

平面向量的概念与线性运算

一、平面向量的基本概念

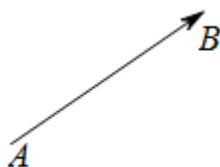
1. 知识讲解

1.向量的概念：我们把具有大小和方向的量称为向量．

2.向量的表示：

①几何表示法：用有向线段表示向量，有向线段的方向表示向量的方向，线段的长度表示向量的长度．

②字母表示法： $\overrightarrow{AB}$ ，注意起点在前，终点在后．



3.相等和相反向量：

①同向且等长的有向线段表示同一向量或相等向量,记作 $\vec{a} = \vec{b}$ ．

②与向量 $\vec{a}$ 方向相反且等长的向量叫做 $\vec{a}$ 的相反向量，记作 $-\vec{a}$ ．

4.共线或平行向量：通过有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的直线，叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 的基线．如果向量的基线互相平行或重合，则称这些向量共线或平行．向量 $\vec{a}$ 平行于向量 $\vec{b}$ ，记作 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ．

5.零向量：长度等于零的向量，叫做零向量．记作： $\vec{0}$ ．

零向量的方向不确定，零向量与任意向量平行．

6.单位向量：长度等于1的向量叫做单位向量．

7.向量的模：向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小(或长度)叫做向量的模，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ ．

2. 例题精讲

1. 下列给出的命题正确的是（ ）．

- A. 两个向量的模相等，则这两个向量的长度相等且方向相同或相反
- B. 两个共线的向量，其方向一定相同
- C. 若两个向量不共线，则这两个向量都是非零向量
- D. 两个有共同起点的共线向量，其终点一定相同

2.

在下列命题中：①平行向量一定相等；②不相等的向量一定不平行；③共线向量一定相等；④相等向量一定共线；⑤长度相等的向量是相等向量；⑥平行于同一个非零向量的两个向量是共线向量．
正确的命题是 _____ ．

3. 下面几个命题：

- ①若 $\vec{a} = \vec{b}$ ，则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ；
- ②若 $|\vec{a}| = 0$ ，则 $\vec{a} = 0$ ；
- ③若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ ；
- ④若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} // \vec{b} \end{cases}$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ ；

其中正确命题的个数是 () ．

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. 课堂巩固

4. 下列说法正确的是 () ．

- A. 单位向量一定是平行向量
- B. 相等向量不一定是共线向量
- C. 共线的单位向量一定是相等向量
- D. 平行向量一定是共线向量

5. 判断下列命题是否正确，并说明理由：

- 1. 共线向量一定在同一条直线上．
- 2. 所有的单位向量都相等．
- 3. 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线， $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 共线．
- 4. 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，则 $\vec{a} // \vec{b}$ ．
- 5. 向量 $\vec{AB} // \vec{CD}$ ，则 $AB // CD$ ．
- 6. 平行四边形两对边所在的向量一定是相等向量．

6. 给出下列四个命题：

- ①若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ ；
- ②若 A, B, C, D 是不共线的四点，则 $\vec{AB} = \vec{DC}$ 是四边形 $ABCD$ 为平行四边形的充要条件；
- ③若 $\vec{a} = \vec{b}$ ， $\vec{b} = \vec{c}$ ，则 $\vec{a} = \vec{c}$ ；
- ④ $\vec{a} = \vec{b}$ 的充要条件是 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 且 $\vec{a} // \vec{b}$ ．

其中正确命题的序号是 () ．

- A. ①② B. ③④ C. ②③ D. ②④

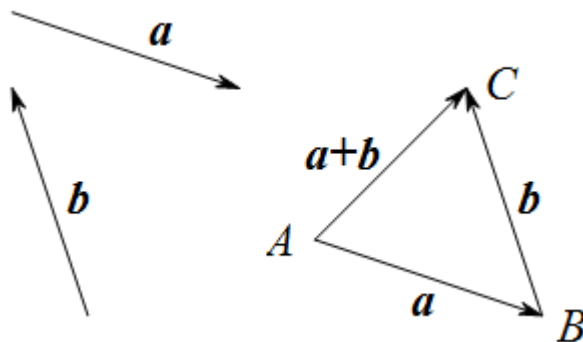
二、平面向量的线性运算

1. 知识讲解

加法运算

(1) 三角形法则

如下图：



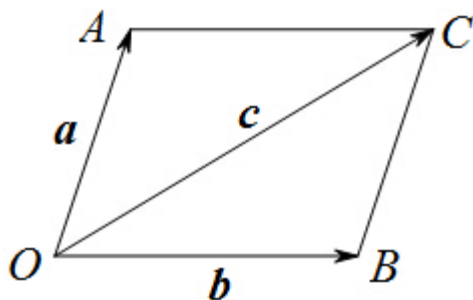
已知非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，在平面内任取一点 A ，作 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记作 $\vec{a} + \vec{b}$ ，即 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ 。

求两个向量和的运算，叫做向量的加法。这种求向量和的方法，称为向量加法的三角形法则。

位移的合成可以看作向量加法三角形法则的物理模型。

(2) 平行四边形法则

如下图：



以同一点 O 为起点的两个已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 为邻边作 $ABCD$ ，则以 O 为起点的对角线 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，我们把这种作两个向量和的方法叫做向量加法的平行四边形法则。

(3) 向量求和的多边形法则：

已知 n 个向量，依次把这 n 个向量首尾相连，以第一个向量的始点为始点，第 n 个向量的终点为终点的向量叫做这个向量的和向量。这个法则叫做向量求和的多边形法则。

【探究一】

对于任意两个向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，都有不等式 $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ 成立，请大家结合图形利用分类讨论的思想去探究，并给出下面问题的答案：

$\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 处于什么位置时，

- (1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ；
- (2) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$ (或 $|\vec{b}| - |\vec{a}|$) .

【探究二】

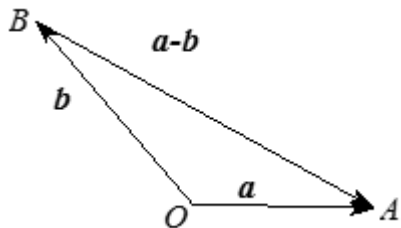
数的加法满足交换律与结合律，即对任意 $a, b \in \mathbf{R}$ ，有

$$a + b = b + a, (a + b) + c = a + (b + c).$$

那么任意向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的加法是否也满足交换律和结合律？请画图进行探索。

减法运算

如果把两个向量的始点放在一起，则这两个向量的差是以减向量的终点为始点，被减向量的终点为终点的向量。又或者一个向量减去另一个向量等于加上这个向量的相反向量。



推论：一个向量 $\overrightarrow{BA}$ 等于它的终点相对于点的位置向量 $\overrightarrow{OA}$ 减去它的始点相对于点的位置向量 $\overrightarrow{OB}$ ，或简记“终点向量减始点向量”。

数乘运算

我们规定实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的积是一个向量，这种运算叫做向量的**数乘**，记作 $\lambda \vec{a}$ ，它的长度与方向规定如下：

- (1) $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$ ；
- (2) 当 $\lambda > 0$ 时， $\lambda \vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同；当 $\lambda < 0$ 时， $\lambda \vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相反。

根据(1)可知，当 $\lambda = 0$ 时， $\lambda \vec{a} = \vec{0}$ 。

根据实数域向量的积的定义，可以验证下面的运算律。

设 λ, μ 为实数，那么：

- (1) $\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a}$ ；
- (2) $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$ ；
- (3) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ 。

进一步运算，还可以得到：

$$(1) (-\lambda)\vec{a} = -(\lambda\vec{a}) = \lambda(-\vec{a}); (2) \lambda(\vec{a} - \vec{b}) = \lambda\vec{a} - \lambda\vec{b}.$$

至此我们学习了向量的加法运算，减法运算和数乘运算，这三种运算统称为向量的线性运算．对于任意向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，以及任意实数 μ_1 、 μ_2 ，我们称 $\mu_1\vec{a} + \mu_2\vec{b}$ 为向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的线性组合，而且对于任意实数 λ ，恒有：

$$\lambda(\mu_1\vec{a} \pm \mu_2\vec{b}) = \lambda\mu_1\vec{a} \pm \lambda\mu_2\vec{b}.$$

2. 例题精讲

3. 课堂巩固

7. 下列各式化简正确的是（ ）．

A. $\vec{OA} - \vec{OD} + \vec{DA} = \vec{0}$

B. $\vec{AB} + \vec{MB} + \vec{BO} + \vec{OM} = \vec{AB}$

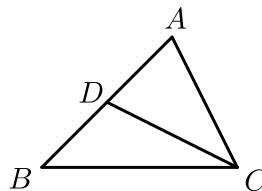
C. $\vec{AB} - \vec{CB} + \vec{AC} = \vec{0}$

D. $0 \cdot \vec{AB} = 0$

8. 在矩形 $ABCD$ 中，若 $\vec{BC} = 5\vec{e}_1$ ， $\vec{DC} = 3\vec{e}_2$ ，则 $\vec{AC} =$ _____．

9. 已知平面上不共线的四点 O, A, B, C ，若 $\vec{OA} - 3\vec{OB} + 2\vec{OC} = \vec{0}$ ，则 $\frac{|\vec{AB}|}{|\vec{BC}|} =$ _____．

10. 如图所示， D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点，则向量 $\vec{CD} =$ （ ）．



A. $-\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{BA}$

B. $-\vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{BA}$

C. $\vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{BA}$

D. $\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{BA}$

11. 在 $\triangle ABC$ 中， AM 为 BC 边上的中线，点 N 满足 $\vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{NM}$ ，则 $\vec{BN} =$ （ ）．

A.

- $\frac{1}{6}\vec{AC} - \frac{5}{6}\vec{AB}$
 B. $\frac{5}{6}\vec{AC} - \frac{1}{6}\vec{AB}$
 C. $\frac{1}{6}\vec{AC} + \frac{5}{6}\vec{AB}$
 D. $\frac{5}{6}\vec{AC} + \frac{1}{6}\vec{AB}$

12. 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为非零向量, 则下列命题错误的是 ().

- A. 若 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同
 B. 若 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反
 C. 若 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
 D. 若 $||\vec{a}| - |\vec{b}|| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 AB 边上一点, 若 $\vec{AD} = 2\vec{DB}$, $\vec{CD} = \frac{1}{3}\vec{CA} + \lambda\vec{CB}$, 则 $\lambda =$ ().

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

4. 课堂巩固

14. 下列四式中不能化简为 $\vec{AD}$ 的是 ().

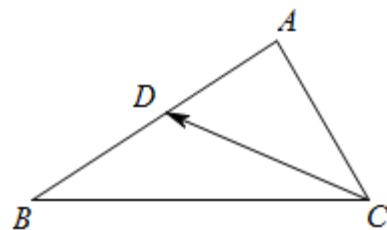
- A. $(\vec{AB} + \vec{CD}) + \vec{BC}$
 B. $(\vec{AD} + \vec{MB}) + (\vec{BC} + \vec{CM})$
 C. $(\vec{MB} + \vec{AD}) - \vec{BM}$
 D. $(\vec{OC} - \vec{OA}) + \vec{CD}$

15. 若 $\vec{OA} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{AB} = 3(\vec{a} - \vec{b})$, $\vec{CB} = 2(2\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{OC} =$ ____.

16. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, D 为 BC 边中点, 且 $2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, 则有 ().

- A. $\vec{AO} = \vec{OD}$
 B. $\vec{AO} = 2\vec{OD}$
 C. $\vec{AO} = 3\vec{OD}$
 D. $2\vec{AO} = \vec{OD}$

17. 如图, D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点, 则向量 $\vec{CD}$ 等于 ().



- A. $\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
- B. $\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
- C. $-\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
- D. $-\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

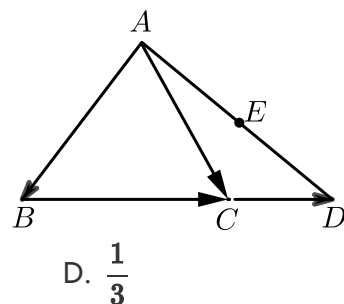
18. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$, F 为 AE 的中点, 则 $\overrightarrow{BF} = ()$.

- A. $-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
- B. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
- C. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$
- D. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

19. 下列各式不正确的是 ().

- A. 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 同向, 则 $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$
- B. 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 不共线, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| > |\vec{a}| - |\vec{b}|$
- C. 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 反向, 则 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$
- D. 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 不共线, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$

20. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 BC 延长线上一点, 点 E 为线段 AD 的中点, 若 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CD}$, 且 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda = ()$.



- A. $-\frac{1}{4}$
- B. $\frac{1}{4}$
- C. $-\frac{1}{3}$
- D. $\frac{1}{3}$

三、共线向量定理及推论

1. 知识讲解

向量共线定理

向量共线的判定定理：

对于向量 $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$)、 $\vec{a}$ ，如果有一个实数 λ ，使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ，那么由向量数乘的定义知， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线。

向量共线的性质定理：

向量 $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) 与 $\vec{a}$ 共线，当且仅当有唯一的一个实数 λ ，使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ 。

推论：

若A、B、C三点共线，当且仅当存在唯一的一个实数 λ ，使得 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ 。

【探究一】

请采用分类讨论的思想仔细研究一定理中为何强调 $\vec{b}$ 是非零向量？

【探究二】

请证明如下结论：

对任意两个向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ，若存在不全为0的实数对 (λ, μ) ，使 $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线。

【提示】仍然是采取分类讨论的策略。

2. 例题精讲

21. 已知向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 不共线， $\vec{c} = k\vec{a} + \vec{b}$ ($k \in \mathbf{R}$)， $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ，如果 $\vec{c} // \vec{d}$ ，那么 ()。

- A. $k = -1$ 且 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 反向
- B. $k = 1$ 且 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 反向
- C. $k = -1$ 且 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 同向
- D. $k = 1$ 且 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 同向

22. 已知向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 是两个不共线的向量，且向量 $m\vec{a} - 3\vec{b}$ 与 $\vec{a} + (2-m)\vec{b}$ 共线，则实数 m 的值为 _____。

23. 已知 $\vec{e}_1$ ， $\vec{e}_2$ 是两个不共线向量， $\overrightarrow{AB} = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ ， $\overrightarrow{CD} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ，则A，B，C，D中一定共线的三点是 ()。

- A. A，B，C
- B. A，C，D
- C. B，C，D
- D. A，B，D

24.

已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是两个不共线的向量, $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - k\vec{e}_2$, 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是共线向量, 则实数 k 的值为 _____ .

25. 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{AN} = \frac{1}{4}\vec{AC}$, $\vec{BP} = \lambda\vec{BC}$, 且 P, M, N 三点在一条直线上, 则 $\lambda =$ _____ .

26. 设两个非零向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不共线, 如果 $\vec{AB} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{BC} = 2\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2$, $\vec{CD} = 3(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$.

(1) 求证: A, B, D 三点共线.

(2) 试确定实数 k 的值, 使 $k\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 和 $\vec{e}_1 + k\vec{e}_2$ 共线.

3. 课堂巩固

27. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线, 且向量 $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} + (2\lambda - 1)\vec{b}$ 的方向相反, 则实数 λ 的值为 () .

A. 1

B. $-\frac{1}{2}$

C. 1或 $-\frac{1}{2}$

D. -1或 $-\frac{1}{2}$

28. 若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线, 且 $\vec{a} + m\vec{b}$ 与 $\vec{b} - 3\vec{a}$ 共线, 则实数 m 的值为 () .

A. $\frac{1}{3}$

B. 3

C. -3

D. $-\frac{1}{3}$

29. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 是不共线的向量, $\vec{AB} = \vec{a} + 5\vec{b}$, $\vec{BC} = -2\vec{a} + 8\vec{b}$, $\vec{CD} = 3\vec{a} - 3\vec{b}$, 则 () .

A. A, B, D 三点共线

B. A, B, C 三点共线

C. B, C, D 三点共线

D. A, C, D 三点共线

30. 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是两个不共线的向量, $\vec{AB} = k\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{CD} = \vec{a} - 2\vec{b}$, 若 A, C, D 三点共线, 求实数 k 的值 _____ .

31. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC})$, $\vec{AD} = t\vec{AC}$, 若 B, O, D 三点共线, 则 t 的值为 () .

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

32. 设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是不共线的两个向量, 已知 $\vec{AB} = 2\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2$, $\vec{CB} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{CD} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

(1) 求证: A, B, D 三点共线.

(2) 若 $\vec{BF} = 3\vec{e}_1 - k\vec{e}_2$, 且 B, D, F 三点共线, 求 k 的值.