

正余弦定理及面积公式

一、正余弦定理

1. 知识讲解

(1) 正弦定理的内容

在一个三角形中, 各边和它所对角的正弦的比相等, 即在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径).

(2) 正弦定理的变形

$$\textcircled{1} a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C ;$$

$$\textcircled{2} a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C ;$$

$$\textcircled{3} \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} ;$$

$$\textcircled{4} a \sin B = b \sin A, c \sin B = b \sin C, c \sin A = a \sin C ;$$

$$\textcircled{5} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B} = \frac{a+c}{\sin A + \sin C} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} .$$

2. 例题精讲

正弦定理的简单运用

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b = 2a \sin B$, 则 A 等于() .

A. 30° 或 60°

B. 45° 或 60°

C. 30° 或 150°

D. 120° 或 60°

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $A : B : C = 1 : 2 : 3$, 则 $a : b : c$ 等于() .

A. $1 : 2 : 3$

B. $3 : 2 : 1$

C. $1 : \sqrt{3} : 2$

D. $2 : \sqrt{3} : 1$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 若 $2c \cos C = b \cos A + a \cos B$, 则 $\angle C$ 的值为() .

A. $\frac{2\pi}{3}$

B. $\frac{5\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{6}$

D. $\frac{\pi}{3}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $a = \sqrt{13}$, 则 $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$ 等于() .

A. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$

C. $\frac{26\sqrt{3}}{3}$

D. $2\sqrt{3}$

5. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c . 向量 $\vec{m} = (a, b+c)$,

$\vec{n} = (\sqrt{3} \sin C + \cos C, -1)$, 若 $\vec{m} \perp \vec{n}$, 则 $A =$ () .

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

知两角和任一边，求其他边和角

6. 在 $\triangle ABC$ 中， $A = 30^\circ$ ， $C = 105^\circ$ ， $b = 8$ ，则 $a = ()$.

- A. 4 B. $4\sqrt{5}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{2}$

知两边和其中一边对角，求其他边和角

7. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A = 60^\circ$ ， $a = 6$ ， $b = 2\sqrt{3}$ ，则 $B = ()$.

- A. 30° B. 60° C. 30° 或 150° D. 60° 或 120°

8. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $a = \sqrt{2}$ ， $b = 2$ ， $\sin B + \cos B = \sqrt{2}$ ，则角 A 的大小为 $()$.

- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

3. 课堂巩固

正余弦定理简单应用

9. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B 所对的边长分别为 a, b . 若 $2a \sin B = \sqrt{3}b$ ，则角 A 等于 $()$.

- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

10. 在 $\triangle ABC$ 中， $A : B : C = 4 : 1 : 1$ ，则 $a : b : c$ 等于 $()$.

- A. $4 : 1 : 1$ B. $2 : 1 : 1$ C. $\sqrt{2} : 1 : 1$ D. $\sqrt{3} : 1 : 1$

11. 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边，且 $(2a + c) \cos B + b \cos C = 0$ ，角 B 的值为 $()$.

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

12. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $\cos A = \frac{1}{2}$ ， $a = \sqrt{3}$ ，则 $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$ 等于 $()$.

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

13. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，向量 $\vec{m}, \vec{n}$ 满足 $\vec{m} = (\sqrt{3}b - c, \cos C)$ ， $\vec{n} = (a, \cos A)$ ， $\vec{m} // \vec{n}$ ，则 $\cos A$ 的值为 _____ .

知两角和任一边，求其他边角

14. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $BC = 3\sqrt{2}$ ，则 $AC = ()$.

- A. $4\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

知两边和其中一边对角，求其他边和角

15.

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a=1, b=\sqrt{3}, A=30^\circ$, 则角 B 等于 () .

- A. 60° 或 120° B. 30° 或 150° C. 60° D. 120°

16. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin B + \sin A(\sin C - \cos C) = 0, a=2, c=\sqrt{2}$, 则 $C=(\quad)$.

- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

二、余弦定理

1. 知识讲解

(1)余弦定理的内容

三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的二倍, 即在 $\triangle ABC$ 中,

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC. \end{cases}$$

(2)余弦定理的变形

$$\begin{cases} cosA = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \\ cosB = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \\ cosC = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 + c^2 - a^2 = 2bccosA, \\ a^2 + c^2 - b^2 = 2accosB, \\ a^2 + b^2 - c^2 = 2abcosC. \end{cases}$$

2. 例题精讲

余弦定理的简单运用

17. 已知 $\triangle ABC$ 中, $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab$, 那么角 C 的大小是 () .

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a^2 - b^2 = \sqrt{3}bc, \sin C = 2\sqrt{3}\sin B$, 则 A 角大小为 _____ .

19. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对应的边为 a, b, c , 且 $a\sin A + c\sin C - b\sin B = \sqrt{2}a\sin C$, 则 $\cos B$ 的值为 _____ .

知三边, 求三个角

20. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=4$, $b=5$, $c=6$, 则 $\frac{\sin 2A}{\sin C} = \underline{\hspace{2cm}}$.

21. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知三个内角 A, B, C 满足 $\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 5 : 4$, 则 $\cos B = (\quad)$.

- A. $\frac{9}{16}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{5\sqrt{7}}{16}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

22. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a=8$, $b=7$, $\cos C = \frac{13}{14}$, 则最大角的余弦值是 $(\quad)$.

- A. $-\frac{1}{5}$ B. $-\frac{1}{6}$ C. $-\frac{1}{7}$ D. $-\frac{1}{8}$

知两边和它们夹角, 求其他边角

23. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a=2$, $B=\frac{\pi}{6}$, $c=2\sqrt{3}$, 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

24. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 3$, 则 $\sin \angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 课堂巩固

余弦定理的简单运用

25. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a^2 = b^2 + c^2 + bc$, 则 A 等于 $(\quad)$.

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

26. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $a^2 = 2b^2$, $\sin C = \sqrt{3} \sin B$. 则 $\cos A = \underline{\hspace{2cm}}$.

27. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $a \cos B = (\sqrt{2}c - b) \cos A$, 则角 A 的大小为 $(\quad)$.

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

知三边, 求三个角

28. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=5$, $b=8$, $c=7$, 则 $\cos C = \underline{\hspace{2cm}}$.

29. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 7 : 8$, 则 $\angle B = (\quad)$.

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

30. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=6$, $b=7$, $\cos C = \frac{5}{7}$, 则最大内角的余弦值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

知两边和它们夹角, 求其他边角

31. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{2}$, $A=\frac{\pi}{3}$, 则边 c 的值为 $(\quad)$.

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}+1$

32. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a=1$, $c=2\sqrt{2}$, $B=45^\circ$, 则 $\sin C = (\quad)$.

- A. $\frac{4}{41}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{41}}{41}$

三、三角形的面积公式

1. 知识讲解

$$(1) S = \frac{1}{2} \text{底} \times \text{高}$$

$$(2) S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$(3) S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B+C)} = \frac{b^2 \sin C \sin A}{2 \sin(C+A)} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin(A+B)}$$

$$(4) S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \quad (R \text{ 为外接圆半径})$$

$$(5) S = \frac{abc}{4R}$$

$$(6) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \left(p = \frac{1}{2}(a+b+c)\right); \quad (\text{海伦公式})$$

2. 例题精讲

面积公式应用

33. 在 $\triangle ABC$ 中, $B = 30^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 () .

A. $2\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}$ 或 $4\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}$

34. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 若 $c^2 = (a-b)^2 + 6$, $C = \frac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____ .

35. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $b = 1$, $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, 求 $\frac{a+2b+c}{\sin A + 2 \sin B + \sin C} = ()$.

A. $\sqrt{3}$

B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

C. 2

D. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$

36. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 S , 且 $4S = (a+b)^2 - c^2$, 则 $\cos C =$ _____ .

37. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\cos 2A + 3 \cos A = 1$, $b = 5$, $\triangle ABC$ 的面积 $S = 5\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为 _____ .

38. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $\sin B \sin C = \sqrt{3} \sin A$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $a+b = 3\sqrt{3}$, 则 $c = ()$.

A. $\sqrt{21}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{21}$ 或 $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{21}$ 或3

39. 已知 $\triangle ABC$ 的三边分别为 a, b, c , 且 $a = 1$, $B = 45^\circ$, $S_{\triangle ABC} = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径为 () .

A. $4\sqrt{3}$

B. 5

C. $5\sqrt{2}$

D. $6\sqrt{2}$

面积最值问题

40. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边, $a = 2$, 且 $(2+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 _____ .
41. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\frac{2a-c}{b} = \frac{\cos C}{\cos B}$, $b = 4$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 () .
- A. $4\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{3}$
42. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $b = 2\sqrt{2}$ 且 $\triangle ABC$ 面积为 $S = \frac{\sqrt{3}}{12}(b^2 - a^2 - c^2)$, 则 $\angle B =$ _____, $\triangle ABC$ 面积 S 的最大值为 _____ .

3. 课堂巩固

面积公式应用

43. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = 3\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{3}$, $\cos C = \frac{1}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积 () .
- A. $3\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$
44. 已知 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $\cos B = \frac{1}{4}$, $b = 2$, $\sin C = 2\sin A$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 () .
- A. $\frac{\sqrt{15}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{2}$ D. $\sqrt{15}$
45. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $a = 6\sqrt{3}$, $b = 12$, $S_{\triangle ABC} = 18\sqrt{3}$, 则 $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} =$ _____, $c =$ _____ .
46. 已知 $\triangle ABC$ 中, 三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 且 $2S = (a+b)^2 - c^2$, 则 $\tan C =$ () .
- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. $-\frac{3}{4}$
47. 在 $\triangle ABC$ 中, $a\cos^2 \frac{C}{2} + c\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3}{2}b$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = a\sin C$, 则 $a+c$ 的值为 _____ .
48. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 的周长为7, 面积为 $\frac{3\sqrt{7}}{4}$, $\cos C = -\frac{1}{8}$, 则 $c =$ _____ .
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
49. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 对边分别为 a, b, c , $A = 60^\circ$, $b = 1$, 这个三角形的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 外接圆的直径是 () .
- A. $\sqrt{39}$ B. $\frac{\sqrt{39}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{39}}{6}$ D. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$

最值问题

50. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, $a+c=4$, $(2-\cos A)\tan \frac{B}{2} = \sin A$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 _____ .
51. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\frac{2a+b}{c} = \frac{\cos(A+C)}{\cos C}$, $c=2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 () .
- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ D. $2\sqrt{3}$