

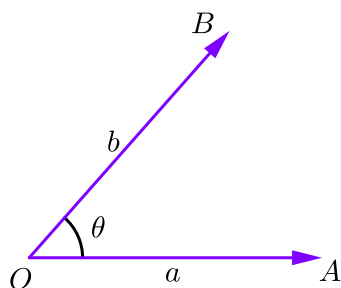
平面向量数量积

一、平面向量的数量积

1. 知识讲解

向量的夹角

①定义：已知两个非零向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ ，如图，作 $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ， $\vec{OB} = \mathbf{b}$ ，则 $\angle AOB = \theta$ 叫做向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夹角.



②向量夹角的范围： $[0, \pi]$

③向量夹角的特殊情形：

当 $\theta = 0^\circ$ 时，向量 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 共线且同向；

当 $\theta = 90^\circ$ 时，向量 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 相互垂直，记作 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ；

当 $\theta = 180^\circ$ 时，向量 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 共线且反向.

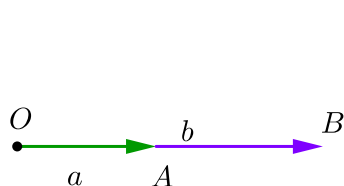


图 a

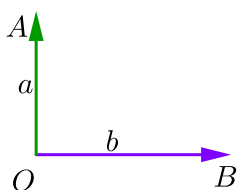


图 b

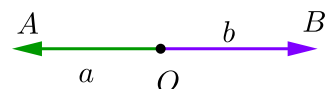
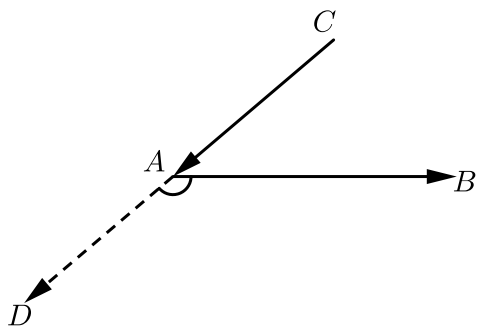


图 c

【注意】

①向量的夹角是针对非零向量定义的.

②按照向量夹角的定义，只有两个向量的起点重合时所对应的角才是两向量的夹角，如图所示， $\angle BAC$ 不是向量 $\vec{CA}$ 与 $\vec{AB}$ 的夹角，作 $\vec{AD} = \vec{CA}$ ，则 $\angle BAD$ 才是向量 $\vec{CA}$ 与 $\vec{AB}$ 的夹角.



向量的数量积

已知两个非零向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ ，我们把数量 $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ 叫做 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的数量积(或内积)，记作 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ，即 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ ，其中 θ 是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角.

我们规定，零向量与任一向量的数量积为0.

【注意】

①两向量的数量积，其结果是数量，而不是向量，提它的值为两向量的模与两向量夹角的余弦的乘积，其符号由夹角的余弦值决定.

②在运用数量积公式解题时，一定要注意两向量夹角的范围是 $[0, \pi]$.

③在书写两个向量的数量积时，中间点乘不能省略不写， $\mathbf{ab}$ 这种写法是错误的.

向量数量积的性质

下面给出根据平面向量数量积运算公式得到的一系列性质：

若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 是非零向量，则有：

$$1. \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} = 0;$$

$$2. |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}};$$

$$3. \text{若}\theta\text{为}\vec{a}、\vec{b}\text{的夹角，则有}\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|};$$

$$4. \text{当}\vec{a}\text{与}\vec{b}\text{同向时，}\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|; \text{当}\vec{a}\text{与}\vec{b}\text{反向时，}\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|; \text{因此，} |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

2. 例题精讲

1. 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 是三个非零向量，则下列命题中，真命题的个数是（ ）.

$$\textcircled{1} |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b};$$

$$\textcircled{2} \vec{a}、\vec{b}\text{反向} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|;$$

$$\textcircled{3} \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|;$$

$$\textcircled{4} |\vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】①②③正确，当 $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \neq \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle$ 或 $\pi = \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle$ 时，④错误。

【标注】【知识点】共线向量；平面向量数量积运算（非坐标）

2. 已知向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = 2$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120° ，则 $|\vec{a} - 3\vec{b}| = ()$.
A. $\sqrt{11}$ B. $\sqrt{37}$ C. $2\sqrt{10}$ D. $\sqrt{43}$

【答案】D

【解析】 $|\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 3\vec{b})^2$
 $= \vec{a}^2 + 9\vec{b}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b}$
 $= |\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 - 6|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ$
 $= 1 + 36 - 6 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$
 $= 43$ ，
 $\therefore |\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{43}$.
故选D .

【标注】【知识点】向量的模；利用向量数量积求模长

3. 已知向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = 2$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5}$ ，则 $|2\vec{a} - \vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】 $\because |\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = 2$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5}$ ，
 $\therefore |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，
 $\therefore 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 4 - 5 = 0$ ，
 $\therefore |2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 + 4 = 8$ ，
 $\therefore |2\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{2}$.
故答案为： $2\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】向量的模

3. 课堂巩固

4.

设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是向量, 则“ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ”是“ $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ”的() .

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 D

【解析】 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 成立, 则以 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为边组成平行四边形, 那么该平行四边形为菱形, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ 表示的是该菱形的对角线, 而菱形的对角线不一定相等, 所以 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ 不一定成立, 从而不是充分条件; 反之, $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ 成立, 则以 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为边组成平行四边形, 则该平行四边形为矩形, 矩形的邻边不一定相等, 所以 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 不一定成立, 从而不是必要条件.

故选D.

【标注】 【素养】 逻辑推理

【知识点】 充要条件与向量结合

【知识点】 向量的模

5. 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 均为单位向量, 它们的夹角为 60° , 那么 $|\vec{a} + 3\vec{b}| = ()$.

- A. $\sqrt{7}$
B. $\sqrt{10}$
C. $\sqrt{13}$
D. 4

【答案】 C

【解析】 方法一: $\because \vec{a}$, $\vec{b}$ 均为单位向量,

$$\therefore |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1,$$

又 $\because$ 两向量的夹角为 60° ,

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

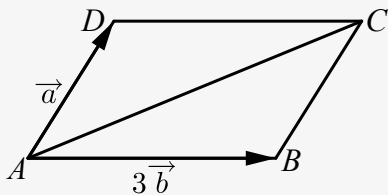
$$\begin{aligned} \therefore |\vec{a} + 3\vec{b}| &= \sqrt{|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b}} \\ &= \sqrt{1 + 9 + 3} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{13}.$$

故答案为 $\sqrt{13}$.

故选C.

方法二: 利用加法的平行四边形法则, 如图,



$AD = |\vec{a}|$, $AB = |3\vec{b}|$, $AC = |\vec{a} + 3\vec{b}|$, 再由余弦定理, 可知
 $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ = 13$, 即 $AC = \sqrt{13}$.

【标注】【知识点】利用向量数量积求模长

6. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| = ()$.
- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. 3 D. $\sqrt{10}$

【答案】 D

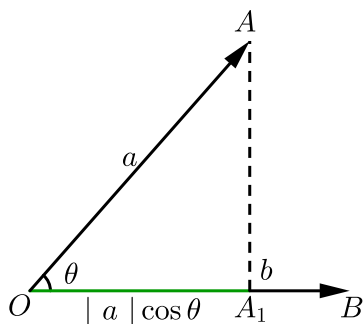
【解析】 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}}$
 $= \sqrt{9 + 4 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{16}$,
 $\therefore 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$,
 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{13 - 3} = \sqrt{10}$.
 综上所述, 答案选择D.

【标注】【知识点】向量的模; 向量的数量积的定义; 平面向量数量积运算 (非坐标); 利用向量数量积求模长

二、向量的投影

1. 知识讲解

①定义: $|\mathbf{a}|\cos\theta$ ($|\mathbf{b}|\cos\theta$) 叫做向量 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 方向上 ($\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 方向上) 的投影.



②几何意义：数量积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 等于 $\mathbf{a}$ 的长度 $|\mathbf{a}|$ 与 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 的方向上的投影 $|\mathbf{b}|\cos\theta$ 的乘积.

【注意】

投影是一个数，其大小与两个向量的夹角有关，如

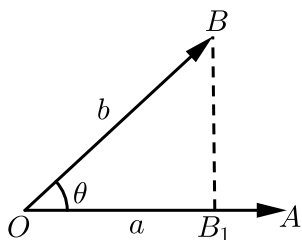
θ 为锐角时， $|\mathbf{b}|\cos > 0$

θ 为钝角时， $|\mathbf{b}|\cos < 0$

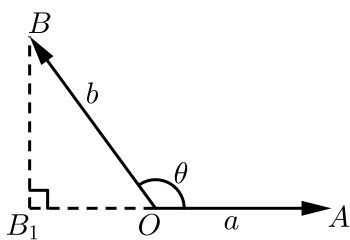
θ 为直角时， $|\mathbf{b}|\cos = 0$

$\theta = 0^\circ$ 时， $|\mathbf{b}|\cos = |\mathbf{b}|$

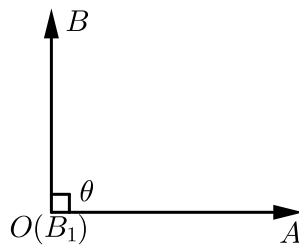
$\theta = 180^\circ$ 时， $|\mathbf{b}|\cos = -|\mathbf{b}|$



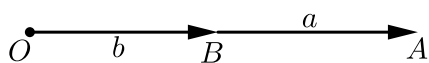
θ 为锐角时
 $|\mathbf{b}|\cos\theta > 0$



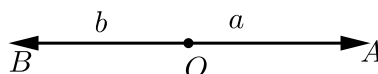
θ 为钝角时
 $|\mathbf{b}|\cos\theta < 0$



θ 为直角时
 $|\mathbf{b}|\cos\theta = 0$



$\theta = 0^\circ$ 时
 $|\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{b}|$



$\theta = 180^\circ$ 时
 $|\mathbf{b}|\cos\theta = -|\mathbf{b}|$

2. 例题精讲

7. 已知 $|\vec{a}| = 6$ ， $\vec{e}$ 是单位向量，当 $\vec{a}$ ， $\vec{e}$ 的夹角为 135° ，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{e}$ 方向上的投影向量（ ）.

A. $3\sqrt{2}$

B. 0

C. $3\sqrt{2}\vec{e}$

D. $-3\sqrt{2}\vec{e}$

【答案】D

【解析】 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{e}}{|\vec{e}|} = \frac{6 \times 1 \times \cos 135^\circ}{1} = -3\sqrt{2}$,

$\therefore \vec{a}$ 在 $\vec{e}$ 方向上的投影向量为 $-3\sqrt{2}\vec{e}$.

故选D .

【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；向量的数量积的定义

8. 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{5\pi}{6}$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影是 ()
- A. $\sqrt{3}$ B. $-2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$

【答案】 D

【解析】 根据条件, $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为:

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{5\pi}{6}}{|\vec{b}|} = |\vec{a}|\cos\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} .$$

故选D .

【标注】【知识点】向量的投影；利用投影解决平面向量的数量积

9. 已知 $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量的模长是 $\frac{2}{3}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 为 ____ .

【答案】 2或-2 .

【解析】 因为 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量的模长是 $\frac{2}{3}$,

$$\text{所以 } |\vec{a}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{2}{3} \text{ 或 } -\frac{2}{3} ,$$

$$\text{又 } |\vec{b}| = 3 ,$$

$$\text{所以 } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{2}{3} \times 3 = 2 \text{ 或 } -2 .$$

故答案为: 2或-2 .

【标注】【知识点】向量的投影；平面向量数量积运算（非坐标）；利用投影解决平面向量的数量积；向量的数量积的定义

3. 课堂巩固

10. 已知非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 4$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影的数量为 ____ .

【答案】 -2

【解析】 因为 $|\vec{a}| = 4$, $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \cos \frac{2\pi}{3}$,

所以 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为：

$$|\vec{a}| \times \cos \frac{2\pi}{3} = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

故答案为：-2.

【标注】【知识点】向量的投影；利用投影解决平面向量的数量积

11. $|\vec{a}| = 2$ ，向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角为 120° ，则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向的投影等于_____.

【答案】 -1

【解析】 $\because |\vec{a}| = 2$ ，向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角为 120° ，

$\therefore$ 向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $|\vec{a}| \cos \theta = 2 \times \cos 120^\circ = -1$.

【标注】【知识点】向量的投影；利用投影解决平面向量的数量积

12. 已知向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影为-2，且 $|\vec{b}| = 3$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____。（结果用数值表示）

【答案】 -6

【解析】 由题意得： $|\vec{a}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -2$.

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -2 \cdot 3 = -6.$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 3 \times (-2) = -6.$$

【标注】【知识点】利用投影解决平面向量的数量积；平面向量数量积运算（非坐标）；向量的数量积的定义；向量的投影

三、数量积的运算律

1. 知识讲解

(1) 交换律

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

(2) 结合律

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$$

(3) 分配律

$$(a+b)c = a \cdot c + b \cdot c.$$

(4)应用运算律得到的两个重要结论:

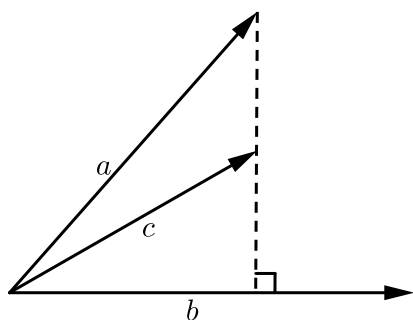
$$(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2,$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

【温馨提示】

①两向量的数量积不是向量而是数量,要准确区分两向量数量积、数乘向量和实数与实数乘积间的运算性质.

②若 $a, b, c(b \neq 0)$ 为实数,则 $ab = bc \Rightarrow a = c$;但对于向量,就不正确,即 $a \cdot b = b \cdot c \nRightarrow a = c$,由下图可以看出.



③数量积的运算只适合交换律、加乘分配律及数乘结合律,但不适合乘法结合律,即 $(a \cdot b)c$ 不一定等于 $a(b \cdot c)$.这是因为 $(a \cdot b)c$ 表示一个与 c 共线的向量,而 $a(b \cdot c)$ 表示一个与 a 共线的向量,而 c 与 a 不一定共线.

2. 例题精讲

13. 下列命题中正确的是 ____ .

①边长为1的等边三角形 ABC , $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}$.

②若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$.

③ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

④ $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$.

⑤ $(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2$.

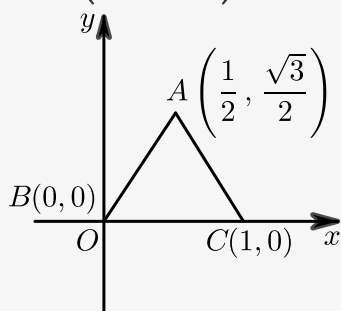
⑥ $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$.

⑦ $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

【答案】 ③⑥⑦

【解析】 ①错

将等边 $\triangle ABC$ 放置在直角坐标系中，如图所示， $B(0,0)$ ， $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $C(1,0)$ ， $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $\overrightarrow{BC} = (1,0)$ ， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$ 。



②错

$\because \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ，
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 时， $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$ 或 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ ，即夹角为 90° 。

③正确，符合乘法交换律。

④错。

⑤错， $(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + |\vec{b}|^2$ 。

⑥正确。

⑦正确。

故答案为：③⑥⑦。

【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；平面向量数量积的运算律

14. 已知 $|\vec{a}| = 3$ ， $|\vec{b}| = 2$ ， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° ，如果 $(3\vec{a} + 5\vec{b}) \perp (m\vec{a} - \vec{b})$ ，则 m 的值为 ()
- A. $\frac{32}{23}$ B. $\frac{23}{42}$ C. $\frac{29}{42}$ D. $\frac{42}{32}$

【答案】 C

【解析】 $\because |\vec{a}| = 3$ ， $|\vec{b}| = 2$ ， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60°

$$\therefore |\vec{a}|^2 = 9, |\vec{b}|^2 = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = 3$$

则

$$(3\vec{a} + 5\vec{b}) \cdot (m\vec{a} - \vec{b}) = 3m|\vec{a}|^2 - 5|\vec{b}|^2 + (5m - 3)\vec{a} \cdot \vec{b} = 27m - 20 + 3(5m - 3) = 42m - 29$$

$$\text{又} \because (3\vec{a} + 5\vec{b}) \perp (m\vec{a} - \vec{b}),$$

$$\therefore 42m - 29 = 0$$

$$\therefore m = \frac{29}{42}$$

故选 C；

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 + \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{8}{3}}} \\
 &= \frac{\sqrt{6}}{3} .
 \end{aligned}$$

故选C .

【标注】【知识点】向量的投影

17. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -6$, 且 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 _____ .

【答案】 $\frac{\pi}{3}$

【解析】 设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ ,

$\because$ 向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -6$, 且 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$,

$\therefore \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = 1 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 8 = -6$, $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$,

$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{2}$, 再由 θ 的范围为 $[0, \pi]$, 可得 $\theta = \frac{\pi}{3}$,

故答案为 : $\frac{\pi}{3}$.

【标注】【知识点】向量的夹角的判断 ; 利用向量数量积求夹角

18. 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均为非零向量 , 且 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \perp \vec{a}$, $(\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b}$, 则 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 _____ .

【答案】 $\frac{\pi}{3}$

【解析】 因为 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均为非零向量 , 且 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \perp \vec{a}$, $(\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b}$,

所以 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \perp \vec{a} = 0$, $(\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b} = 0$.

所以 $\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

所以 $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$.

所以 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a}^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{2}$,

所以夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

【标注】【知识点】向量的夹角的判断 ; 利用向量数量积求夹角

19. 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夹角是 60° , 且 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 若向量 $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ 与向量 $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角是钝角 , 则实数 λ 的取值范围是 _____ .

【答案】 $\lambda \in \left(\frac{-5-\sqrt{21}}{2}, \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \right)$ 且 $\lambda \neq -1$

【解析】 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 与 $\lambda \vec{a} + \vec{b}$ 夹角为钝角

$$\Leftrightarrow (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\lambda \vec{a} + \vec{b}) < 0,$$

且 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 与 $\lambda \vec{a} + \vec{b}$ 不反向,

$$(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\lambda \vec{a} + \vec{b}) < 0,$$

$$\lambda \vec{a}^2 + \lambda \vec{b}^2 + (\lambda^2 + 1) \vec{a} \cdot \vec{b} < 0,$$

$$\lambda + 4\lambda + (\lambda^2 + 1) |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ < 0,$$

$$5\lambda + \lambda^2 + 1 < 0.$$

【标注】 【知识点】平面向量数量积的运算律；利用向量数量积求夹角；向量的夹角的判断

20. 若两个非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 2|\vec{a}|$, 则向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夹角是 ().

A. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{2\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{3}$
D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】 C

【解析】 方法一：由 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ 两边平方得 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$,

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

$$\text{由 } |\vec{a} + \vec{b}| = 2|\vec{a}|, \text{ 两边平方得 } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2,$$

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 4|\vec{a}|^2, \text{ 将 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ 代入 } |\vec{b}|^2 = 3|\vec{a}|^2,$$

$$\cos \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot 2|\vec{a}|} = \frac{-2|\vec{a}|^2}{4|\vec{a}|^2} = -\frac{1}{2},$$

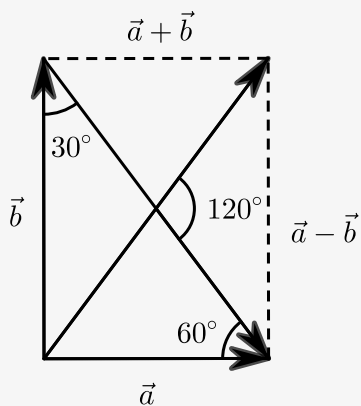
$$\text{故 } \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \frac{2}{3}\pi.$$

故选C.

$$\text{方法二：} \because |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 2|\vec{a}|$$

$\therefore$ 由向量运算的平行四边形法则和减法运算法则有

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$



$$\text{又} \because |\vec{a} - \vec{b}| = 2|\vec{a}|$$

$\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 所成角为 120° .

【标注】【知识点】向量的夹角的判断

21. 已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为1, 则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (\quad)$.

A. 3

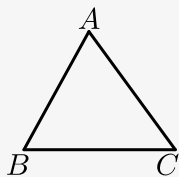
B. -3

C. $\frac{3}{2}$

D. $-\frac{3}{2}$

【答案】 D

【解析】



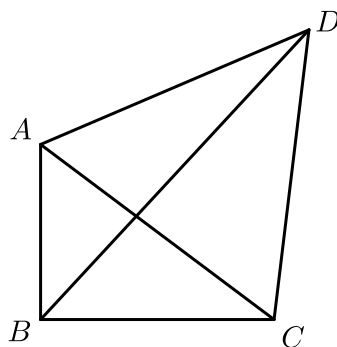
$$\begin{aligned} & \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{CA} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= -\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= -|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}| \cos 120^\circ \\ &= -1 + 1 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{3}{2} . \end{aligned}$$

故选：D .

【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；线性运算和数量积综合问题；平面向量数量积的运算律

22.

如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \perp BC$ ， $AB = 6$ ， $BC = 8$ ， $\triangle ACD$ 是等边三角形，则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ 的值为_____。



【答案】 14

【解析】 $\because AB = 6$ ， $BC = 8$ ， $\angle B = 90^\circ$ ，

$$\therefore AC = 10, AD = 10,$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= 10 \times 6 \times \left(-\frac{3}{5}\right) + 10 \times 10 \times \frac{1}{2} = -36 + 50 = 14.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律；线性运算和数量积综合问题

3. 课堂巩固

23. 下面给出的关系式中正确的个数是（ ）。

① $\vec{0} \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

② $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

③ $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

④ $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$.

⑤ $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \vec{a} \cdot \vec{b}$.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】 C

【解析】 ① $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$ ，因此不正确；

② $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ，满足交换律，正确；

③ $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ ，正确；

④ 由于 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 不一定共线，因此 $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$ 不正确；

⑤当 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 为钝角时 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \vec{a} \cdot \vec{b}$ 显然错误.

综上可得:只有②③正确.

故选:C.

【标注】【知识点】平面向量运算律辨析问题

24. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 是两个相互垂直的单位向量, 向量 $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 垂直, 则实数 $\lambda =$ _____.

【答案】-2

【解析】依题意有 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 于是 $(\lambda\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = \lambda + 2 = 0$, 所以 $\lambda = -2$.

故答案为:-2.

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律; 线性运算和数量积综合问题

25. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$, 且 $(4\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 为().

A. $\sqrt{3}$

B. 3

C. 3

D. $\sqrt{6}$

【答案】A

【解析】 $(4\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$
 $\therefore (4\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0,$
 $\therefore 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 0,$
 $\therefore 4\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{b}|^2 = -4,$
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -1,$
 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2$
 $= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$
 $= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2$
 $= 1 + 4 - 2 = 3,$
 $\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}.$

【标注】【知识点】利用向量数量积求模长; 平面向量数量积的运算律

26. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° , $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5$, 则 $2\vec{a} - \vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影为().

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

【答案】 B

【解析】 $\because |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5, \text{ 且 } \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 60^\circ,$
 $\therefore (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 2\vec{a}^2 - \vec{b} \cdot \vec{a} = 2 \times 2^2 - 5 \times 2 \times \cos 60^\circ = 3,$
 $\therefore 2\vec{a} - \vec{b} \text{ 在 } \vec{a} \text{ 方向上的投影为 } \frac{(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{3}{2}.$

故选B.

【标注】【知识点】向量的投影；利用投影解决平面向量的数量积

27. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$, 且 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 3$, 则 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = ()$.

A. 60° B. 75° C. 90° D. 120° **【答案】** D

【解析】 因为 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 4 + 2 \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 3,$
 所以 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\frac{1}{2}$, 所以 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 120^\circ$. 故选D

【标注】【知识点】利用向量数量积求夹角；向量的夹角的判断

28. 已知 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是非零向量且满足 $(3\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}, (4\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 ().

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2}{3}\pi$ D. $\frac{5}{6}\pi$ **【答案】** A

【解析】 设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 α ,
 $\because (3\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}, (4\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b},$
 $\therefore (3\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0, (4\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0,$
 即 $3\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, 4\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = 0.$
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 3\vec{a}^2, \vec{b}^2 = 12\vec{a}^2,$
 $\therefore \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3\vec{a}^2}{2\sqrt{3}\vec{a}^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$
 $\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}.$

故选A.

【标注】【知识点】利用向量数量积求夹角；利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）

29. 已知 $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_2$ 是两个互相垂直的单位向量，若向量 $\vec{e}_1 + k\vec{e}_2$ 与 $k\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 的夹角为锐角，则 k 的取值范围为_____.

【答案】 $\{k|k > 0 \text{ 且 } k \neq 1\}$

【解析】 $\because \vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_2$ 是两个互相垂直的单位向量，

$$\therefore \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0,$$

$\because \vec{e}_1 + k\vec{e}_2$ 与 $k\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 的夹角为锐角，

$$\therefore (\vec{e}_1 + k\vec{e}_2)(k\vec{e}_1 + \vec{e}_2) > 0,$$

$$\text{即 } k\vec{e}_1^2 + k\vec{e}_2^2 > 0,$$

$$\text{即 } 2k > 0,$$

$$\therefore k > 0,$$

若 $\vec{e}_1 + k\vec{e}_2$ 与 $k\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 方向相同，

$$\text{则存在实数 } \lambda > 0, \text{ 使得 } \begin{cases} 1 = k\lambda \\ k = \lambda \end{cases},$$

$$\text{解得 } k = \lambda = 1,$$

$$\therefore \{k|k > 0 \text{ 且 } k \neq 1\}.$$

【标注】【知识点】向量的夹角的判断；利用向量数量积求夹角；向量的数量积的定义

30. 若 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 为非零向量， $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为（ ）.

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

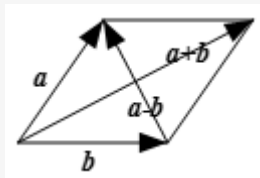
【答案】A

【解析】如图：

由题可知 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，所以四边

形为一角为 60° 的菱形，

所以， $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 30° .



【标注】【知识点】利用向量数量积求夹角；向量的夹角的判断

31. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 等于 () .

A. -16

B. -8

C. 8

D. 16

【答案】 D

【解析】 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AC}|^2 + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC},$$

$$\text{又 } |\overrightarrow{AC}| = 4, \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AC},$$

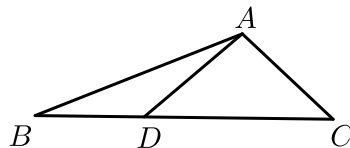
$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4^2 = 16.$$

故选D.

【标注】 【知识点】 向量的数量积的定义

32. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 120^\circ$, $AB = 2$, $AC = 1$, D 是边 BC 上的一点, $DC = 2BD$, 则

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \underline{\hspace{2cm}}.$$



【答案】 $-\frac{8}{3}$

【解析】 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = -1,$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{8}{3}.$$

【标注】 【知识点】 平面向量的加法运算及运算规则；平面向量数量积的运算律；平面向量数量积运算（非坐标）；线性运算和数量积综合问题