

平面向量综合

一、平面向量综合应用

🔗 基底法

1. 例题精讲

1. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为2, $\angle DAB = 60^\circ$, 点 E, F 分别为 BC, CD 的中点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} = (\quad)$.

A. 3

B. 1

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{3}{2}$

【答案】D

【解析】点 E 为 BC 的中点,

所以 $\overrightarrow{AE}$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD},$$

点 F 为 CD 的中点,

所以 $\overrightarrow{BF}$

$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

$$= \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

可得 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$

$$= \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|^2,$$

因为菱形 $ABCD$ 的边长为2,

所以 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = 2$, 又因为 $\angle DAB = 60^\circ$,

可得 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4} \vec{AB} \cdot \vec{AD} \\
&= \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ \\
&= \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

故选：D .

【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题；平面向量数量积运算（非坐标）；向量的数量积的定义；平面向量的加法运算及运算规则

2. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为1的等边三角形，点 D 、 E 分别是边 AB 、 BC 的中点，连接 DE 并延长到点 F ，使得 $DE = 2EF$ ，则 $\vec{AF} \cdot \vec{BC}$ 的值为（ ）.

A. $-\frac{5}{8}$

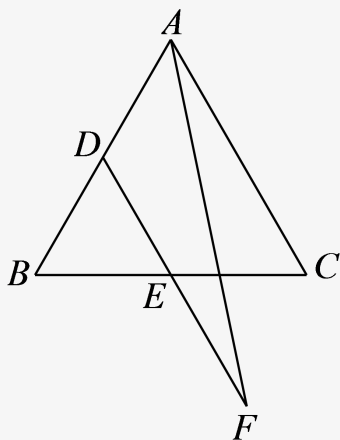
B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{11}{8}$

【答案】 C

【解析】 如图，



$\because D$ 、 E 分别是边 AB 、 BC 的中点，且 $DE = 2EF$ ，

$$\therefore \vec{AF} \cdot \vec{BC} = (\vec{AD} + \vec{DF}) \cdot \vec{BC} = \left(-\frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{3}{2}\vec{DE}\right) \cdot \vec{BC}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{3}{4}\vec{AC}\right) \cdot \vec{BC}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{3}{4}\vec{BC} - \frac{3}{4}\vec{BA}\right) \cdot \vec{BC}$$

$$= \left(-\frac{5}{4}\vec{BA} + \frac{3}{4}\vec{BC}\right) \cdot \vec{BC}$$

$$= -\frac{5}{4}\vec{BA} \cdot \vec{BC} + \frac{3}{4}\vec{BC}^2$$

$$= -\frac{5}{4}|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cos 60^\circ + \frac{3}{4} \times 1^2$$

$$= -\frac{5}{4} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{8}.$$

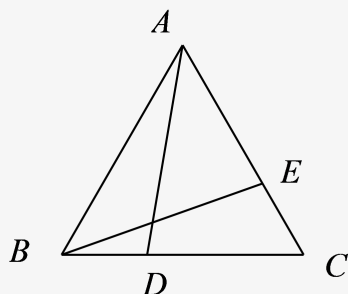
故选C .

【标注】【知识点】向量的数量积的定义

3. 在边长为1的正三角形 ABC 中, 设 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA} = \lambda\overrightarrow{CE}$, 若 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}$, 则 λ 的值为().
- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\frac{1}{3}$ D. 3

【答案】D

【解析】由题意画出图象如图：



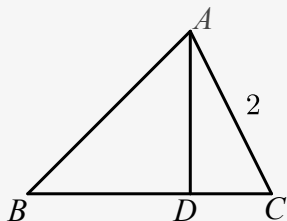
$$\begin{aligned} \because \overrightarrow{BC} &= 2\overrightarrow{BD}, \\ \therefore D &\text{为 } BC \text{ 的中点, 则 } \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \\ \because \overrightarrow{CA} &= \lambda\overrightarrow{CE}, \\ \therefore \overrightarrow{CE} &= \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AC}, \\ \text{则 } \overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB} = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \\ \because \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} &= -\frac{1}{4}, \\ \therefore \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right] &= -\frac{1}{4}, \\ \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} &= -\frac{1}{2} \\ \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AC}^2 &= -\frac{1}{2}, \\ \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} - 1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) &= -\frac{1}{2}, \\ \text{解得 } \lambda &= 3, \\ \text{故选: D.} \end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, $|\overrightarrow{AC}| = 2$, $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, $|\overrightarrow{AD}| = \frac{\sqrt{37}}{3}$, 则 $|\overrightarrow{AB}| =$ ____ ; 设 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} (\lambda \in \mathbf{R})$, 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = 4$, 则 λ 的值为 ____ .

【答案】3; $\frac{27}{11}$

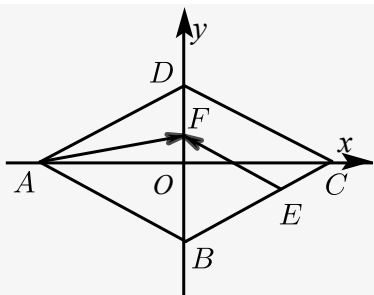
【解析】



$$\begin{aligned}
 &\because \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}, \\
 &\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \\
 &\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \\
 &\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}, \\
 &\overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \\
 &\frac{37}{9} = \frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \angle A, \\
 &\frac{21}{9} = \frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{4}{9} \times |\overrightarrow{AB}| \times 2 \times \frac{1}{2}, \\
 &\therefore 21 = |\overrightarrow{AB}|^2 + 4|\overrightarrow{AB}|, \\
 &\therefore |\overrightarrow{AB}|^2 + 4|\overrightarrow{AB}| - 21 = 0, \\
 &(|\overrightarrow{AB}| + 7)(|\overrightarrow{AB}| - 3) = 0, \\
 &\text{又} \because |\overrightarrow{AB}| > 0, \\
 &\therefore |\overrightarrow{AB}| = 3, \\
 &\therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = 4, \\
 &\therefore \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot (\lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 4, \\
 &\therefore -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AC}^2 + \left(\frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4, \\
 &\therefore -\frac{1}{3} \times 3^2 + \frac{2}{3}\lambda \cdot 4 + \left(\frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{3}\right) \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 4, \\
 &\therefore -3 + \frac{8}{3}\lambda + \lambda - 2 = 4, \\
 &\frac{11}{3}\lambda = 9, \\
 &\lambda = \frac{27}{11}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】向量的模；平面向量数量积的运算律；利用向量数量积求模长；线性运算和数量积综合问题

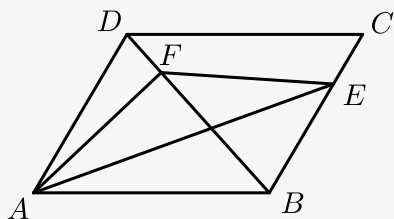
5. 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ， $AB = AD = 2$ ，若 M 、 N 分别是边 AD 、 BC 上的动点，满足 $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AD}$ ， $\overrightarrow{BN} = (1 - \lambda)\overrightarrow{BC}$ ，其中 $\lambda \in (0, 1)$ ，若 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} = -2$ ，则 λ 的值为 _____。



$$\begin{aligned} \therefore A(-\sqrt{3}, 0), E\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{3}\right), \text{ 设 } F(0, t), \\ \text{ 则 } \overrightarrow{AF} = (\sqrt{3}, t), \overrightarrow{EF} = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, t + \frac{1}{3}\right), \\ \therefore \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EF} = -2 + t\left(t + \frac{1}{3}\right) = t^2 + \frac{1}{3}t - 2, \\ \text{ 当 } t = -\frac{1}{6} \text{ 时, } \left(\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EF}\right)_{\min} = \frac{1}{36} - \frac{1}{18} - 2 = -\frac{73}{36}. \end{aligned}$$

故选D.

方法二:



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}. \\ \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}. \\ \therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} &= -\frac{2}{3}, \\ \left(\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) &= -\frac{2}{3}, \\ \therefore \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= -\frac{2}{3}, \\ \frac{2}{3} \times |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos A &= -\frac{2}{3}, \\ \frac{2}{3} \times 4 - 4 + \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \cos A &= -\frac{2}{3}, \end{aligned}$$

$$8 - 12 + 4 \cos A = -2,$$

$$\cos A = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle A = 60^\circ.$$

$$\text{ 设 } \overrightarrow{BF} = \lambda \overrightarrow{BD}, \lambda \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \\ &= \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AB} + \lambda(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\ &= (1 - \lambda)\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

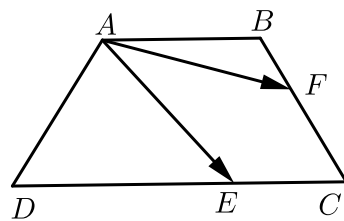
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \lambda\overrightarrow{BD} \\
&= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \lambda(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\
&= \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AD} - \lambda\overrightarrow{AB}. \\
\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EF} &= \left[(1-\lambda)\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AD}\right] \cdot \left[\left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AD} - \lambda\overrightarrow{AB}\right] \\
&= -\lambda(1-\lambda)\overrightarrow{AB}^2 + \lambda\left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AD}^2 + \left[(1-\lambda)\left(\lambda - \frac{2}{3}\right) - \lambda^2\right]\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\
&= -4\lambda(1-\lambda) + 4\lambda\left(\lambda - \frac{2}{3}\right) + \left[\lambda - \frac{2}{3} - \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda - \lambda^2\right] \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} \\
&= -4\lambda + 4\lambda^2 + 4\lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda + 2\left(-2\lambda^2 + \frac{5}{3}\lambda - \frac{2}{3}\right) \\
&= -4\lambda + 8\lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda - 4\lambda^2 + \frac{10}{3}\lambda - \frac{4}{3} \\
&= 4\lambda^2 - \frac{10}{3}\lambda - \frac{4}{3} \\
&= 4\left(\lambda - \frac{5}{12}\right)^2 - 4 \times \frac{25}{144} - \frac{4}{3} \\
&\geq -\frac{25}{36} - \frac{4}{3} = -\frac{73}{36}.
\end{aligned}$$

故选D.

【标注】【知识点】数量积的坐标表达式；线性运算和数量积综合问题

2. 课堂巩固

7. 如图，已知四边形 $ABCD$ 是底角为 60° 的等腰梯形，其中 $AB \parallel CD$ ， $AD = 4$ ， $DC = 6$ ， $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{EC}$ ， $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{FB}$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的值为 _____.



【答案】 $\frac{28}{3}$

【解析】 $\because ABCD$ 是底角为 60° 的等腰梯形，

$$AB \parallel CD,$$

$$AD = 4, DC = 6,$$

$$\therefore \text{可求得: } AB = 2,$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC},$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \\
\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} &= \left(-\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right), \\
&= -\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= -4 \times 2 \times \cos 60^\circ - \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times \cos 120^\circ \\
&\quad + \frac{2}{3} \times 6 \times 2 \times \cos 0^\circ + \frac{2}{9} \times 6 \times 4 \times \cos 60^\circ \\
&= -4 + \frac{8}{3} + \frac{24}{3} + \frac{8}{3} = \frac{28}{3}, \\
\text{故答案为: } &\frac{28}{3}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律；线性运算和数量积综合问题

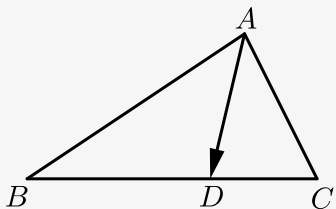
8. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 3$, $AC = 2$, 若 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$), 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = -4$, 则 λ 的值为 _____.

【答案】 $\frac{3}{11}$

【解析】 因为 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, 所以 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

, 因为 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, 且 $\angle A = 60^\circ$, $AB = 3$, $AC = 2$, 所以

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} \\
&= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot (\lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\
&= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AC}^2 + \left(\frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= -\frac{1}{3} \times 9 + \frac{2}{3}\lambda \times 4 + \left(\frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{3}\right) \times 3 \times 2 \times \frac{1}{2} \\
&= -3 + \frac{8}{3}\lambda + \lambda - 2 \\
&= -4, \\
&\text{解得 } \lambda = \frac{3}{11}.
\end{aligned}$$



【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量数量积的运算律

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $AC = 3$, $\angle BAC = 120^\circ$, D 是 BC 中点, E 在边 AC 上, $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}$, 则 $|\overrightarrow{AD}| =$ _____, λ 的值为 _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{3}$

【解析】 $\because D$ 为 BC 中点，

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{4} \times 2^2 + \frac{1}{4} \times 3^2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 + \frac{9}{4} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{7}{4},$$

$$\therefore |\overrightarrow{AD}| = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) \cdot (-\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2},$$

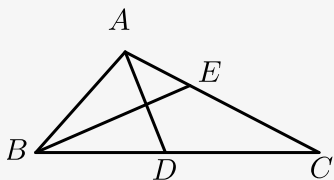
$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AC}^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2} \times 2^2 + \frac{1}{2}\lambda \times 3^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\right) \times 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$-2 + \frac{9}{2}\lambda - \frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$

$$-2 + 3\lambda = -1,$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{3}.$$



【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题；平面向量数量积的运算律

10. 直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = BC = 2$ ， $AD = 1$ ，对角线 AC 与 BD 交于点 M ，点

E 和 F 分别在线段 AM 和 BM 上，且 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AM}$ ， $\overrightarrow{BF} = (1 - \lambda) \overrightarrow{BM}$ ，若 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CF} = \frac{3}{4}$ ，则 $\lambda = ()$.

A. $\frac{1}{4}$

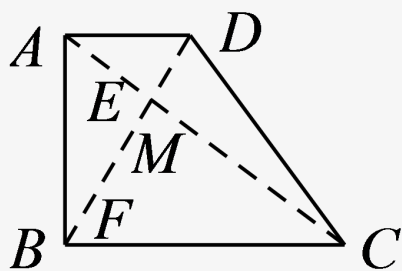
B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

【答案】 B

【解析】



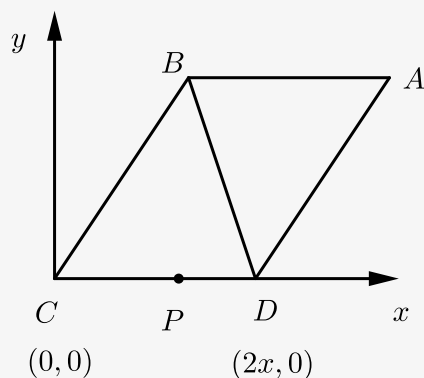
$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CF} &= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}), \\
 &= (\overrightarrow{DA} + \lambda \overrightarrow{AM}) \cdot \left[\overrightarrow{CB} + (1 - \lambda) \overrightarrow{BM} \right], \\
 &= \left(\overrightarrow{DA} + \frac{\lambda}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \right) \left[\overrightarrow{CB} + \frac{2(1 - \lambda)}{3} (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AD}) \right], \\
 &= \left[\left(\frac{\lambda}{3} - \frac{1}{2} \right) \overrightarrow{BC} + \frac{\lambda}{3} \overrightarrow{AB} \right] \left[\left(1 - \frac{1 - \lambda}{3} \right) \overrightarrow{CB} + \frac{2(1 - \lambda)}{3} \overrightarrow{BA} \right], \\
 &= \frac{3}{4}, \\
 \text{解得 } \lambda &= \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则；向量的数量积的定义；平面向量数量积的运算律；线性运算和数量积综合问题；线段的定比分点公式；向量分解中的待定系数法

11. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $DA = DB$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 5$, P 为线段 DC 上任意一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $-\frac{9}{4}$

【解析】 以 CD 方向为 x 轴, C 为原点建系.



$$\therefore C(0,0), D(2x,0), B(x,y), A(3x,y).$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2x, 0), \overrightarrow{AC} = (-3x, -y),$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6,$$

$$6x^2 = 6,$$

$$x = 1 \text{ 或 } -1 \text{ (舍)} .$$

$$\overrightarrow{AD} = (-x, -y) ,$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 5 ,$$

$$3x^2 + y^2 = 5 .$$

$$\therefore y = \sqrt{2} \text{ 或 } -\sqrt{2} \text{ (舍)} .$$

$$\text{设 } P(t, 0) , t \in [0, 2] .$$

$$\overrightarrow{PA} = (3-t, \sqrt{2}) ,$$

$$\overrightarrow{PC} = (-t, 0) ,$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = t^2 - 3t ,$$

$$= \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} ,$$

$$\geq -\frac{9}{4} .$$

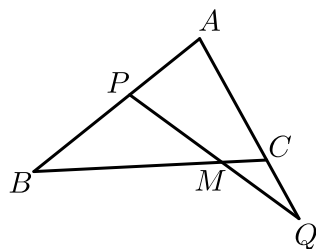
$$\text{当 } t = \frac{3}{2} \text{ 时“=”取得} .$$

【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；数量积的坐标表达式

利用三点共线

3. 例题精讲

12. 如图所示， $\triangle ABC$ 中，直线 PQ 与边 AB ， BC 及 AC 的延长线分别交于点 P ， M ， Q ， $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{MC}$ ， $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AQ} = s\overrightarrow{AC}$ ，则 $\frac{1}{t} + \frac{3}{s} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 4

【解析】 如图 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} ,$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{AQ} = s\overrightarrow{AC}$$

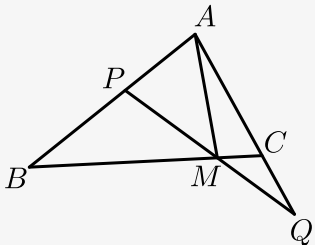
$$\therefore \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4t}\overrightarrow{AP} + \frac{3}{4s}\overrightarrow{AQ},$$

$\therefore P, M, Q$ 三点共线,

$$\therefore \frac{1}{4t} + \frac{3}{4s} = 1,$$

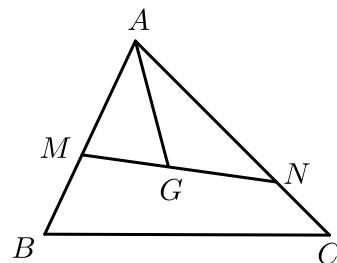
$$\therefore \frac{1}{t} + \frac{3}{s} = 4.$$

故答案为: 4.



【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则；平面向量中的三点共线问题

13. 如图所示, 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 过 G 作直线与 AB 、 AC 两边分别交于不同两点 M 、 N , 且 $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AC}$, 则 $x + y$ 的最小值为 _____.



【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】 延长 AG 交 BC 于 D ,

$\therefore G$ 为重心,

$\therefore D$ 为 BC 中点,

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{y}\overrightarrow{AN}\right)$$

$$= \frac{1}{3x}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{3y}\overrightarrow{AN},$$

$\therefore M, G, N$ 共线,

$$\therefore \frac{1}{3x} + \frac{1}{3y} = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3,$$

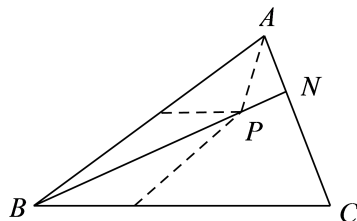
$$(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 + 1 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2 + 2 = 4,$$

$$\therefore x + y \geq \frac{4}{3}.$$

【标注】【知识点】平面向量中的三点共线问题；平面向量的加法运算及运算规则

4. 课堂巩固

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， N 为线段 AC 上靠近 A 的三等分点，点 P 在 BN 上且 $\overrightarrow{AP} = \left(m + \frac{2}{11}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{2}{11}\overrightarrow{BC}$ ，则实数 m 的值为（ ）.



- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{9}{11}$ D. $\frac{5}{11}$

【答案】D

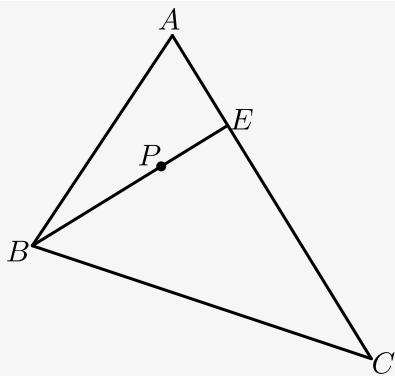
【解析】 $\because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ，
 $\therefore \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + \frac{2}{11}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{11}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{11}\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AB} + \frac{2}{11}\overrightarrow{AC}$.
 $\because N$ 为 AC 上三等分点，
 $\therefore \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN}$ ，
 $\therefore \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + \frac{6}{11}\overrightarrow{AN}$.
 $\because B, P, N$ 三点共线，
 $\therefore m + \frac{6}{11} = 1$ ，
 $\therefore m = \frac{5}{11}$.
 故选D.

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义

15. 在 $\triangle ABC$ 中， E 为线段 AC 上一点， $AC = 4AE$ ， P 为 BE 上一动点，若 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ ，且 $m > 0$ ， $n > 0$ ，则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值是（ ）.
- A. 12 B. 11 C. 10 D. 9

【答案】D

【解析】 $\because \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AB} + 4n\overrightarrow{AE}$ ，



$\therefore P, B, E$ 共线,

$$\therefore m + 4n = 1,$$

$$\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)(m + 4n)$$

$$= 1 + 4 + \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \geq 5 + 2\sqrt{4} = 9.$$

故选D.

【标注】【知识点】基本不等式的概念；利用基本不等式求最值；平面向量的加法运算及运算规则；平面向量中的三点共线问题；平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）

坐标法

5. 例题精讲

16. 已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形， $AB = 2$ ，设点 P, Q 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AQ} = (1 - \lambda) \overrightarrow{AC}$ ， $\lambda \in \mathbf{R}$ ，若

$$\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = -\frac{3}{2}, \text{ 则 } \lambda = ().$$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}$

D. $\frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

【答案】 A

【解析】 方法一： $\therefore \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB} = (1 - \lambda) \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$,

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC},$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = -\frac{3}{2}, \text{ 且 } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 2, \angle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} = 60^\circ,$$

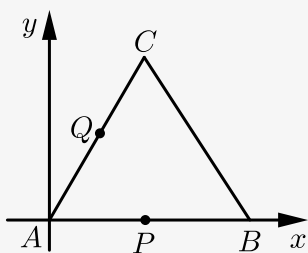
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = 2,$$

$$\therefore [(1 - \lambda) \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}] \cdot (\lambda \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = -\frac{3}{2},$$

$$\lambda |\overrightarrow{AB}|^2 + (\lambda^2 - \lambda - 1) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + (1 - \lambda) |\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore 4\lambda + 2(\lambda^2 - \lambda - 1) + 4(1 - \lambda) = \frac{3}{2}, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{2}.$$

方法二：以点 A 为坐标原点， AB 所在的直线为 x 轴，过点 A 且垂直于 AB 的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，



则 $A(0,0)$ ， $B(2,0)$ ， $C(1,\sqrt{3})$ ，

$\therefore \overrightarrow{AB} = (2,0)$ ， $\overrightarrow{AC} = (1,\sqrt{3})$ ，

又 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AQ} = (1-\lambda)\overrightarrow{AC}$ ，

$\therefore P(2\lambda,0)$ ， $Q(1-\lambda, \sqrt{3}(1-\lambda))$ ，

$\therefore \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = (-1-\lambda, \sqrt{3}(1-\lambda)) \cdot (2\lambda-1, -\sqrt{3}) = -\frac{3}{2}$ ，

化简得 $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ ，

$\therefore \lambda = \frac{1}{2}$ 。

【标注】【知识点】向量的数量积的定义

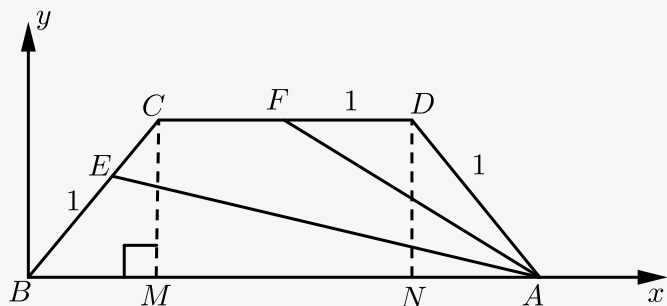
17. 等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB \parallel DC$ ， $BC = CD = 1$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，点 E ， F 分别在线段 BC 和 DC 上，且 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{4\lambda} \overrightarrow{DC}$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值为_____。

【答案】 $\frac{15}{8}$

【解析】 过 C 作 $CM \perp AB$ 交 AB 于 M ，

过 D 作 $DN \perp AB$ 交 AB 于 N 。

以 B 为原点， BA 方向为 x 轴， MC 方向为 y 轴。



$\therefore B(0,0)$ ，

$BM = BC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ，

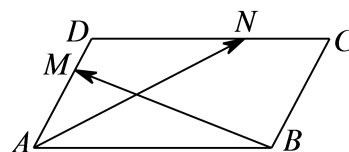
$MN = CD = 1$ ，

$NA = AD \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ，

$$\begin{aligned}
& A(2,0), \\
& C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\
& D\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\
& E\left(\frac{1}{2}\lambda, \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right), \\
& F\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4\lambda}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \\
& \therefore \overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{2}\lambda - 2, \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right), \\
& \overrightarrow{AF} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4\lambda}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\
& \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \left(\frac{1}{2}\lambda - 2\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4\lambda}\right) + \frac{3}{4}\lambda \\
& = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\lambda + 1 + \frac{1}{2\lambda} + \frac{3}{4}\lambda \\
& = \frac{7}{8} + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2\lambda} \geq \frac{7}{8} + 2\sqrt{\frac{1}{2}\lambda \cdot \frac{1}{2\lambda}} = \frac{7}{8} + 1 = \frac{15}{8} \\
& \text{当 } \lambda = 1 \text{ 时取得最小值.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；数量积的坐标表达式

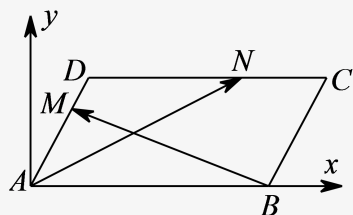
18. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ， $AB = 2$ ， $AD = 1$ ，若 M 、 N 分别是边 AD 、 CD 上的点，且满足 $\frac{MD}{AD} = \frac{NC}{DC} = \lambda$ ，其中 $\lambda \in [0, 1]$ ，则 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM}$ 的取值范围是（ ）.



- A. $[-3, 1]$ B. $[-3, -1]$ C. $[-1, 1]$ D. $[1, 3]$

【答案】B

【解析】建立如图所示的以 A 为原点，
 AB ， AD 所在直线为 x ， y 轴的直角坐标系，



则 $B(2, 0)$ ， $A(0, 0)$ ， $D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
&\because \text{满足} \frac{MD}{AD} = \frac{NC}{DC} = \lambda, \lambda \in [0, 1], \\
&\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD} + (1-\lambda)\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + (1-\lambda)\overrightarrow{AB}, \\
&= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (1-\lambda)(2, 0), \\
&= \left(\frac{5}{2} - 2\lambda, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \\
&\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + (1-\lambda)\overrightarrow{AD}, \\
&= (-2, 0) + (1-\lambda)\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda, \frac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda)\right), \\
&\text{则} \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} = \left(\frac{5}{2} - 2\lambda, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda, \frac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda)\right), \\
&= \left(\frac{5}{2} - 2\lambda\right)\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda), \\
&= \lambda^2 + \lambda - 3 = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}, \\
&\text{因为} \lambda \in [0, 1], \text{二次函数的对称轴为: } \lambda = -\frac{1}{2}, \\
&\text{则} [0, 1] \text{ 为增区间,} \\
&\text{故当} \lambda \in [0, 1] \text{ 时, } \lambda^2 + \lambda - 3 \in [-3, -1].
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】数量积的坐标表达式

6. 课堂巩固

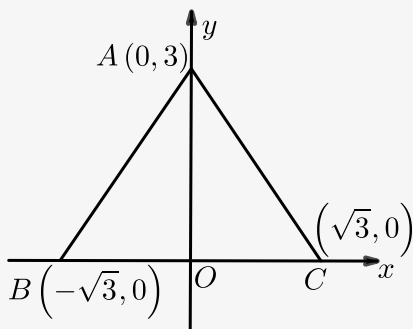
19. 若等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$, 平面内一点 M 满足 $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$, 则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】-2

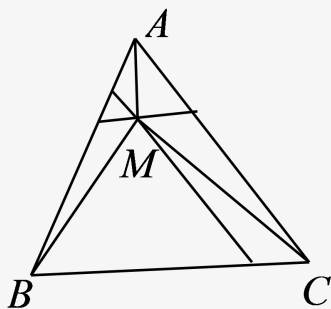
【解析】方法一：以 C 点为原点，以 AC 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，可得 $C(0, 0)$, $A(2\sqrt{3}, 0)$, $B(\sqrt{3}, 3)$,
 $\therefore \overrightarrow{CB} = (\sqrt{3}, 3)$, $\overrightarrow{CA} = (2\sqrt{3}, 0)$,
 $\therefore \overrightarrow{CM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,
 $\therefore M\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,
 $\therefore \overrightarrow{MA} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{MB} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$,
 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) = -2$.
 故答案为：-2.

方法二：建立如图所示的平面直角坐标系，根据题设条件即可知 $A(0, 3)$, $B(-\sqrt{3}, 0)$, $C(\sqrt{3}, 0)$, 即 $\overrightarrow{CB} = (-2\sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{CA} = (-\sqrt{3}, 3)$, 所以 $\overrightarrow{CM} = (-\sqrt{3}, 2)$. 因为

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CM} = (0, 1), \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM} = (-\sqrt{3}, -2), \quad \text{所以 } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -2.$$



方法三：如图所示，



由等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}| \cos 60^\circ = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 6.$$

$$\therefore \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB},$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \left(-\frac{1}{6}\overrightarrow{CB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\overrightarrow{CB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{CB} \right) \cdot \left(\frac{5}{6}\overrightarrow{CB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} \right) \\ &= -\frac{2}{9}\overrightarrow{CA}^2 - \frac{5}{36}\overrightarrow{CB}^2 + \frac{7}{18}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= -\frac{2}{9} \times (2\sqrt{3})^2 - \frac{5}{36} \times (2\sqrt{3})^2 + \frac{7}{18} \times 6 \\ &= -2. \end{aligned}$$

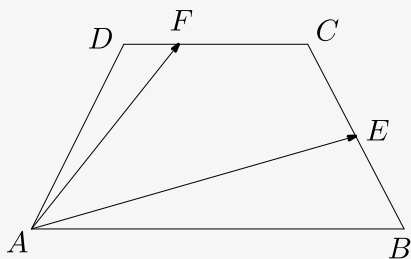
故答案为：-2.

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律；平面向量数量积运算（非坐标）

20. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB \parallel DC$ ， $AB = 2$ ， $BC = 1$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，动点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上，且 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{9\lambda} \overrightarrow{DC}$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{29}{18}$

【解析】 方法一：如图，



易求得, $CD = 1$,

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } \vec{AB} \cdot \vec{AF} &= (\vec{AB} + \vec{BE}) \cdot (\vec{AD} + \vec{DF}) \\
 &= (\vec{AB} + \lambda \vec{BC}) \cdot (\vec{AD} + \frac{1}{9\lambda} \vec{DC}) \\
 &= \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \frac{1}{9\lambda} \vec{AB} \cdot \vec{DC} + \lambda \vec{BC} \cdot \vec{AD} + \frac{1}{9} \vec{BC} \cdot \vec{DC} \\
 &= 1 + \frac{2}{9\lambda} + \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{18} \\
 &\geq \frac{17}{18} + 2\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{29}{18}, \\
 \text{当且仅当 } \frac{2}{9\lambda} &= \frac{1}{2}\lambda, \text{ 即 } \lambda = \frac{2}{3} \text{ 时, 取“=”} .
 \end{aligned}$$

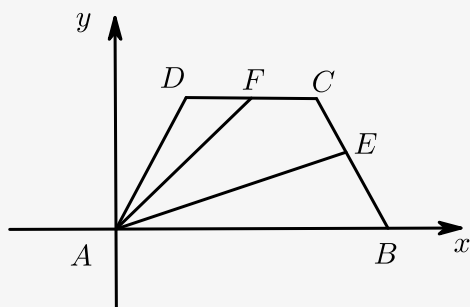
故答案为 $\frac{29}{18}$.

方法二: 如图, 建立直角坐标系, 则 $B(2, 0)$, $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

由 $\vec{BE} = \lambda \vec{BC}$ 得 $E\left(2 - \frac{\lambda}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)$, 由 $\vec{DF} = \frac{1}{9\lambda} \vec{DC}$ 得 $F\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{9\lambda}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

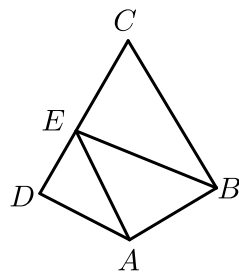
$$\vec{AE} \cdot \vec{AF} = \left(2 - \frac{\lambda}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{9\lambda}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{17}{18} + \frac{2}{9\lambda} + \frac{\lambda}{2} \geq \frac{17}{18} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{29}{18} \quad (\text{当且仅当 } \lambda = \frac{2}{3} \text{ 时, 取等号}) .$$

故答案为: $\frac{29}{18}$.



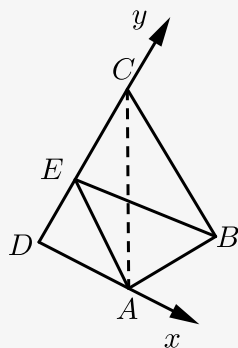
【标注】【知识点】基本不等式的概念

21. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp BC$, $AD \perp CD$, $\angle BAD = 120^\circ$, $AB = AD = 1$, 若点 E 为边 CD 上的动点, 则 $\vec{AE} \cdot \vec{BE}$ 的最小值为 ____ .



【答案】 $\frac{21}{16}$

【解析】如图，以D为坐标原点建立直角坐标系，连接AC，



由题意知 $\angle CAD = \angle CAB = 60^\circ$ ，

$\angle ACD = \angle ACB = 30^\circ$ ，

则 $D(0,0)$ ， $A(1,0)$ ， $B\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

$C(0, \sqrt{3})$ ，

设 $E(0, y)$ ($0 \leq y \leq \sqrt{3}$)，

则 $\overrightarrow{AE} = (-1, y)$ ， $\overrightarrow{BE} = \left(-\frac{3}{2}, y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{3}{2} + y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}y = \left(y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \frac{21}{16}$ ，

所以当 $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 时， $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 有最小值 $\frac{21}{16}$ 。

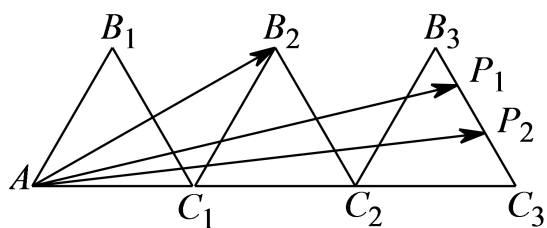
【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；数量积的坐标表达式

🔗 投影法

7. 例题精讲

22. 如图， $\triangle AB_1C_1$ ， $\triangle C_1B_2C_2$ ， $\triangle C_2B_3C_3$ 是三个边长为2的等边三角形，且有一条边在同一直线上，边

B_3C_3 上有2个不同的点 P_1 ， P_2 ，则 $\overrightarrow{AB_2} \cdot (\overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

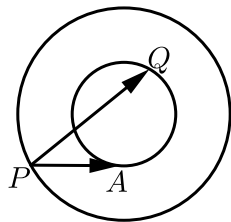


【答案】 36

【解析】 由题可知 $|\vec{AB_2}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{AC_3}| = 6$,
 $\langle \vec{AB_2}, \vec{AC_3} \rangle = \frac{\pi}{6}$, $\langle \vec{AB_2}, \vec{C_3P_1} \rangle = \frac{\pi}{2}$,
 故 $\vec{AB_2} \cdot \vec{AP_1} = \vec{AB_2} \cdot (\vec{AC_3} + \vec{C_3P_1}) = |\vec{AB_2}| \cdot |\vec{AC_3}| \times \cos \frac{\pi}{6} + 0 = 18$,
 同理可得 $\vec{AB_2} \cdot \vec{AP_2} = 18$, 则 $\vec{AB_2} \cdot (\vec{AP_1} + \vec{AP_2}) = 36$.

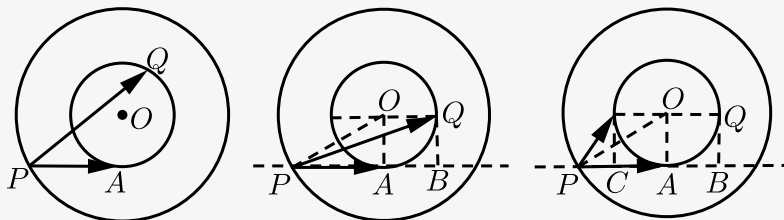
【标注】 【知识点】 平面向量数量积运算 (非坐标)

23. 如图同心圆中, 大、小圆的半径分别为2和1, 点P在大圆上, PA与小圆相切于点A, Q为小圆上的点, 则 $\vec{PA} \cdot \vec{PQ}$ 的取值范围是 _____.



【答案】 $[3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}]$

【解析】 方法一:



结合向量数量积的几何意义, $\vec{PA} \cdot \vec{PQ}$ 等于 $|\vec{PA}|$ 乘以 $\vec{PQ}$ 在 PA 方上的投影,

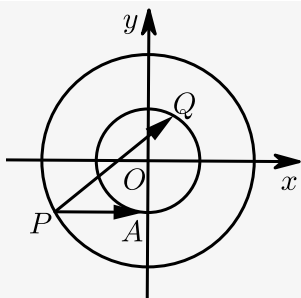
$\because OP = 2$, $OA = 1$, $\therefore |\vec{PA}| = \sqrt{3}$, 如中图所示, 投影最大,

$\vec{PA} \cdot \vec{PQ} = PA \cdot PB = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) = 3 + \sqrt{3}$, 如右图, 投影最小,

$\vec{PA} \cdot \vec{PQ} = PA \cdot PC = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) = 3 - \sqrt{3}$,

$\therefore$ 取值范围为 $[3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}]$.

方法二: 建立平面直角坐标系, 如图所示,



设 $Q(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $A(0, -1)$,

则 $P(\pm\sqrt{3}, -1)$, 不妨取 $P(-\sqrt{3}, -1)$,

则 $\overrightarrow{PA} = (\sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{PQ} = (\cos \alpha + \sqrt{3}, \sin \alpha + 1)$,

$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} = \sqrt{3}(\cos \alpha + \sqrt{3}) = \sqrt{3} \cos \alpha + 3$;

又 $\cos \alpha \in [-1, 1]$,

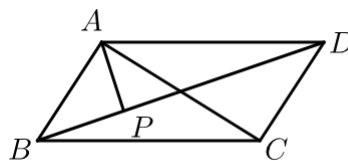
$\therefore 3 - \sqrt{3} \leq \sqrt{3} \cos \alpha + 3 \leq 3 + \sqrt{3}$,

即 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ}$ 的取值范围是 $[3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}]$.

【标注】【知识点】向量的投影

8. 课堂巩固

24. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AP \perp BD$, 垂足为 P , 且 $AP = 3$, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} =$ ____.



【答案】 18

【解析】 方法一: 如图, E 为平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC 和 BD 的交点,

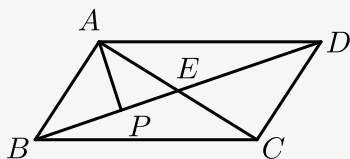
$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} \cdot 2\overrightarrow{AE}$$

$$= 2|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AE}| \cos \angle PAE,$$

$|\overrightarrow{AE}| \cos \angle PAE$ 即为 AE 在 AP 上的投影, 由于 $AP \perp BD$,

所以 AE 在 AP 上的投影为 AP .

$$\text{故 } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 2|\overrightarrow{AP}|^2 = 2 \times 3^2 = 18.$$

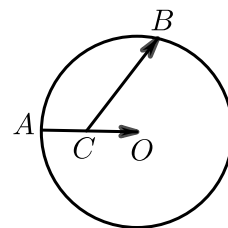


方法二：设 AC 与 BD 交于 O 点，则

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} \cdot (2\overrightarrow{AO}) = 2\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PO}) = 2\overrightarrow{AP}^2 = 18.$$

【标注】【知识点】利用投影解决平面向量的数量积

25. 如图，设 A, B 是半径为2的圆 O 上的两个动点，点 C 为 AO 的中点，则 $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CB}$ 的取值范围是（ ）.



A. $[-1, 3]$

B. $[1, 3]$

C. $[-3, -1]$

D. $[-3, 1]$

【答案】 A

【解析】 方法一：由图易得 $\overrightarrow{CB}$ 在 $\overrightarrow{CO}$ 上的投影的取值范围为 $[-1, 3]$

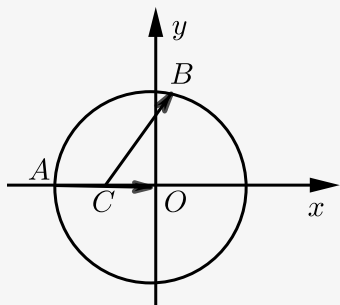
,

又因为 $|\overrightarrow{CO}| = 1$,

所以 $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CB} \in [-1, 3]$.

故选A.

方法二：如图所示，



可得 $O(0, 0)$, $A(-2, 0)$, $C(-1, 0)$,

设 $B(2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

$$\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CB} = (1, 0) \cdot (2\cos\theta + 1, 2\sin\theta) = 2\cos\theta + 1 \in [-1, 3].$$

故选A.

【标注】【知识点】利用投影解决平面向量的数量积；向量的投影

二、平面向量与三角形四心

1. 知识讲解

🔗 三角形的四心

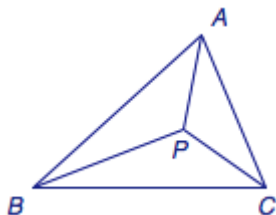
三角形的四心是指三角形的重心、垂心、外心、内心。

- (1) 三角形三条中线的交点是重心；
- (2) 三角形三条高线的交点为垂心；
- (3) 与三角形三个顶点都相交的圆叫做三角形的外接圆，外接圆的圆心叫做三角形的外心（是三边垂直平分线的交点）；
- (4) 与三角形三边都相切的圆叫做三角形的内切圆，内切圆的圆心叫做三角形的内心（是三条内角平分线的交点）。

🔗 奔驰定理

已知 P 为三角形内 ABC 一点，则 $S_A \overrightarrow{PA} + S_B \overrightarrow{PB} + S_C \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$

其中 S_A, S_B, S_C 分别是 $\triangle BPC, \triangle CPA, \triangle APB$ 的面积。



🔗 一般结论

O 是 $\triangle ABC$ 的垂心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$

O 是 $\triangle ABC$ 的重心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$

O 是 $\triangle ABC$ 的重心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{PO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$

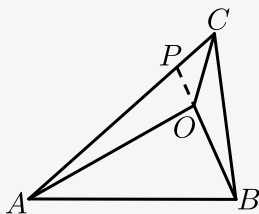
O 是 $\triangle ABC$ 的内心 $\Leftrightarrow a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$

2. 例题精讲

26. 点 O 在 $\triangle ABC$ 的内部，且满足 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle AOC$ 的面积之比是（ ）。
- A. $\frac{7}{2}$ B. 3 C. $\frac{5}{2}$ D. 2

【答案】A

【解析】延长 BO 交 AC 于点 P ，如图所示：



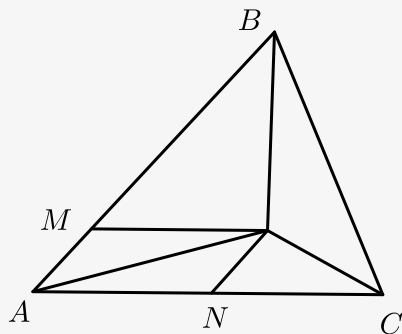
由 $\vec{OA} + 2\vec{OB} + 4\vec{OC} = \vec{0}$ 得, $\vec{BA} - \vec{BO} + 2\vec{OB} + 4(\vec{BC} - \vec{BO}) = \vec{0}$,
 得 $\vec{BO} = \frac{1}{7}\vec{BA} + \frac{4}{7}\vec{BC} = \frac{5}{7}(\frac{1}{5}\vec{BA} + \frac{4}{5}\vec{BC}) = \frac{5}{7}\vec{BP}$. 所以 $\vec{BP} = \frac{7}{2}\vec{OP}$,
 所以 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOC}} = \frac{7}{2}$. 故选 A.

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义；平面向量线性运算综合（非坐标）

27. 已知 P 是 $\triangle ABC$ 内一点, $\vec{AP} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$, $\triangle PAC$ 的面积为 2016, 则 $\triangle PAB$ 的面积为 _____.

【答案】 4032

【解析】 设 $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB}$, $\vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AC}$, 以 AM , AN 为邻边作平行四边形 $AMPN$,



$$\text{则 } S_{\triangle AMP} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}S_{\triangle APC},$$

$$\therefore S_{\triangle AMP} = S_{\triangle ANP},$$

$$\therefore S_{\triangle PAB} = 2S_{\triangle PAC} = 4032.$$

故答案为：4032.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则

28. 已知点 O 、 N 、 P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内, 且 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$, $\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} = \vec{0}$,
 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PB} \cdot \vec{PC} = \vec{PC} \cdot \vec{PA}$, 则点 O 、 N 、 P 依次是 $\triangle ABC$ 的 ().

A. 重心、外心、垂心 B. 重心、外心、内心 C. 外心、重心、垂心 D. 外心、重心、内心

【答案】 C

【解析】方法一： $\because |\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$ ，

$\therefore O$ 为 $\triangle ABC$ 的外心，

$$\therefore \vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} = \vec{0},$$

设 AB 的中点为 E ，则 $2\vec{NE} = -\vec{NC}$ 。

$\therefore N$ 在 $\triangle ABC$ 的中线 CE 上。

同理， N 在边 AC ， BC 的中线上，

$\therefore N$ 为 $\triangle ABC$ 中线的交点。

$\therefore N$ 为 $\triangle ABC$ 的重心。

$$\therefore \vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PB} \cdot \vec{PC},$$

$$\therefore \vec{PA} \cdot \vec{PB} - \vec{PB} \cdot \vec{PC} = 0.$$

$$\therefore (\vec{PA} - \vec{PC}) \cdot \vec{PB} = 0.$$

$$\therefore \vec{CA} \cdot \vec{PB} = 0,$$

$$\therefore PB \perp CA.$$

同理， $PC \perp AB$ ， $PA \perp BC$ ，

$\therefore P$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心，

故选C。

方法二：因为 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$ ，所以点 O 到三角形的三个顶点的距离相等，

所以 O 为三角形 ABC 的外心；由 $\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} = \vec{0}$ ，得 $\vec{NA} + \vec{NB} = -\vec{NC} = \vec{CN}$ ，

由中线的性质可知点 N 在三角形 AB 边的中线上，所以点 N 为三角形 ABC 的重心；

由 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PB} \cdot \vec{PC} = \vec{PC} \cdot \vec{PA}$ ，得 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} - \vec{PB} \cdot \vec{PC} = \vec{PB} \cdot \vec{CA} = 0$ ，则点 P 在 AC 边的垂线上，

同理可得点 P 在其他边的垂线上，所以点 P 为三角形 ABC 的垂心。

故选C。

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律

【素养】数学运算

29. 已知 O 是平面上的一定点， A, B, C 是平面上不共线的三个点，若动点 P 满足

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda(\vec{AB} + \vec{AC}), \lambda \in (0, +\infty), \text{ 则点 } P \text{ 的轨迹一定通过 } \triangle ABC \text{ 的 ()}.$$

A. 内心

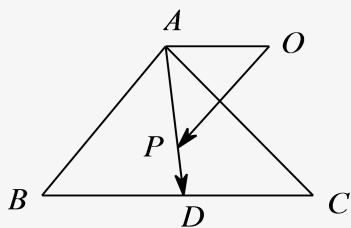
B. 外心

C. 重心

D. 垂心

【答案】C

【解析】取 BC 中点为 D ，



则 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$,

$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 2\lambda\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 共线,

$\therefore P$ 一定过 $\triangle ABC$ 的重心.

故选 C.

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则

3. 课堂巩固

30. 设 O 为 $\triangle ABC$ 内部的一点, 且 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则 $\triangle AOC$ 的面积与 $\triangle BOC$ 的面积之比为 () .

A. 3 : 2

B. 5 : 3

C. 2 : 1

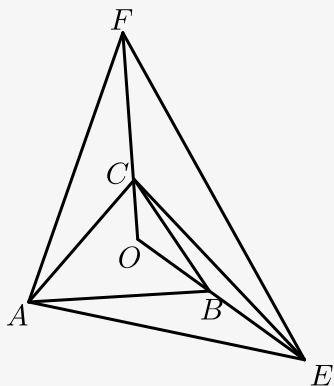
D. 3 : 1

【答案】 C

【解析】 延长 OB 到 E 使得 $OE = 2OB$,

延长 OC 到 F , 使得 $OF = 3OC$,

连接 AF 、 AE ,



$\therefore \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$,

$\therefore \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$,

$\therefore O$ 为 $\triangle AEF$ 重心,

$$\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle AOF}} \cdot \frac{S_{\triangle AOF}}{S_{\triangle AEF}},$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \text{ ①},$$

连结 CE ,

$$\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle OCE}} \cdot \frac{S_{\triangle OCE}}{S_{\triangle OEF}} \cdot \frac{S_{\triangle OEF}}{S_{\triangle AFE}},$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18} \text{ ②},$$

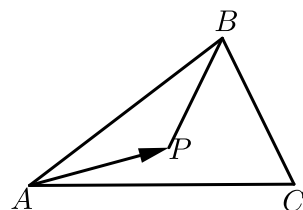
①÷②得

$$\therefore \frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}} = 2.$$

故选 C.

【标注】【知识点】平面向量与三角形的“心”；平面向量基本定理及其意义

31. 如图所示, 设 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点, 并且 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, 则 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比等于 ().



A. $\frac{1}{5}$

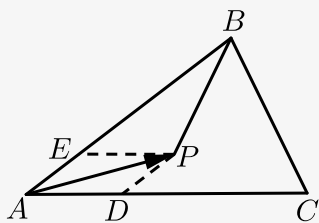
B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{2}{3}$

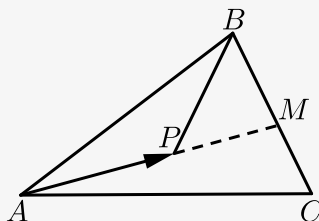
【答案】 C

【解析】 方法一: 过点 P 作 AB , AC 的平行线, 分别交 AC , AB 于点 D , E ,



由系数 $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ 的几何意义知, $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{5}$, $\frac{AD}{AC} = \frac{2}{5}$. 于是 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AE}{AB} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{2}{25}$, 又 $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}S_{ADPE} = S_{\triangle APE}$, 所以 $\frac{S_{\triangle APE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2}{25}$. 而 $\frac{S_{\triangle APE}}{S_{\triangle ABP}} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{5}$, 所以 $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2}{5}$, 故选 C.

方法二: 延长 AP 至 M ,



$\therefore \vec{AP} = \frac{1}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC}$, 又 $\because M, B, C$ 共线, $\frac{1}{5} : \frac{2}{5} = 1 : 2$, $\therefore \vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$, $\therefore \frac{BM}{CM} = \frac{2}{1}$, $\therefore \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3}$, $\frac{AP}{AM} = \frac{3}{5}$, $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABM}} \cdot \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AP}{AM} \cdot \frac{BM}{BC} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$, 故选 C.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的加法运算及运算规则

32. 设 P, Q 为 $\triangle ABC$ 所在平面内两点, 若点 P 满足 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PA} \cdot \vec{PC} = \vec{PB} \cdot \vec{PC}$, 点 Q 满足 $\vec{QA} + \vec{QB} + \vec{QC} = \vec{0}$, 则 P, Q 分别为 $\triangle ABC$ 的().
- A. 内心、重心 B. 垂心、重心 C. 重心、垂心 D. 外心、重心

【答案】 B

【解析】 $\because \vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PA} \cdot \vec{PC}$,
 $\therefore \vec{PA} \cdot (\vec{PB} - \vec{PC}) = 0$,
 $\therefore \vec{PA} \cdot \vec{CB} = 0$,
 $\therefore \vec{PA} \perp \vec{CB}$,
 $\therefore \vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PB} \cdot \vec{PC}$,
 $\therefore \vec{PB} \cdot (\vec{PA} - \vec{PC}) = 0$,
 $\therefore \vec{PB} \cdot \vec{CA} = 0$,
 $\therefore \vec{PB} \perp \vec{CA}$,
 $\therefore P$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心,
 $\because \vec{QA} + \vec{QB} + \vec{QC} = \vec{0}$,
 $\therefore$ 点 Q 是 $\triangle ABC$ 的重心.

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律；平面向量与三角形的“心”

33. 已知 A, B, C 三点不在同一条直线上, O 是平面 ABC 内一定点, P 是 $\triangle ABC$ 内的一动点, 若 $\vec{OP} - \vec{OA} = \lambda(\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC})$, $\lambda \in [0, +\infty)$, 则直线 AP 一定过 $\triangle ABC$ 的().
- A. 重心 B. 垂心 C. 外心 D. 内心

【答案】 A

【解析】 如图, 取 BC 的中点 D 并连结 AD ,
 则 $\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{BD}$, $\vec{OP} - \vec{OA} = \vec{AP}$,
 $\therefore \vec{OP} - \vec{OA} = \lambda(\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC})$,

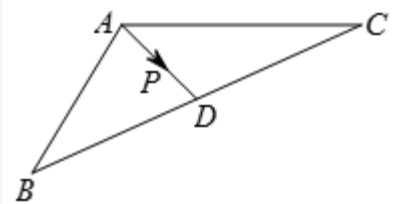
$\lambda \in [0, +\infty)$,

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AD},$$

即 A 、 P 、 D 三点共线,

又 $\because AD$ 为 BC 边上中线,

$\therefore AP$ 一定过 D 重心.



【标注】【知识点】平面向量与三角形的“心”；平面向量的加法运算及运算规则