

三角形形状判断与解三角形

一、三角形解的个数

1. 知识讲解

已知三角形的两边和其中一边的对角，不能唯一确定三角形的形状，解这类三角形问题将出现无解、一解和两解三种情况，应分情况予以讨论。

在 $\triangle ABC$ 中，已知 a ， b 和 $\angle A$ 时，解的情况如下：

①从代数角度分析

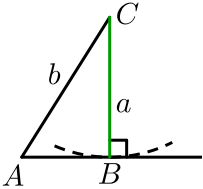
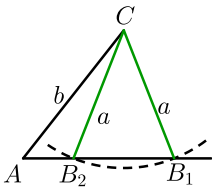
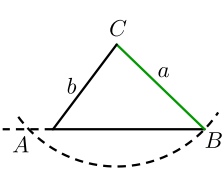
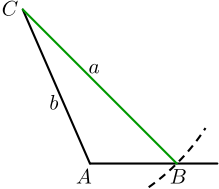
i. 若 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} > 1$ ，则满足条件的三角形的个数为0，即无解；

ii. 若 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = 1$ ，则满足条件的三角形的个数为1；

iii. 若 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} < 1$ ，则满足条件的三角形的个数为1或2.

显然由 $0 < \sin B = \frac{b \sin A}{a} < 1$ 可得 $\angle B$ 有两个值，一个为钝角一个为锐角，考虑到“大边对大角”“三角形内角和等于 180° ”等，此时需进行讨论。

②从几何角度分析

	$\angle A$ 为锐角			$\angle A$ 为钝角或直角
图形				
关系式	$a = b \sin A$	$b \sin A < a < b$	$a \geq b$	$a > b$
解的个数	一解	两解	一解	一解

上表中若 $\angle A$ 为锐角，当 $a < b \sin A$ 时无解；若 $\angle A$ 为钝角或直角，当 $a \leq b$ 时无解。

2. 例题精讲

1. 在 $\triangle ABC$ 中， $A = 60^\circ$ ， $a = \sqrt{13}$ ， $b = 4$ ，则满足条件的 $\triangle ABC$ 的解的个数为（ ）。

- A. 一个 B. 两个 C. 无解 D. 不能确定

【答案】B

【解析】 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $a = \sqrt{13}$ ， $b = 4$ ，

$\therefore$ 由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ，得： $13 = 16 + c^2 - 8c \cos 60^\circ$ ，

得： $c^2 - 4c + 3 = 0$ ，(*)

$\because \Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$ ，且两根之和、两根之积都为正数，

$\therefore$ 方程(*)有两个不相等的正实数根，即有两个边 c 满足题中的条件。

由此可得满足条件的 $\triangle ABC$ 有两个解。

故选B。

【标注】【知识点】余弦定理

2. 下列条件判断三角形解的情况，正确的是()。

A. $a = 8$ ， $b = 16$ ， $A = 30^\circ$ ，有两解

B. $b = 18$ ， $c = 20$ ， $B = 60^\circ$ ，有一解

C. $a = 15$ ， $b = 2$ ， $A = 90^\circ$ ，无解

D. $a = 40$ ， $b = 30$ ， $A = 120^\circ$ ，有一解

【答案】D

【解析】A选项：由正弦定理 $\sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{16}{8} \sin 30^\circ = 1$ ，故 $B = 90^\circ$ 是唯一解，故A错误；

B选项：由正弦定理 $\sin C = \frac{c}{b} \sin B = \frac{20}{18} \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{9} > \sin B$ ， $c > b$ ，此时 C 可以是钝角或锐角，有两解，故B错误；

C选项：由于正弦定理 $\sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{2}{15}$ ， $a > b$ ，故 B 只能是锐角，有一解，故C错误；

D选项：由正弦定理 $\sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ ， $a > b$ ，此时 B 只能是锐角，有一解，故D正确。

故选D。

【标注】【知识点】正弦定理；正余弦定理综合求解边角

3. 如果满足条件 $B = 60^\circ$ ， $b = 12$ 的 $\triangle ABC$ 有且只有一个，则 a 的范围是()。

A. $0 < a \leq 12$

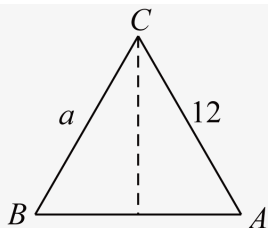
B. $12 < a < 8\sqrt{3}$

C. $0 < a \leq 12$ 或 $a = 8\sqrt{3}$

D. $12 < a \leq 8\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】



由题意可得当 $k \sin 60^\circ = 12$ 或 $12 \geq k$ 时，满足三角形恰有一个，

解得 $k = \frac{12}{\sin 60^\circ} = 8\sqrt{3}$ ， $0 < a \leq 12$ 。

故选C。

【标注】 【知识点】 三角形解的个数判断

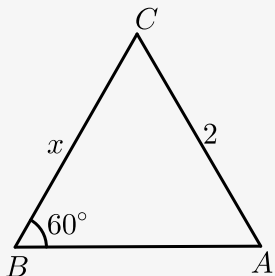
4. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $a = x, b = 2, B = 60^\circ$ ，如果 $\triangle ABC$ 有两解，则 x 的取值范围为 _____。

【答案】 $2 < x < \frac{4}{3}\sqrt{3}$

【解析】 $\because \triangle ABC$ 有两解，

$$\therefore x \sin 60^\circ < 2 < x,$$

$$\therefore 2 < x < \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$



【标注】 【知识点】 正弦定理；解三角形的实际应用

3. 课堂巩固

5. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b = 6, c = 10, B = 30^\circ$ ，则解此三角形的结果有 ()。

A. 无解 B. 一解 C. 两解 D. 一解或两解

【答案】 C

【解析】 由正弦定理知 $\sin C = \frac{c \cdot \sin B}{b} = \frac{5}{6}$ ，又由 $c > b > c \sin B$ 知，C 有两解。也可依已知条件，画出 $\triangle ABC$ ，由图知有两解。

【标注】 【知识点】 三角形解的个数判断

6. 不解三角形，下列判断中不正确的是（ ）.

A. $a = 7, b = 14, A = 30^\circ$ ，有两解

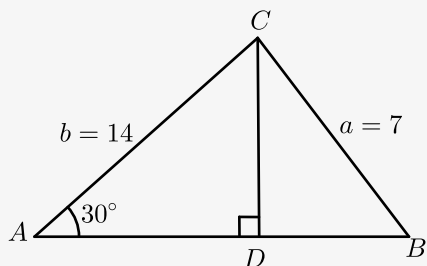
B. $a = 30, b = 25, A = 150^\circ$ ，有一解

C. $a = 6, b = 9, A = 45^\circ$ ，无解

D. $b = 9, c = 10, B = 60^\circ$ ，有两解

【答案】 A

【解析】 A 选项：



$$\therefore CD = 14 \sin 30^\circ = 7,$$

$$\therefore \text{又} \because BC = CD,$$

$\therefore$ 唯一解，故A错误；

$$\text{B 选项：} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

$$\frac{30}{\sin 150^\circ} = \frac{25}{\sin B},$$

$$\therefore \sin B = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{2} = \sin 30^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle A = 150^\circ,$$

$\therefore \angle B$ 必为锐角，

$$\text{又} \because \sin B < \sin 30^\circ,$$

$$\therefore B < 30^\circ,$$

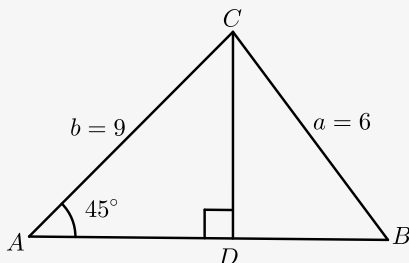
$\therefore \angle B$ 只有一解，

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$$

$$= 30^\circ - \angle B \text{ 也唯一确定，}$$

$\therefore$ 唯一解，故B正确；

C 选项：



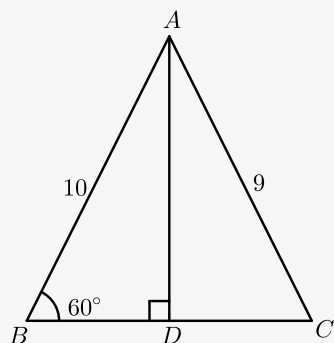
$$CD = 9 \sin 45^\circ = \frac{9}{2} \sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{9}{2} \sqrt{2} > 6,$$

$\therefore CB < CD$,

$\therefore$ 无解, 故C正确;

D选项:



$$AD = 10 \sin 60^\circ = 5\sqrt{3},$$

$$\therefore 5\sqrt{3} < 9 < 10,$$

$$\therefore AD < AC < AB,$$

$\therefore$ 有2解, 故D正确.

故选 A.

【标注】 【知识点】正弦定理; 正余弦定理综合求解边角

7. 若满足条件 $C = 60^\circ$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = a$ 的 $\triangle ABC$ 有两个, 那么 a 的取值范围是 ().

A. $(1, \sqrt{2})$

B. $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

C. $(\sqrt{3}, 2)$

D. $(1, 2)$

【答案】 C

【解析】 根据正弦定理可 $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$, 代入已知条件可求得 $\sin A = \frac{a}{2}$, 因为 $C = 60^\circ$, 若满足有两个三角形 ABC , 则 $60^\circ < a < 120^\circ$, 即 $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{a}{2} < 1$, 所以 $a \in (\sqrt{3}, 2)$. 故选 C.

【标注】 【知识点】三角形解的个数判断

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = x$, $AC = 2$, $\angle B = 45^\circ$, 若满足条件的三角形有两个解, 则 x 的取值范围是 ().

A. $(0, 2)$

B. $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

C. $(2, 2\sqrt{2})$

D. $(2, 2\sqrt{3})$

【答案】 C

【标注】 【知识点】三角形解的个数判断

二、判断三角形形状

1. 知识讲解

在 $\triangle ABC$ 中,

1. 由余弦定理知: 在 $\triangle ABC$ 中, 若:

① $a^2 + b^2 = c^2$, 则 $\angle C$ 是直角;

② $a^2 + b^2 < c^2$, 则 $\angle C$ 是钝角;

③ $a^2 + b^2 > c^2$, 则 $\angle C$ 是锐角.

2. 若 $\sin 2A = \sin 2B$, 则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形 ($a = b$) 或直角三角形 ($\angle C = \frac{\pi}{2}$).

3. 若:

① $\sin A = \cos B$, 则 $\angle C = \frac{\pi}{2}$;

② $\sin A > \cos B$, 则 $\angle C < \frac{\pi}{2}$;

③ $\sin A < \cos B$, 则 $\angle C > \frac{\pi}{2}$;

上述三个结论的证明有一定的难度, 有勇气的读者不妨一试.

2. 例题精讲

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c , 若 $a \sin A + b \sin B < c \sin C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ().

A. 锐角三角形

B. 钝角三角形

C. 直角三角形

D. 不确定

【答案】 B

【解析】 根据正弦定理 $a \sin A + b \sin B < c \sin C$, 可转换为 $a^2 + b^2 < c^2$, $\therefore \triangle ABC$ 的形状是钝角三角形.

【标注】 【知识点】利用正弦定理判断三角形形状

10. 若在 $\triangle ABC$ 中, 有 $a = 2b \cos C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ____.

【答案】 等腰三角形

【解析】 将 $a = 2b \cos C$, 利用正弦定理化简得: $\sin A = 2 \sin B \cos C$,
 $\therefore \sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C = 2 \sin B \cos C$,
 $\therefore \sin B \cos C - \cos B \sin C = \sin(B - C) = 0$,

$\therefore B$ 与 C 为三角形内角,

$\therefore B - C = 0$, 即 $B = C$,

故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

【标注】 【知识点】利用正弦定理判断三角形形状

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $c - a \cos B = (2a - b) \cos A$,

则 $\triangle ABC$ 的形状是 ().

- A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 等腰直角三角形 D. 等腰或直角三角形

【答案】 D

【解析】 两边同除 $2R$,

$$\sin C - \sin A \cos B = (2 \sin A - \sin B) \cos A,$$

$$\sin(A + B) - \sin A \cos B + \cos A \sin B - 2 \sin A \cos A = 0,$$

$$2 \cos A \sin B - 2 \sin A \cos A = 0,$$

$$2 \cos A (\sin B - \sin A) = 0,$$

$$\therefore \sin A = \sin B \text{ 或 } \cos A = 0,$$

$\therefore \triangle ABC$ 等腰或直角三角形.

故选D.

【标注】 【知识点】利用正弦定理判断三角形形状

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状一定是 ().

- A. 正三角形 B. 直角三角形 C. 等腰三角形 D. 等腰直角三角形

【答案】 B

【解析】 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\therefore \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c},$$

$$\therefore \frac{1 + \cos A}{2} = \frac{\sin B + \sin C}{2 \sin C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin B}{\sin C} + \frac{1}{2},$$

$$\therefore 1 + \cos A = \frac{\sin B}{\sin C} + 1,$$

$$\text{即 } \cos A = \frac{\sin B}{\sin C},$$

$$\therefore \cos A \sin C = \sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C,$$

$$\therefore \sin A \cos C = 0, \therefore \sin A \neq 0,$$

$$\therefore \cos C = 0,$$

$\therefore C$ 为直角.

故选B.

【标注】 【知识点】 正弦定理；两角和与差的正弦；和差角公式化简求值综合运用

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\sin C}{c}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是().
- A. 有一内角为 30° 的直角三角形 B. 等腰直角三角形
C. 有一内角为 30° 的等腰三角形 D. 等边三角形

【答案】 B

【解析】 由 $\frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ 和正弦定理知,
 $\frac{\cos A}{2R \sin A} = \frac{\cos B}{2R \sin B} = \frac{\sin C}{2R \sin C} = \frac{1}{2R}$ (R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径),
 $\therefore \begin{cases} \cos A = \sin A, \\ \cos B = \sin B, \end{cases} \therefore \angle A = \angle B = 45^\circ, \therefore \angle C = 90^\circ.$
 $\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形. 故选B.

【标注】 【知识点】 正弦定理

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 满足 $\tan A \cdot \tan B > 1$, 则这个三角形是().
- A. 正三角形 B. 等腰三角形 C. 锐角三角形 D. 钝角三角形

【答案】 C

【解析】 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, 满足 $\tan A \cdot \tan B > 1$,
 $\therefore A, B$ 都是锐角, $\tan A > 0, \tan B > 0$,
再由 $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} < 0$,
可得 $A+B$ 为钝角, 故由三角形内角和公式可得 C 为锐角.
综上可得这个三角形是锐角三角形.
故选C.

【标注】 【知识点】 利用三角恒等变换判断三角形形状

3. 课堂巩固

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是().
- A. 钝角三角形 B. 直角三角形 C. 锐角三角形 D. 不能确定

【答案】 A

【解析】 方法一： $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$,

则 $a^2 + b^2 < c^2$,

则 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0$,

又 $C \in (0, \pi)$,

$\therefore C \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,

$\therefore \triangle ABC$ 是钝角三角形 .

故选 A .

方法二： 由 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$, 得

$a^2 + b^2 < c^2$, 即 $a^2 + b^2 - c^2 < 0$.

又 $\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, 故 $\cos C < 0$.

又 $0 < C < \pi$, 故 $\frac{\pi}{2} < C < \pi$,

$\therefore \triangle ABC$ 是钝角三角形 .

【标注】 【知识点】 余弦定理；正弦定理

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a \cos B = b \cos A$, 且 $a = b \sin C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 () .

A. 锐角三角形

B. 钝角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 不确定

【答案】 C

【解析】 $\therefore a \cos B = b \cos A$,

$\therefore \sin A \cos B - \sin B \cos A = 0$,

$\therefore \sin(A - B) = 0$,

$\therefore A = B$,

又 $\therefore a = b \sin C$,

$\therefore \sin A = \sin B \sin C$,

$\therefore \sin C = 1$,

$\therefore C = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形 .

【标注】 【知识点】 利用正弦定理判断三角形形状

17.

在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是内角 A, B, C 所对的边, 若 $b \cos C + c \cos B = a \sin A$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 ().

- A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 锐角三角形

【答案】 B

【解析】 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\therefore b \cos C + c \cos B = a \sin A,$$

$$\therefore \sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin(B+C) = \sin A = \sin^2 A,$$

$$\therefore \sin A \neq 0,$$

$$\therefore \sin A = 1,$$

$$\therefore \text{由于} A \text{为三角形内角, 可得} A = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{就直角三角形.}$$

故选B.

【标注】 【知识点】 解三角形的实际应用; 正余弦定理综合判断三角形形状

18. $\triangle ABC$ 中, $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{c-b}{2c}$ (a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边), 则 $\triangle ABC$ 的形状为 ().

- A. 直角三角形 B. 正三角形 C. 等腰直角三角形 D. 等腰三角形

【答案】 A

【解析】 $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{c-b}{2c}$, 由降幂公式及正弦定理得

$$\frac{1 - \cos A}{2} = \frac{\sin C - \sin B}{2 \sin C} \text{ 即 } \sin C - \sin C \cos A = \sin C - \sin B.$$

$$\therefore \sin B = \sin C \cos A, \text{ 又 } \sin B = \sin(A+C),$$

$$\therefore \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C.$$

$$\text{即 } \sin A \cos C = 0, \text{ 又 } \sin A > 0, A \in (0, \pi)$$

$$\therefore \cos C = 0, \therefore C = \frac{\pi}{2}. \text{ 为直角三角形.}$$

【标注】 【知识点】 两角和与差的正弦

19. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$, 则 $\triangle ABC$ 是 ().

- A. 等边三角形 B. 有一个角是 30° 的直角三角形
C. 等腰直角三角形 D. 有一个是 30° 的等腰三角形

【答案】C

【解析】 $\because \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$,
 $\therefore \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin C}{\cos C}$,
 $\therefore \sin B \cos C - \sin C \cos B = 0$,
 $\therefore \sin(B - C) = 0$,
 $\therefore B = C$,
 $\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos B}$,
 $\therefore \frac{\sin A}{\sin A} = \frac{\cos B}{\cos B}$,
 $\therefore \tan B = 1$,
 $\therefore B = \frac{\pi}{4}$,
 $\therefore C = \frac{\pi}{4}$,
 $\therefore A = \pi - B - C = \frac{\pi}{2}$,
 $\therefore$ 为等腰直角三角形 .
故选C .

【标注】 【知识点】 正弦定理；正余弦定理综合判断三角形形状

20. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\cos A \cos B > \sin A \sin B$ ，则 $\triangle ABC$ 一定为（ ） .

- A. 等边三角形 B. 直角三角形 C. 锐角三角形 D. 钝角三角形

【答案】D

【解析】 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\cos A \cos B > \sin A \sin B$,
 $\therefore \cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos(A + B) = -\cos C > 0$,
 $\therefore \cos C < 0$,
 $\therefore C$ 为 $\triangle ABC$ 的内角 ,
 $\therefore \frac{\pi}{2} < C < \pi$,
 $\therefore \triangle ABC$ 为钝角三角形 .
故选D .

【标注】 【知识点】 正弦定理

三、几何问题

1. 知识讲解

综合利用正余弦定理可以推导出三角形的一些相关有趣的结论，这些结论不但好玩儿，而且应用在某些题目中会起到意想不到的效果。

在 $\triangle ABC$ 中，请读者证明下面结论：

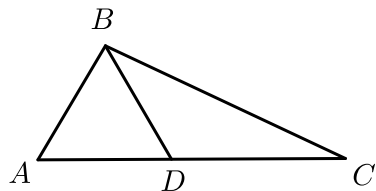
1. 射影公式： $a = b \cos C + c \cos B$ ， $b = a \cos C + c \cos A$ ， $c = a \cos B + b \cos A$ ；

2. 记 BC 、 AC 、 AB 边上的中线分别为 m_a 、 m_b 、 m_c ，应用余弦定理证明：

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}, m_b = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}{2}, m_c = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{2}.$$

2. 例题精讲

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是边 AC 上的点，且 $AB = AD$ ， $2AB = \sqrt{3}BD$ ， $BC = 2BD$ ，则 $\sin C$ 的值为（ ）。



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

【答案】 D

【解析】 设 $AB = c$ ，则 $AD = c$ ， $BD = \frac{2c}{\sqrt{3}}$ ， $BC = \frac{4c}{\sqrt{3}}$ ，

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理的变形得 $\cos A = \frac{c^2 + c^2 - \frac{4}{3}c^2}{2c^2} = \frac{1}{3}$ ，

则 $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得：

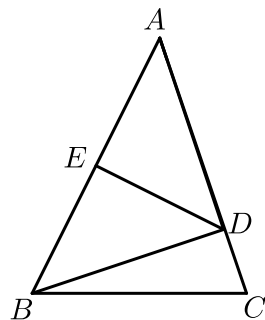
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{\frac{4c}{\sqrt{3}}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}},$$

解得 $\sin C = \frac{\sqrt{6}}{6}$ ，

故选D。

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角；多个三角形拼接的解三角形问题

22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $C = \frac{\pi}{3}$ ， $BC = 4$ ，点 D 在边 AC 上， $AD = DB$ ， $DE \perp AB$ ， E 为垂足，若 $DE = 2\sqrt{2}$ ，则 $\cos A =$ （ ）。



A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

【答案】 D

【解析】 $\because DE = 2\sqrt{2}$,

$$\therefore BD = AD = \frac{DE}{\sin A} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin A},$$

$$\because \angle BDC = 2\angle A,$$

$$\therefore \frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin C},$$

$$\therefore \frac{4}{\sin 2A} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin A} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3} \sin A},$$

$$\therefore \frac{4}{2 \sin A \cos A} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3} \sin A},$$

$$\because \sin A \neq 0,$$

$$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

故选D.

【标注】 【知识点】 二倍角的正弦；正余弦定理综合求解边角；正弦定理

3. 课堂巩固

23. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 中点, $\angle BAD = 45^\circ$, $\angle CAD = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, 则 $AD = (\quad)$.

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

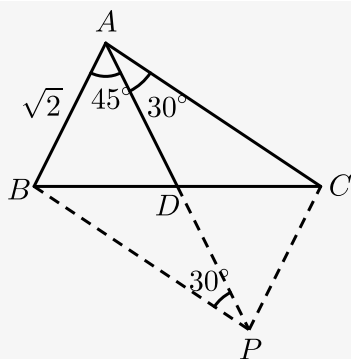
B. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

【答案】 B

【解析】 补全平行四边形 $ABPC$,



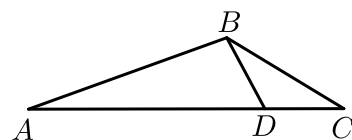
$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AP}{\sin 105^\circ},$$

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2} AP = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

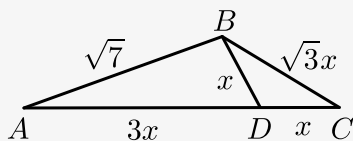
【标注】 【知识点】 正弦定理；正余弦定理综合求解边角

24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AC 上，且 $AD = 3DC$ ， $AB = \sqrt{7}$ ， $\angle ADB = \frac{\pi}{3}$ ， $\angle C = \frac{\pi}{6}$ ，则 $DC =$ _____； $\tan \angle ABC =$ _____.



【答案】 $1; -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】



$$\because \angle ADB = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \angle DBC + \angle C = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{又} \because \angle C = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore \angle DBC = \frac{\pi}{6} = \angle C,$$

$$\text{设 } DC = x,$$

$$\therefore BD = x,$$

$$\text{又} \because \angle BDC = 120^\circ,$$

$$\therefore BC = \sqrt{3}x,$$

$$AD = 3DC = 3x,$$

$$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C,$$

$$7 = 3x^2 + 16x^2 - 8\sqrt{3}x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

$$\therefore 7 = 19x^2 - 12x^2 ,$$

$$\therefore x = 1 ,$$

$$\therefore DC = 1 ;$$

$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC ,$$

$$16 = 7 + 3 - 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \cos \angle ABC ,$$

$$\therefore \cos \angle ABC = -\frac{3}{\sqrt{21}} ,$$

$$\text{又} \because \angle ABC \in (0, \pi) ,$$

$$\therefore \sin \angle ABC > 0 ,$$

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} ,$$

$$\therefore \tan \angle ABC = -\frac{2\sqrt{3}}{3} .$$

【标注】 【知识点】 余弦定理；正余弦定理综合求解边角；同角三角函数的基本关系式