

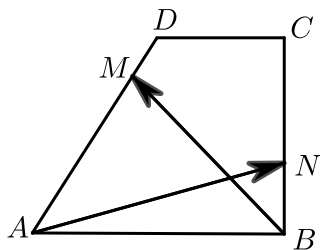
平面向量综合

一、平面向量综合应用

🔗 基底法

1. 例题精讲

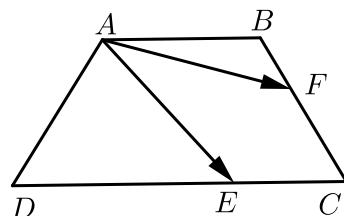
1. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为2, $\angle DAB = 60^\circ$, 点 E, F 分别为 BC, CD 的中点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} = ()$.
A. 3 B. 1
C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3}{2}$
2. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为1的等边三角形, 点 D, E 分别是边 AB, BC 的中点, 连接 DE 并延长到点 F , 使得 $DE = 2EF$, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为 $()$.
A. $-\frac{5}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{11}{8}$
3. 在边长为1的正三角形 ABC 中, 设 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA} = \lambda\overrightarrow{CE}$, 若 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}$, 则 λ 的值为 $()$.
A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\frac{1}{3}$ D. 3
4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, $|\overrightarrow{AC}| = 2$, $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, $|\overrightarrow{AD}| = \frac{\sqrt{37}}{3}$, 则 $|\overrightarrow{AB}| = \underline{\hspace{1cm}}$; 设 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} (\lambda \in \mathbf{R})$, 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = 4$, 则 λ 的值为 $\underline{\hspace{1cm}}$.
5. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, $AB = AD = 2$, 若 M, N 分别是边 AD, BC 上的动点, 满足 $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN} = (1 - \lambda)\overrightarrow{BC}$, 其中 $\lambda \in (0, 1)$, 若 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} = -2$, 则 λ 的值为 $\underline{\hspace{1cm}}$.



6. 已知边长为2的菱形 $ABCD$ 中, 点 F 为 BD 上一动点, 点 E 满足 $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = -\frac{2}{3}$, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EF}$ 的最小值为 $()$.
A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{4}{3}$
C. $-\frac{152}{75}$ D. $-\frac{73}{36}$

2. 课堂巩固

7. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 是底角为 60° 的等腰梯形, 其中 $AB \parallel CD$, $AD = 4$, $DC = 6$, $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{FB}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的值为 _____.

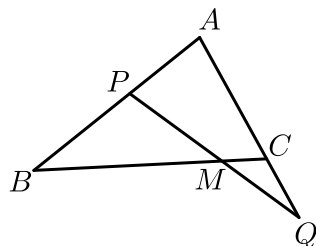


8. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 3$, $AC = 2$, 若 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$), 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = -4$, 则 λ 的值为 _____.
9. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $AC = 3$, $\angle BAC = 120^\circ$, D 是 BC 中点, E 在边 AC 上, $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}$, 则 $|\overrightarrow{AD}| =$ _____, λ 的值为 _____.
10. 直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = 2$, $AD = 1$, 对角线 AC 与 BD 交于点 M , 点 E 和 F 分别在线段 AM 和 BM 上, 且 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BF} = (1 - \lambda)\overrightarrow{BM}$, 若 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CF} = \frac{3}{4}$, 则 $\lambda =$ ().
 A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{3}{5}$
11. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $DA = DB$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 5$, P 为线段 DC 上任意一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最小值为 _____.

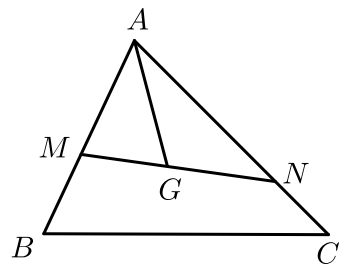
利用三点共线

3. 例题精讲

12. 如图所示, $\triangle ABC$ 中, 直线 PQ 与边 AB , BC 及 AC 的延长线分别交于点 P , M , Q , $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = s\overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{1}{t} + \frac{3}{s} =$ _____.

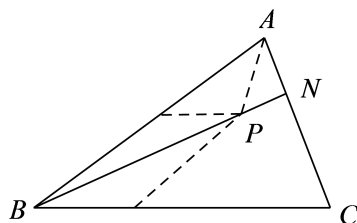


13. 如图所示, 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 过 G 作直线与 AB 、 AC 两边分别交于不同两点 M 、 N , 且 $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AC}$, 则 $x + y$ 的最小值为 _____.



4. 课堂巩固

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， N 为线段 AC 上靠近 A 的三等分点，点 P 在 BN 上且 $\overrightarrow{AP} = \left(m + \frac{2}{11}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{2}{11}\overrightarrow{BC}$ ，则实数 m 的值为（ ）。

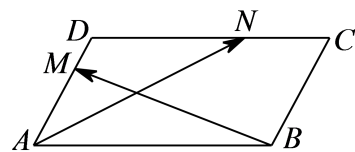


- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{9}{11}$ D. $\frac{5}{11}$
15. 在 $\triangle ABC$ 中， E 为线段 AC 上一点， $AC = 4AE$ ， P 为 BE 上一动点，若 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ ，且 $m > 0$ ， $n > 0$ ，则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值是（ ）。
- A. 12 B. 11 C. 10 D. 9

坐标法

5. 例题精讲

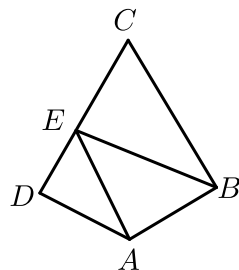
16. 已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形， $AB = 2$ ，设点 P, Q 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AQ} = (1 - \lambda)\overrightarrow{AC}$ ， $\lambda \in \mathbf{R}$ ，若 $\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = -\frac{3}{2}$ ，则 $\lambda =$ （ ）。
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$
C. $\frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}$ D. $\frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
17. 等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB \parallel DC$ ， $BC = CD = 1$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，点 E, F 分别在线段 BC 和 DC 上，且 $\overrightarrow{BE} = \lambda\overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{4\lambda}\overrightarrow{DC}$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值为 _____。
18. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ， $AB = 2$ ， $AD = 1$ ，若 M, N 分别是边 AD, CD 上的点，且满足 $\frac{MD}{AD} = \frac{NC}{DC} = \lambda$ ，其中 $\lambda \in [0, 1]$ ，则 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM}$ 的取值范围是（ ）。



- A. $[-3, 1]$ B. $[-3, -1]$ C. $[-1, 1]$ D. $[1, 3]$

6. 课堂巩固

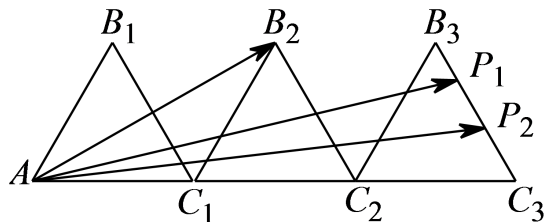
19. 若等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$ ，平面内一点 M 满足 $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ ，则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} =$ _____ .
20. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB \parallel DC$ ， $AB = 2$ ， $BC = 1$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，动点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上，且 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{9\lambda} \overrightarrow{DC}$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值为 _____ .
21. 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中， $AB \perp BC$ ， $AD \perp CD$ ， $\angle BAD = 120^\circ$ ， $AB = AD = 1$ ，若点 E 为边 CD 上的动点，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为 _____ .



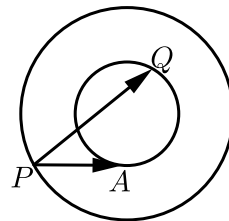
投影法

7. 例题精讲

22. 如图， $\triangle AB_1C_1$ ， $\triangle C_1B_2C_2$ ， $\triangle C_2B_3C_3$ 是三个边长为2的等边三角形，且有一条边在同一直线上，边 B_3C_3 上有2个不同的点 P_1 ， P_2 ，则 $\overrightarrow{AB_2} \cdot (\overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2}) =$ _____ .

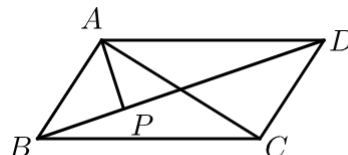


23. 如图同心圆中，大、小圆的半径分别为2和1，点 P 在大圆上， PA 与小圆相切于点 A ， Q 为小圆上的点，则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ}$ 的取值范围是 _____ .

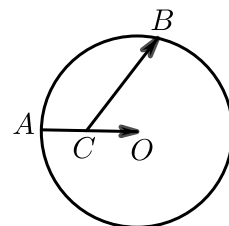


8. 课堂巩固

24. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AP \perp BD$ ，垂足为 P ，且 $AP = 3$ ，则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____ .



25. 如图，设 A, B 是半径为2的圆 O 上的两个动点，点 C 为 AO 的中点，则 $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CB}$ 的取值范围是() .



A. $[-1, 3]$

B. $[1, 3]$

C. $[-3, -1]$

D. $[-3, 1]$

二、平面向量与三角形四心

1. 知识讲解

三角形的四心

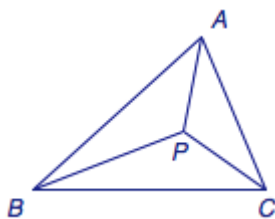
三角形的四心是指三角形的重心、垂心、外心、内心。

- (1) 三角形三条中线的交点是重心；
- (2) 三角形三条高线的交点为垂心；
- (3) 与三角形三个顶点都相交的圆叫做三角形的外接圆，外接圆的圆心叫做三角形的外心（是三边垂直平分线的交点）；
- (4) 与三角形三边都相切的圆叫做三角形的内切圆，内切圆的圆心叫做三角形的内心（是三条内角平分线的交点）。

奔驰定理

已知 P 为三角形内 ABC 一点, 则 $S_A\overrightarrow{PA} + S_B\overrightarrow{PB} + S_C\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

其中 S_A, S_B, S_C 分别是 $\triangle BPC, \triangle CPA, \triangle APB$ 的面积.



一般结论

O 是 $\triangle ABC$ 的垂心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$

O 是 $\triangle ABC$ 的重心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

O 是 $\triangle ABC$ 的重心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{PO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$

O 是 $\triangle ABC$ 的内心 $\Leftrightarrow a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

2. 例题精讲

26. 点 O 在 $\triangle ABC$ 的内部, 且满足 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle AOC$ 的面积之比是().

A. $\frac{7}{2}$

B. 3

C. $\frac{5}{2}$

D. 2

27. 已知 P 是 $\triangle ABC$ 内一点, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\triangle PAC$ 的面积为2016, 则 $\triangle PAB$ 的面积为_____.

28. 已知点 O, N, P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内, 且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$, $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$,

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$, 则点 O, N, P 依次是 $\triangle ABC$ 的().

A. 重心、外心、垂心 B. 重心、外心、内心 C. 外心、重心、垂心 D. 外心、重心、内心

29. 已知 O 是平面上的一定点, A, B, C 是平面上不共线的三个点, 若动点 P 满足

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\lambda \in (0, +\infty)$, 则点 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的().

A. 内心

B. 外心

C. 重心

D. 垂心

3. 课堂巩固

30. 设 O 为 $\triangle ABC$ 内部的一点, 且 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则 $\triangle AOC$ 的面积与 $\triangle BOC$ 的面积之比为().

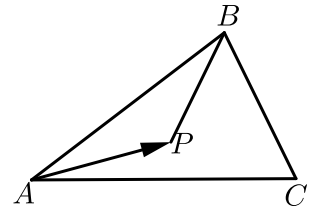
A. 3:2

B. 5:3

C. 2:1

D. 3:1

31. 如图所示, 设 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点, 并且 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, 则 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比等于().



- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

32. 设 P 、 Q 为 $\triangle ABC$ 所在平面内两点，若点 P 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ ，点 Q 满足 $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} = \vec{0}$ ，则 P 、 Q 分别为 $\triangle ABC$ 的 () .

- A. 内心、重心 B. 垂心、重心 C. 重心、垂心 D. 外心、重心

33. 已知 A 、 B 、 C 三点不在同一条直线上， O 是平面 ABC 内一定点， P 是 $\triangle ABC$ 内的一动点，若 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \right)$ ， $\lambda \in [0, +\infty)$ ，则直线 AP 一定过 $\triangle ABC$ 的 () .

- A. 重心 B. 垂心 C. 外心 D. 内心