

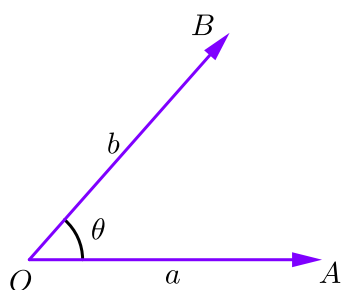
平面向量数量积

一、平面向量的数量积

1. 知识讲解

向量的夹角

①定义：已知两个非零向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ ，如图，作 $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ， $\vec{OB} = \mathbf{b}$ ，则 $\angle AOB = \theta$ 叫做向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夹角.



②向量夹角的范围： $[0, \pi]$

③向量夹角的特殊情形：

当 $\theta = 0^\circ$ 时，向量 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 共线且同向；

当 $\theta = 90^\circ$ 时，向量 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 相互垂直，记作 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ；

当 $\theta = 180^\circ$ 时，向量 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 共线且反向.

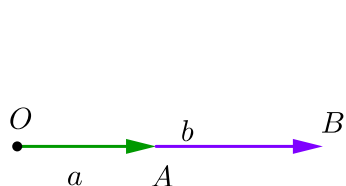


图 a

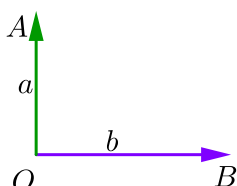


图 b

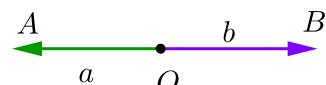
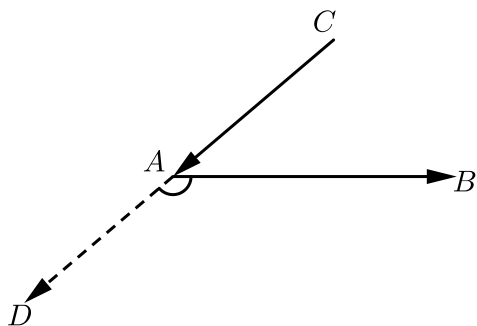


图 c

【注意】

①向量的夹角是针对非零向量定义的.

②按照向量夹角的定义，只有两个向量的起点重合时所对应的角才是两向量的夹角，如图所示， $\angle BAC$ 不是向量 $\vec{CA}$ 与 $\vec{AB}$ 的夹角，作 $\vec{AD} = \vec{CA}$ ，则 $\angle BAD$ 才是向量 $\vec{CA}$ 与 $\vec{AB}$ 的夹角.



向量的数量积

已知两个非零向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ ，我们把数量 $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ 叫做 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的数量积(或内积)，记作 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ，即 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ ，其中 θ 是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角.

我们规定，零向量与任一向量的数量积为0.

【注意】

①两向量的数量积，其结果是数量，而不是向量，提它的值为两向量的模与两向量夹角的余弦的乘积，其符号由夹角的余弦值决定.

②在运用数量积公式解题时，一定要注意两向量夹角的范围是 $[0, \pi]$.

③在书写两个向量的数量积时，中间点乘不能省略不写， $\mathbf{ab}$ 这种写法是错误的.

向量数量积的性质

下面给出根据平面向量数量积运算公式得到的一系列性质：

若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 是非零向量，则有：

$$1. \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} = 0;$$

$$2. |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}};$$

$$3. \text{若}\theta\text{为}\vec{a}、\vec{b}\text{的夹角，则有}\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|};$$

$$4. \text{当}\vec{a}\text{与}\vec{b}\text{同向时，}\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|; \text{当}\vec{a}\text{与}\vec{b}\text{反向时，}\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|; \text{因此，} |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

.

2. 例题精讲

1. 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 是三个非零向量，则下列命题中，真命题的个数是().

$$① |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b};$$

$$② \vec{a}、\vec{b}\text{反向} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|;$$

$$③ \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|;$$

$$\textcircled{4} |\vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a} \cdot \vec{c}| = |\vec{b} \cdot \vec{c}|.$$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

2. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120° , 则 $|\vec{a} - 3\vec{b}| = ()$.

A. $\sqrt{11}$

B. $\sqrt{37}$

C. $2\sqrt{10}$

D. $\sqrt{43}$

3. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5}$, 则 $|2\vec{a} - \vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 课堂巩固

4. 设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是向量, 则 “ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ” 是 “ $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ” 的 ().

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 均为单位向量, 它们的夹角为 60° , 那么 $|\vec{a} + 3\vec{b}| = ()$.

A. $\sqrt{7}$

B. $\sqrt{10}$

C. $\sqrt{13}$

D. 4

6. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| = ()$.

A. $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{5}$

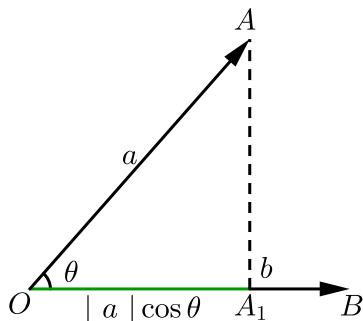
C. 3

D. $\sqrt{10}$

二、向量的投影

1. 知识讲解

①定义: $|\vec{a}|\cos\theta$ ($|\vec{b}|\cos\theta$) 叫做向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上 ($\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上) 的投影.



②几何意义: 数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 等于 $\vec{a}$ 的长度 $|\vec{a}|$ 与 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 的方向上的投影 $|\vec{b}|\cos\theta$ 的乘积.

【注意】

投影是一个数, 其大小与两个向量的夹角有关, 如

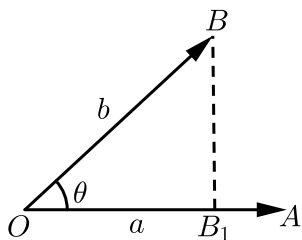
θ 为锐角时, $|\vec{b}|\cos\theta > 0$

θ 为钝角时, $|\vec{b}|\cos\theta < 0$

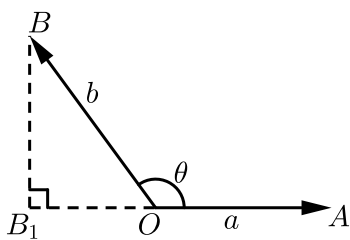
θ 为直角时, $|\mathbf{b}|\cos\theta = 0$

$\theta = 0^\circ$ 时, $|\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{b}|$

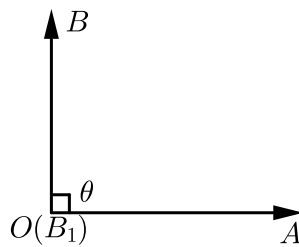
$\theta = 180^\circ$ 时, $|\mathbf{b}|\cos\theta = -|\mathbf{b}|$



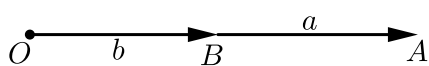
θ 为锐角时
 $|\mathbf{b}|\cos\theta > 0$



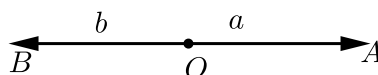
θ 为钝角时
 $|\mathbf{b}|\cos\theta < 0$



θ 为直角时
 $|\mathbf{b}|\cos\theta = 0$



$\theta = 0^\circ$ 时
 $|\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{b}|$



$\theta = 180^\circ$ 时
 $|\mathbf{b}|\cos\theta = -|\mathbf{b}|$

2. 例题精讲

7. 已知 $|\vec{a}| = 6$, $\vec{e}$ 是单位向量, 当 $\vec{a}$, $\vec{e}$ 的夹角为 135° , 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{e}$ 方向上的投影向量() .

A. $3\sqrt{2}$

B. 0

C. $3\sqrt{2}\vec{e}$

D. $-3\sqrt{2}\vec{e}$

8. 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{5\pi}{6}$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影是()

A. $\sqrt{3}$

B. $-2\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $-\sqrt{3}$

9. 已知 $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量的模长是 $\frac{2}{3}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 为_____ .

3. 课堂巩固

10. 已知非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 4$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2}{3}\pi$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影的数量为_____ .

11. $|\vec{a}| = 2$, 向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角为 120° , 则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向的投影等于_____ .

12. 已知向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影为 -2 , 且 $|\vec{b}| = 3$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____ . (结果用数值表示)

三、数量积的运算律

1. 知识讲解

(1)交换律

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

(2)结合律

$$(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) = a \cdot (\lambda b)$$

(3)分配律

$$(a + b)c = a \cdot c + b \cdot c.$$

(4)应用运算律得到的两个重要结论:

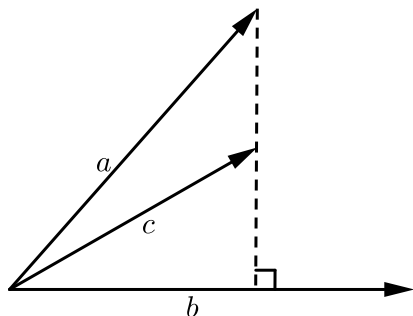
$$(a + b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2,$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

【温馨提示】

①两向量的数量积不是向量而是数量，要准确区分两向量数量积、数乘向量和实数与实数乘积间的运算性质.

②若 a ， b ， $c(b \neq 0)$ 为实数，则 $ab = bc \Rightarrow a = c$ ；但对于向量，就不正确，即 $a \cdot b = b \cdot c \nRightarrow a = c$ ，由下图可以看出.



③数量积的运算只适合交换律、加乘分配律及数乘结合律，但不适合乘法结合律，即 $(a \cdot b)c$ 不一定等于 $a(b \cdot c)$.这是因为 $(a \cdot b)c$ 表示一个与 c 共线的向量，而 $a(b \cdot c)$ 表示一个与 a 共线的向量，而 c 与 a 不一定共线.

2. 例题精讲

13. 下列命题中正确的是 _____ .

①边长为1的等边三角形 ABC ， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}$.

②若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，则 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$.

③ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

④ $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$.

$$\textcircled{5} \left(\vec{a} + \vec{b} \right)^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2.$$

$$\textcircled{6} \left(\vec{a} - \vec{b} \right) \left(\vec{a} + \vec{b} \right) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2.$$

$$\textcircled{7} \vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c} \right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

14. 已知 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° , 如果 $(3\vec{a} + 5\vec{b}) \perp (m\vec{a} - \vec{b})$, 则 m 的值为 (

)

A. $\frac{32}{23}$

B. $\frac{23}{42}$

C. $\frac{29}{42}$

D. $\frac{42}{32}$

15. 已知 $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 61$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____.

16. 已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为单位向量, 且 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2}|\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{a} + \vec{b}$ 上的投影为 ().

A. $\frac{1}{3}$

B. $-\frac{2\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

17. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -6$, 且 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 _____.

18. 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均为非零向量, 且 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \perp \vec{a}$, $(\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b}$, 则 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 _____.

19. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角是 60° , 且 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 若向量 $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ 与向量 $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角是钝角, 则实数 λ 的取值范围是 _____.

20. 若两个非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 2|\vec{a}|$, 则向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夹角是 (

)

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

21. 已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为 1, 则 $\vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{BC} =$ ().

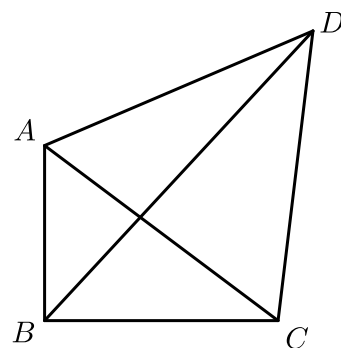
A. 3

B. -3

C. $\frac{3}{2}$

D. $-\frac{3}{2}$

22. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp BC$, $AB = 6$, $BC = 8$, $\triangle ACD$ 是等边三角形, 则 $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$ 的值为 _____.



3. 课堂巩固

23. 下面给出的关系式中正确的个数是 () .

- ① $\vec{0} \cdot \vec{a} = \vec{0}$.
- ② $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
- ③ $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.
- ④ $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$.
- ⑤ $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \vec{a} \cdot \vec{b}$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

24. 已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是两个相互垂直的单位向量, 向量 $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 垂直, 则实数 $\lambda =$ _____ .

25. 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 且 $(4\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 为 () .

A. $\sqrt{3}$ B. 6 C. 3 D. $\sqrt{6}$

26. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° , $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, 则 $2\vec{a} - \vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影为 () .

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$
C. 2 D. $\frac{5}{2}$

27. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, 且 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 3$, 则 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$ () .

A. 60° B. 75° C. 90° D. 120°

28. 已知 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是非零向量且满足 $(3\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}$, $(4\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 () .

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{2}{3}\pi$ D. $\frac{5}{6}\pi$

29. 已知 $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_2$ 是两个互相垂直的单位向量, 若向量 $\vec{e}_1 + k\vec{e}_2$ 与 $k\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 的夹角为锐角, 则 k 的取值范围为 _____ .

30. 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为非零向量, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 ().

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

31. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ 等于 ().

A. -16

B. -8

C. 8

D. 16

32. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 120^\circ$, $AB = 2$, $AC = 1$, D 是边 BC 上的一点, $DC = 2BD$, 则 $\vec{AD} \cdot \vec{BC} =$ _____.

