识点】 余弦定理；正余弦定理综合求解边角

3. 课堂巩固

🗣 余弦定理的简单运用

25. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ ，则 A 等于（ ） .

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{2\pi}{3}$

【答案】 D

【解析】 $\because a^2 = b^2 + c^2 + bc$,

$$\text{又} \because a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A ,$$

$$\therefore \cos A = -\frac{1}{2} ,$$

$$\therefore A = 120^\circ .$$

故选D .

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角；余弦定理

26. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，若 $a^2 = 2b^2$ ， $\sin C = \sqrt{3} \sin B$ ，则 $\cos A =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】 $\because a^2 = 2b^2$,

$$\therefore a = \sqrt{2}b,$$

$$\text{又} \because \sin C = \sqrt{3} \sin B,$$

$$\therefore c = \sqrt{3}b,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$2b^2 = b^2 + 3b^2 - 2\sqrt{3}b^2 \cos A,$$

$$2\sqrt{3}b^2 \cos A = 2b^2,$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角；余弦定理

27. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，且 $a \cos B = (\sqrt{2}c - b) \cos A$ ，则角 A 的大小为 () .

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】 B

【解析】 $a \cos B = (\sqrt{2}c - b) \cos A$

$$a \cos B + b \cos A = \sqrt{2}c \cdot \cos A$$

$$a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \sqrt{2}c \cdot \cos A$$

$$c = \sqrt{2} \cos A \cdot c$$

$$\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$A = \frac{\pi}{4}.$$

故选B.

【标注】 【知识点】 边角互化（利用余弦定理）

 知三边，求三个角

28. 在 $\triangle ABC$ 中， $a = 5$ ， $b = 8$ ， $c = 7$ ，则 $\cos C =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】由余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, $\therefore \cos C = \frac{1}{2}$.
故答案为: $\frac{1}{2}$.

【标注】 【知识点】 余弦定理; 正余弦定理综合求解边角

29. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 7 : 8$, 则 $\angle B = (\quad)$.

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】 C

【解析】 $\because \sin A : \sin B : \sin C = 5 : 7 : 8$,

$\therefore a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 5 : 7 : 8$,

设 $a = 5k$, $b = 7k$, $c = 8k (k > 0)$,

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{25k^2 + 64k^2 - 49k^2}{2 \times 5k \times 8k} = \frac{1}{2},$$

$\because 0 < B < \pi$,

$$\therefore B = \frac{\pi}{3}.$$

故选C.

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角

30. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 6$, $b = 7$, $\cos C = \frac{5}{7}$, 则最大内角的余弦值是 ____.

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 36 + 49 - 2 \times 6 \times 7 \times \frac{5}{7} = 25$, 故 $c = 5$.

$\therefore$ 最大边为 b , 最大角为 B , $\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{5}$.

【标注】 【知识点】 SSS类三角形 (利用余弦定理); SAS类三角形 (利用余弦定理)

 知两边和它们夹角, 求其他边角

31. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{2}$, $A = \frac{\pi}{3}$, 则边 c 的值为 ().

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3} + 1$

【答案】 B

【解析】 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,
 $\therefore \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{\sin B}{\frac{1}{2}}$,

$\therefore \sin B = \frac{1}{2}$,

$\therefore b < a$,

$\therefore \angle B = \angle A = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore B = 30^\circ$,

$\therefore C = 90^\circ$,

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 6 + 2 = 8$,

$\therefore c = 2\sqrt{2}$.

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角；正弦定理

32. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $a = 1, c = 2\sqrt{2}, B = 45^\circ$ ，则 $\sin C = (\quad)$.

A. $\frac{4}{41}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{4\sqrt{41}}{41}$

【答案】 C

【解析】 $\therefore b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,

$\therefore b^2 = 1 + 8 - 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore b^2 = 9 - 4 = 5$,

$\therefore b = \sqrt{5}$,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$,

$8 = 1 + 5 - 2\sqrt{5} \cos C$,

$\therefore \cos C = \frac{-1}{\sqrt{5}}$,

又 $\therefore C \in (0, \pi)$,

$\therefore \sin C > 0$,

$\therefore \sin C = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$,

故选C .

【标注】 【知识点】 SAS类三角形（利用余弦定理）

三、 三角形的面积公式

1. 知识讲解

$$(1) S = \frac{1}{2} \text{底} \times \text{高}$$

$$(2) S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$(3) S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B+C)} = \frac{b^2 \sin C \sin A}{2 \sin(C+A)} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin(A+B)}$$

$$(4) S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \quad (R \text{ 为外接圆半径})$$

$$(5) S = \frac{abc}{4R}$$

$$(6) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \left(p = \frac{1}{2}(a+b+c)\right); \quad (\text{海伦公式})$$

2. 例题精讲

面积公式应用

33. 在 $\triangle ABC$ 中, $B = 30^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 () .

A. $2\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}$ 或 $4\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}$

【答案】 D

【解析】 由余弦定理可得: $2^2 = (2\sqrt{3})^2 + a^2 - 2 \times 2\sqrt{3}a \cos 30^\circ$,

$$\therefore a^2 - 6a + 8 = 0.$$

解得 $a = 2$ 或 4 .

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \sqrt{3} \text{ 或 } 2\sqrt{3}.$$

故选: D.

【标注】 【知识点】 三角形面积公式

34. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 若 $c^2 = (a-b)^2 + 6$, $C = \frac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ____ .

【答案】 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【解析】 $\because c^2 = (a-b)^2 + 6$,

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab + 6 \text{ 即 } a^2 + b^2 - c^2 = 2ab - 6,$$

$$\text{由余弦定理知 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2ab - 6}{2ab} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore ab = 6,$$

$$\therefore \text{三角形 } ABC \text{ 的面积为 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

【标注】 【知识点】余弦定理；三角形面积公式

35. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $b = 1$, $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, 求 $\frac{a+2b+c}{\sin A + 2\sin B + \sin C} = (\quad)$.
- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ C. 2 D. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$

【答案】 D

【解析】 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin 60^\circ = \frac{1}{2}c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $c = 4$,

利用余弦定理, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ = 13$, $a = \sqrt{13}$,

利用正弦定理, $\frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{39}}{3}$,

根据合分比性质 $\frac{a+2b+c}{\sin A + 2\sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{2\sqrt{39}}{3}$.

故选D.

【标注】 【知识点】正余弦定理综合求解边角；三角形面积公式

36. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 面积为 S , 且 $4S = (a+b)^2 - c^2$, 则 $\cos C = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 0

【解析】 $\because 4S = (a+b)^2 - c^2$, $S = \frac{1}{2}ab \sin C$,

$$\therefore 2ab \sin C = (a+b)^2 - c^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 + 2ab - 2ab \sin C = c^2 \text{ ①},$$

$$\text{又} \because a^2 + b^2 - 2ab \cos C = c^2 \text{ ②},$$

$$\therefore \text{①} - \text{②}, 2ab - 2ab \sin C + 2ab \cos C = 0,$$

$$\therefore \cos C - \sin C + 1 = 0,$$

$$\therefore \cos C = 0.$$

故答案为: 0.

【标注】 【知识点】三角形面积公式

37. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , $\cos 2A + 3 \cos A = 1$, $b = 5$, $\triangle ABC$ 的面积 $S = 5\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $9 + \sqrt{21}$

【解析】 $\cos 2A + 3 \cos A = 1$,

即为 $2\cos^2 A + 3\cos A - 2 = 0$,

解得 $\cos A = \frac{1}{2}$ (-2 舍去),

$$\sin A = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{由 } S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times 5c \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3},$$

解得 $c = 4$,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 25 + 16 - 2 \times 5 \times 4 \times \frac{1}{2} = 21,$$

解得 $a = \sqrt{21}$,

可得 $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{21} + 5 + 4 = 9 + \sqrt{21}$.

故答案为: $9 + \sqrt{21}$.

【标注】 【知识点】余弦定理; 解三角形的实际应用

38. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $\sin B \sin C = \sqrt{3} \sin A$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $a + b = 3\sqrt{3}$, 则 $c =$ ().

A. $\sqrt{21}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{21}$ 或 $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{21}$ 或 3

【答案】 D

【解析】 $\because \sin A \sin C = \sqrt{3} \sin A$,

$$\therefore b \sin C = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore \sin C = \frac{\sqrt{3}a}{b},$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C,$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{\sqrt{3}a}{b},$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2,$$

$$\therefore a = \sqrt{3},$$

$$\text{又 } \because a + b = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore b = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \sin C = \frac{\sqrt{3}a}{b} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore C = 60^\circ \text{ 或 } 120^\circ,$$

$$\text{① } C = 60^\circ,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

$$c^2 = 3 + 12 - 2 \times \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2},$$

$$c^2 = 15 - 6 = 9,$$

$$\therefore c = 3.$$

$$\textcircled{2} C = 120^\circ ,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C ,$$

$$c^2 = 3 + 12 - 2 \times \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) ,$$

$$c^2 = 21 ,$$

$$\therefore c = \sqrt{21} .$$

故选D .

【标注】 【知识点】余弦定理；正余弦定理综合求解边角

39. 已知 $\triangle ABC$ 的三边分别为 a, b, c ，且 $a = 1, B = 45^\circ, S_{\triangle ABC} = 2$ ，则 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径为（ ） .

A. $4\sqrt{3}$

B. 5

C. $5\sqrt{2}$

D. $6\sqrt{2}$

【答案】 C

【解析】 由题设可知：

在 $\triangle ABC$ 中， $a = 1, B = 45^\circ, S_{\triangle ABC} = 2$ ，

则利用 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = 2$ ，

解得 $c = 4\sqrt{2}$ ，

又利用余弦定理可知，

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B ,$$

$$\text{即 } b^2 = 1^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \times 1 \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 25 ,$$

解得 $b = 5$ ，

故由正弦定理可知， $\frac{b}{\sin B} = 2R = d$ ，

$$\text{即 } \frac{5}{\sin B} = 5\sqrt{2} = 2R = d ,$$

即 $\triangle ABC$ 的外接圆直径为 $5\sqrt{2}$ ，

故选C .

【标注】 【知识点】正弦定理；余弦定理；正余弦定理综合求解边角

面积最值问题

40. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边， $a = 2$ ，且 $(2+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$ ，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 _____ .

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 由 $a = 2$ 知, $(a+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$,

由正弦定理得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$,

由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$, $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $b^2 + c^2 - bc = a^2 = 4 \geq 2bc - bc = bc$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A \leq \sqrt{3}$.

则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

【标注】 【知识点】 三角形面积公式

41. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\frac{2a-c}{b} = \frac{\cos C}{\cos B}$, $b = 4$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 ().

A. $4\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{3}$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{2a-c}{b} = \frac{\cos C}{\cos B}$,

$\therefore (2a-c)\cos B = b\cos C$,

$\therefore (2\sin A - \sin C)\cos B = \sin B\cos C$,

$\therefore 2\sin A\cos B = \sin C\cos B + \sin B\cos C = \sin(B+C) = \sin A$,

约掉 $\sin A$ 可得 $\cos B = \frac{1}{2}$, 即 $B = \frac{\pi}{3}$,

由余弦定理可得 $16 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = a^2 + c^2 - ac \geq 2ac - ac$,

$\therefore ac \leq 16$, 当且仅当 $a = c$ 时取等号,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}ac \leq 4\sqrt{3}$.

故选 A.

【标注】 【知识点】 求面积最值或范围问题

42. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $b = 2\sqrt{2}$ 且 $\triangle ABC$ 面积为 $S = \frac{\sqrt{3}}{12}(b^2 - a^2 - c^2)$, 则 $\angle B =$ _____, $\triangle ABC$ 面积 S 的最大值为 _____.

【答案】 150° ; $4 - 2\sqrt{3}$

【解析】 (1) $S = \frac{\sqrt{3}}{12}(b^2 - a^2 - c^2)$,

$S = \frac{\sqrt{3}}{12}(-2ac\cos B)$,

$$\frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{12}(-2ac \cos B),$$

$$\therefore \tan B = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore B = 150^\circ.$$

$$(2) b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$8 = (a+c)^2 - 2ac - 2ac\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$8 = (a+c)^2 - (2-\sqrt{3})ac,$$

$$\therefore (2-\sqrt{3})ac + 8 = (a+c)^2 \geq 4ac,$$

$$\therefore (2+\sqrt{3})ac \leq 8,$$

$$\therefore ac \leq \frac{8}{2+\sqrt{3}} = 8(2-\sqrt{3}),$$

$$S = \frac{1}{2}ac \sin B \leq \frac{1}{2} \cdot 8(2-\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} = 4-2\sqrt{3}.$$

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角；余弦定理

3. 课堂巩固

面积公式应用

43. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $a = 3\sqrt{2}$ ， $b = 2\sqrt{3}$ ， $\cos C = \frac{1}{3}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为（ ）.

A. $3\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】 C

【解析】 $\because \cos C = \frac{1}{3},$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{又} \because a = 3\sqrt{2}, b = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{3}.$$

故选：C.

【标注】 【知识点】 三角形面积公式

44. 已知 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，若 $\cos B = \frac{1}{4}$ ， $b = 2$ ， $\sin C = 2 \sin A$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为（ ）.

A. $\frac{\sqrt{15}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

D. $\sqrt{15}$

【答案】 B

【解析】 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore ac = 2a^2 + 2c^2 - 2b^2 \text{ ①},$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\text{结合已知 } \sin C = 2 \sin A,$$

$$\therefore c = 2a,$$

$$\therefore b = 2,$$

$$\therefore \text{联立①式解得 } a = 1, c = 2,$$

$$\text{又 } \therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

故选B.

【标注】 【知识点】 三角形面积公式

45. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $a = 6\sqrt{3}$ ， $b = 12$ ， $S_{\triangle ABC} = 18\sqrt{3}$ ，则 $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 12；6

$$\text{【解析】 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A,$$

$$\text{即 } 18\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 12 \times c \cdot \sin 60^\circ,$$

解得 $c = 6$.

$$\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12.$$

【标注】 【素养】 数学运算；逻辑推理

【知识点】 三角形面积公式；边角互化（利用正弦定理）

46. 已知 $\triangle ABC$ 中，三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $\triangle ABC$ 的面积为 S ，且 $2S = (a+b)^2 - c^2$ ，则 $\tan C = (\quad)$.

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $-\frac{4}{3}$

D. $-\frac{3}{4}$

【答案】C

【解析】由 $2S = (a+b)^2 - c^2$ ，得 $2S = a^2 + b^2 + 2ab - c^2$ ，

$$\text{即 } 2 \times \frac{1}{2} ab \sin C = a^2 + b^2 + 2ab - c^2,$$

$$\text{所以 } ab \sin C - 2ab = a^2 + b^2 - c^2,$$

$$\text{所以 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c}{2ab} = \frac{ab \sin C - 2ab}{2ab} = \frac{\sin C}{2} - 1,$$

$$\text{所以 } \cos C + 1 = \frac{2ab \sin C}{2ab} = \sin C, \text{ 即 } 2\cos^2 \frac{C}{2} = \sin C \cos \frac{C}{2},$$

$$\text{因为 } \cos \frac{C}{2} \neq 0, \text{ 所以 } \tan \frac{C}{2} = 2,$$

$$\text{所以 } \tan C = \frac{2 \tan \frac{C}{2}}{1 - \tan^2 \frac{C}{2}} = \frac{2 \times 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}.$$

故选C.

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角

47. 在 $\triangle ABC$ 中， $a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3}{2}b$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = a \sin C$ ，则 $a + c$ 的值为_____.

【答案】4

$$\text{【解析】 } \because S = \frac{1}{2} ab \sin C,$$

$$\therefore a \sin C = \frac{1}{2} ab \sin C,$$

$$\therefore b = 2,$$

$$\therefore a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = 3,$$

$$\therefore a(\cos C + 1) + c(\cos A + 1) = 6,$$

$$\therefore a \cos C + c \cos A + a + c = 6,$$

$$\therefore a \cos C + c \cos A = b = 2,$$

$$\therefore a + c = 4.$$

【标注】 【知识点】 三角形面积公式；二倍角的余弦

48. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $\triangle ABC$ 的周长为7，面积为 $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ ， $\cos C = -\frac{1}{8}$ ，则 $c =$ _____.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

$$\text{【解析】 } \because \cos C = -\frac{1}{8},$$

又 $\because \angle C \in (0^\circ, 180^\circ)$,

$$\therefore \sin C > 0,$$

利用 $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$,

$$\therefore \sin C = \frac{3\sqrt{7}}{8},$$

$$\frac{1}{2}ab \sin C = S,$$

$$\frac{1}{2}ab \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{4},$$

$$ab = 4,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab - 2ab \cos C,$$

$$c^2 = (7-c)^2 - 8 + 1,$$

$$\therefore c^2 = 49 - 14c + c^2 - 7,$$

$$\therefore 14c = 42,$$

$$c = 3.$$

故选C.

【标注】 【知识点】余弦定理；正余弦定理综合求解边角；三角形面积公式

49. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 对边分别为 a 、 b 、 c , $A = 60^\circ$, $b = 1$, 这个三角形的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 外接圆的直径是().

A. $\sqrt{39}$

B. $\frac{\sqrt{39}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{39}}{6}$

D. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$

【答案】 D

【解析】 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{3}$ 且 $b = 1$, $A = 60^\circ$,

$$\therefore c = 4,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 13,$$

$$\therefore a = \sqrt{13},$$

$$\therefore 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{2\sqrt{39}}{3}.$$

【标注】 【知识点】三角形外接圆相关问题；SAS类三角形（利用余弦定理）

最值问题

50. 在 $\triangle ABC$ 中, a , b , c 分别为内角 A , B , C 的对边, $a + c = 4$, $(2 - \cos A)\tan \frac{B}{2} = \sin A$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 ____ .

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 在 $\triangle ABC$ 中, $\therefore (2 - \cos A) \tan \frac{B}{2} = \sin A$, $\therefore (2 - \cos A) \cdot \frac{\sin B}{1 + \cos B} = \sin A$,

即 $2\sin B = \sin A + \sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin A + \sin C$,

$$\therefore 2b = a + c = 4, \therefore b = 2.$$

$$\therefore a + c = 4, \therefore a = 4 - c.$$

$$\therefore S = \sqrt{3(3-a)(3-b)(3-c)} = \sqrt{3(3-c)(c-1)}.$$

$$\therefore (3-c)(c-1) \leq \left(\frac{3-c+c-1}{2}\right)^2 = 1,$$

$$\therefore S \leq \sqrt{3}.$$

故答案为: $\sqrt{3}$.

【标注】 【知识点】 解三角形的实际应用

51. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\frac{2a+b}{c} = \frac{\cos(A+C)}{\cos C}$, $c = 2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 ().

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

D. $2\sqrt{3}$

【答案】 A

【解析】 $\frac{2a+b}{c} = \frac{\cos(A+C)}{\cos C} = \frac{-\cos B}{\cos C}$,

$$\therefore 2a \cos C + b \cos C = C(-\cos B),$$

$$\therefore 2 \sin A \cos C + \sin B \cos C + \sin C \cos B = 0,$$

$$\therefore 2 \sin A \cos C + \sin(B+C) = 0,$$

$$\therefore 2 \sin A \cos C + \sin A = 0.$$

$$\therefore A \in (0, \pi),$$

$$\therefore \sin A = 0,$$

$$\therefore 2 \cos C + 1 = 0,$$

$$\therefore \cos C = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore C = 120^\circ,$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

$$\therefore 4 = a^2 + b^2 + ab,$$

$$\therefore 4 = (a+b)^2 - ab,$$

$$\therefore ab + 4 = (a+b)^2 \geq 4ab,$$

$$\therefore ab \leq \frac{4}{3},$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$= \frac{1}{2}ab \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

故选A .

【标注】 【知识点】 正弦定理；正余弦定理综合求解边角；余弦定理；三角形面积公式