

平面向量基本定理与坐标运算

一、平面向量基本定理

1. 知识讲解

平面向量基本定理

如果 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ，是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任意向量 $\mathbf{a}$ ，有且只有一对实数 λ_1, λ_2 ，使 $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2$.

我们把不共线的向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底.

【温馨提示】

(1) 同一平面内，只要是一组不共线的非零向量，都可以作为基底，基底不同，那么同一向量对基底的分解结果就是不同的.

(2) 平面内任意一个向量都可以用该平面内的一组不共线的非零向量线性表示，这是平面向量基本定理的语言表述.

(3) 若给定了基底，那么分解形式是唯一的，也就是说，当 $\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ 给定，则 λ_1, λ_2 有唯一解.

(4) 由于零向量与任何向量都共线，因此零向量不能作为基底中的向量.

(5) 平面向量基本定理还可以稍加拓展为如下结论：

对于平面内任意三个不共线的向量中，任何一个向量都可表示为其余两个向量的线性组合且形式唯一.

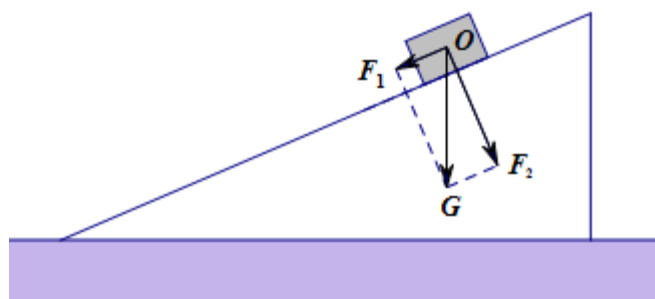
平面向量的正交分解和坐标表示

(1) 向量的正交分解

由平面向量的基本定理，对平面上的任意向量 $\vec{a}$ ，均可以分解为不共线的两个向量 $\lambda_1 \vec{a}_1$ 和 $\lambda_2 \vec{a}_2$ ，使 $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$.

在不共线的两个向量中，垂直是一种重要的情形. 把一个向量分解为两个互相垂直的向量，叫做把向量正交分解.

如下图：

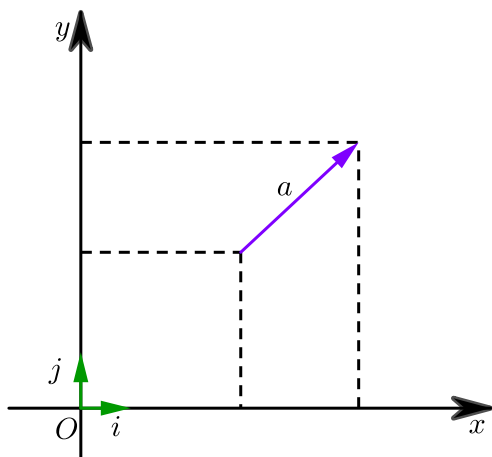


对于斜面上静止的物块，重力 $\mathbf{G}$ 沿互相垂直的两个方向分解就是正交分解．正交分解是向量分解中常见的一种情形．

在平面上，如果选取互相垂直的向量作为基底时，会为我们研究问题带来方便．

(2)平面向量的坐标表示

在平面直角坐标系内，分别取与 x 轴、 y 轴方向相同的两个单位向量 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 作为基底，任作一个向量 $\mathbf{a}$ ，如图，由平面向量基本定理可知，有且仅有一对实数 x 、 y ，使 $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ， (x, y) 叫做向量 $\mathbf{a}$ 的(直角)坐标，记作 $\mathbf{a} = (x, y)$ ，叫做 $\mathbf{a}$ 在 x 轴上的坐标， y 叫做 $\mathbf{a}$ 在 y 轴上的坐标， $\mathbf{a} = (x, y)$ 叫做向量的坐标表示.



显然 $\mathbf{i} = (1, 0)$ ， $\mathbf{j} = (0, 1)$ ， $\mathbf{0} = (0, 0)$.

【温馨提示】

(1)点的坐标与向量的坐标的区别与联系

区别	表示形式不同	向量 $\mathbf{a} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 中间用等号连接，而点 $A(x, y)$ 中间没有等号
	意义不同	点 $A(x, y)$ 的坐标 (x, y) 表示点 A 在平面直角坐标系中的位置， $\mathbf{a} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的坐标 (x, y) 既表示向量的大小，也表示向量的方向
联系		当平面向量的起点在原点时，平面向量的坐标与向量终点的坐标相同

注意：

(1) 学习了向量的坐标表示后， (x, y) 在平面直角坐标系内就有两层意义了，所以以后要加以区分，表示点坐标时称点 (x, y) ，表示向量时称向量 (x, y) 。

(2) 要把点坐标和向量坐标区分开，向量相等，则对应横纵坐标一定相同，但是始点和终点的坐标却可以不同。

2. 例题精讲

1. 关于平面向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ ，有下列四个命题：

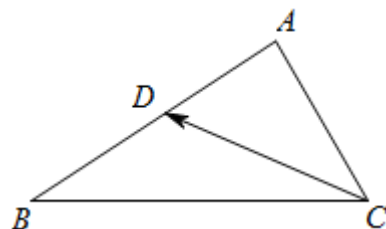
- ①若 $\vec{a} // \vec{c}$ ， $\vec{a} \neq \vec{0}$ ，则存在 $\lambda \in \mathbf{R}$ ，使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ ；
- ②若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，则 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$ ；
- ③存在不全为零的实数 λ, μ ，使得 $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ ；
- ④若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b} - \vec{c}$ 都是非零向量且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ，则 $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$ 。

其中正确的命题的序号是 _____。

2. 如果 $\vec{e}_1$ ， $\vec{e}_2$ 是平面内一组不共线的向量，那么下列四组向量中，不能作为平面内所有向量的一组基底的是（ ）。

- A. $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$
- B. $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$
- C. $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$
- D. $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ 与 $-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

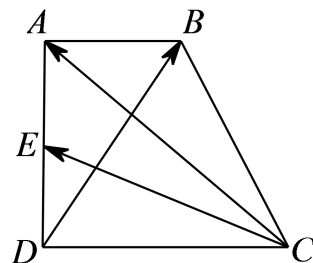
3. 如图, D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点, 则向量 $\overrightarrow{CD}$ 等于 ().



- A. $\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
 B. $\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
 C. $-\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
 D. $-\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

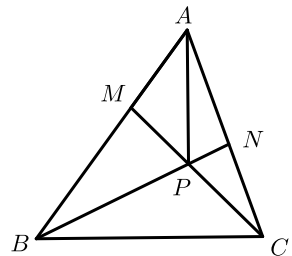
4. 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E 是 AD 的中点, 若 $\overrightarrow{BE} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu =$ ().
 A. 1 B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $-\frac{1}{2}$

5. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AD \perp DC$, $AD = DC = 2AB$, E 为 AD 的中点, 若 $\overrightarrow{CA} = \lambda\overrightarrow{CE} + \mu\overrightarrow{DB}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 ().



- A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{8}{5}$ C. 2 D. $\frac{8}{3}$

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上分别取点 M 、 N , 使 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, BN 与 CM 交于点 P , 若 $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{PM} = \mu\overrightarrow{CP}$, 则 $\frac{\lambda}{\mu}$ 的值为 ().



- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{1}{6}$ D. 6

3. 课堂巩固

7. 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是平面内两个不共线的向量, 给出下列四个命题:

- ① $\lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2 (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$ 可以表示平面内的所有向量;
- ②对于平面内的任意向量 $\vec{a}$, 使 $\vec{a} = \lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2$ 的实数 λ, μ 有无数对;
- ③若向 $\lambda_1\vec{e}_1 + \mu_1\vec{e}_2$ 与 $\lambda_2\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2$ 共线, 则有且只有一个实数 λ , 使得 $\lambda_1\vec{e}_1 + \mu_1\vec{e}_2 = \lambda(\lambda_2\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2)$;
- ④若存在实数 λ, μ , 使 $\lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2 = \vec{0}$, 则 $\lambda = \mu = 0$,

其中假命题的是 ().

- A. ①② B. ②③ C. ③④ D. 仅②

8. 设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是平面内所有向量的一组基底, 则下列四组向量中, 不能作为基底的是 ().

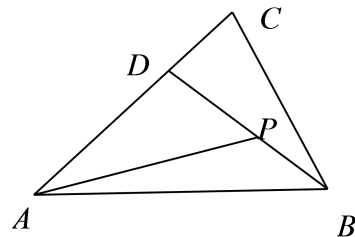
- A. $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 和 $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$
- B. $3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ 和 $6\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2$
- C. $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ 和 $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$
- D. $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

9. 已知在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, 设 $\vec{CB} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$, 则 $\vec{AM} =$ ().

- A. $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$
- B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$
- C. $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
- D. $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

10. 已知 $\triangle ABC$ 中, D 为边 BC 上的点, 且 $2BD = DC$, 若 $\vec{AD} = m\vec{AB} + n\vec{AC} (m, n \in \mathbf{R})$, 则 $m - n =$ _____.

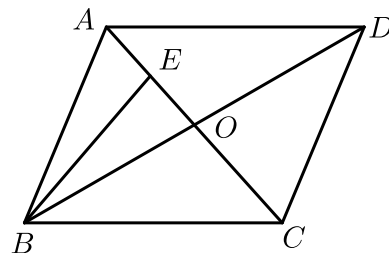
11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AC}$, $\vec{BP} = \frac{1}{3}\vec{BD}$, 若 $\vec{AP} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 ().



- A. $\frac{8}{9}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

12. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, AC, BD 相交于点 O , E 为线段 AO 的中点, 若

$\vec{BE} = \lambda\vec{BA} + \mu\vec{BD} (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$, 则 $\lambda + \mu =$ _____.



二、平面向量的坐标运算

1. 知识讲解

线性运算及数量积坐标表示

(1) 若 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

(2) 若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2),$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0,$$

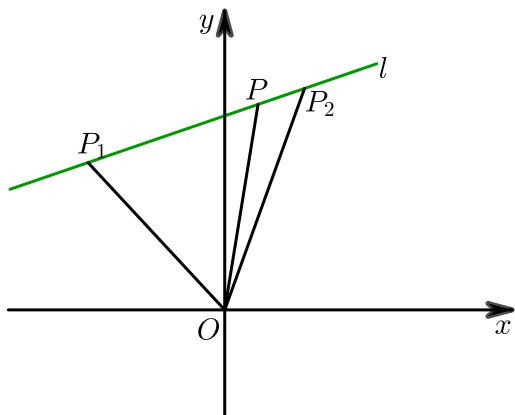
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0,$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}},$$

定比分点的坐标表示

(1) 线段定比分点的定义

如图, 设 P_1, P_2 是直线 l 上两点, 点 P 是 l 上不同于 P_1, P_2 的任意一点, 则存在一个实数 λ , 使 $\vec{P_1P} = \lambda \vec{P_1P_2}$, λ 叫做点 P 分有向线段 $\vec{P_1P_2}$ 所成的比, P 点叫做有向线段 $\vec{P_1P_2}$ 以 λ 为定比的定比分点.



(2)定比分点的坐标表示

设 O 为坐标原点,若 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P(x, y)$, $\vec{P_1P} = \lambda \vec{PP_2}$,

$$\vec{OP} = \frac{1}{1+\lambda} \vec{OP_1} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \vec{OP_2},$$

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \end{cases}$$

故点 P 的坐标为 $(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda})$.

【温馨提示】

在使用定比分点坐标公式时,应明确 (x, y) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 的意义,它们分别为分点、始点、终点的坐标但在具体问题的计算中,往往是自行确定始点、分点、终点,因此应用时要注意对应.

2. 例题精讲

坐标表示

13. 已知点 $A(0, 1)$, $B(3, 2)$, 向量 $\vec{AC} = (-4, -3)$, 则向量 $\vec{BC} = ()$.

A. $(-7, -4)$

B. $(7, 4)$

C. $(-1, 4)$

D. $(1, 4)$

14. 已知 $\vec{a} = (5, -2)$, $\vec{b} = (-4, -3)$, $\vec{c} = (x, y)$, 若 $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$, 则 $\vec{c}$ 等于 $()$.

A. $(-\frac{13}{3}, -\frac{4}{3})$

B. $(1, \frac{8}{3})$

C. $(\frac{13}{3}, \frac{8}{3})$

D. $(\frac{14}{3}, \frac{4}{3})$

平行垂直问题

15. 已知 $A(2, 3)$, $B(-4, 5)$, 则与 $\vec{AB}$ 共线的单位向量是 $()$.

A. $\vec{e} = (-\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10})$

B. $\vec{e} = (-\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10})$ 或 $\vec{e} = (\frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10})$

C. $\vec{e} = (-6, 2)$

D. $\vec{e} = (-6, 2)$ 或 $\vec{e} = (6, -2)$

16. 若 $\vec{OA} = (7, 4)$, $\vec{OB} = (4, 0)$, 则与向量 $\vec{BA}$ 垂直的单位向量是 ().

A. $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

B. $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

C. $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

D. $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

17. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (1, 0)$, $\vec{c} = (3, 4)$. 若 λ 为实数, $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) // \vec{c}$, 则 $\lambda =$ ().

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

18.

已知点 $A(-1, 2)$, $B(1, -3)$, 点 P 在线段 AB 的延长线上, 且 $\frac{|\vec{AP}|}{|\vec{PB}|} = 3$, 则点 P 的坐标为 ().

A. $\left(3, -\frac{11}{2}\right)$

B. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$

C. $\left(2, -\frac{11}{2}\right)$

D. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$

19. 设向量 $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{b} = (2, -2)$, 若 $(\lambda\vec{a} + \vec{b}) \perp (\lambda\vec{a} - \vec{b})$, 则实数 $\lambda =$ ().

A. ± 1

B. 0

C. $\pm\sqrt{2}$

D. ± 2

20. 已知两点 $A(1, 0)$, $B(1, \sqrt{3})$, O 为坐标原点, 点 C 在第二象限, 且 $\angle AOC = 120^\circ$, 设

$\vec{OC} = -2\vec{OA} + \lambda\vec{OB} (\lambda \in \mathbf{R})$, 则 λ 等于 ().

A. -1

B. 2

C. 1

D. -2

向量夹角

21. 向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-2, -4)$, $|\vec{c}| = \sqrt{5}$, 若 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \frac{5}{2}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为 ().

A. 30°

B. 60°

C. 120°

D. 150°

22. 已知 $\vec{a} = (x+1, 2)$, $\vec{b} = (4, -7)$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角, 则 x 的取值范围为 ____.

投影问题

23. 已知向量 $\vec{OA} = (2, 10)$, $\vec{OB} = (4, 3)$, 则向量 $\vec{AB}$ 在向量 $\vec{OB}$ 方向上的投影为 ().

A. 13

B. $\frac{13}{5}$

C. $-\frac{13}{5}$

D. $\frac{38}{5}$

模长与数量积

24. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 向量 $\vec{a} = (x, 1)$, $\vec{b} = (1, y)$, $\vec{c} = (2, -4)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} // \vec{c}$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| = ()$.
- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $\sqrt{10}$ D. 10
25. 已知平面向量 $\vec{a} = (2, 4)$, $\vec{b} = (-1, 2)$. 若 $\vec{c} = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b}$, 则 $|\vec{c}| = \underline{\hspace{2cm}}$.
26. 平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角 $\frac{2\pi}{3}$, $\vec{a} = (2, 0)$, $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\sqrt{3}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的值为 $()$.
- A. $2\sqrt{3}$ B. $-2\sqrt{3}$ C. -2 D. 2

3. 课堂巩固

坐标表示

27. 已知 $\vec{AB} = (3, 4)$, A 点坐标为 $(-2, -1)$, 则 B 点坐标为 $()$.
- A. $(5, 5)$ B. $(-5, -5)$ C. $(1, 3)$ D. $(-5, 5)$
28. 已知向量 $\vec{a} = (2, 4)$, $\vec{b} = (-1, 1)$, 则 $2\vec{a} - \vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- A. $(3, 7)$ B. $(5, 9)$
C. $(5, 7)$ D. $(3, 9)$

平行垂直问题

29. 已知向量 $\vec{a} = (1, -2)$, 则与 $\vec{a}$ 平行的单位向量的坐标为 $()$.
- A. $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$
B. $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$
C. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$
D. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$
30. 已知点 $A(1, 3)$, $B(4, -1)$, 则与向量 $\vec{AB}$ 同方向的单位向量为 $()$.
- A. $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ B. $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$
C. $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ D. $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$
31. 已知向量 $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, 若 $(m\vec{a} + n\vec{b}) // (\vec{a} - 2\vec{b})$, 则 $\frac{m}{n}$ 等于 $()$.
- A. 2 B. -2 C. D.

$$-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

32. 已知两点 $A(3, -4)$, $B(-9, 2)$ 在直线 AB 上, 在直线 AB 上求一点 P , 使 $|\overrightarrow{AP}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|$.

33. 已知向量 $\vec{m} = (\lambda + 1, 1)$, $\vec{n} = (\lambda + 2, 2)$, 若 $(\vec{m} + \vec{n}) \perp (\vec{m} - \vec{n})$, 则 $\lambda = ()$.

A. -4

B. -3

C. -2

D. -1

34. 已知 $A(-3, 0)$, $B(0, 2)$, O 为坐标原点, 点 C 在 $\angle AOB$ 内, 且 $\angle AOC = 45^\circ$, 设

$\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OB} (\lambda \in \mathbf{R})$ 则 $\lambda = ()$.

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{2}{3}$

🔴 向量夹角

35. 若向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = \sqrt{10}$, $\vec{b} = (-2, 1)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $()$.

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

36. 已知 $\vec{a} = (\lambda, 2)$, $\vec{b} = (-3, 5)$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角, 则 λ 的取值范围是 $()$.

A. $\lambda > \frac{10}{3}$

B. $\lambda \geq \frac{10}{3}$

C. $\lambda < \frac{10}{3}$

D. $\lambda \leq \frac{10}{3}$

🔴 投影问题

37. 已知点 $A(-1, 1)$, $B(0, 3)$, $C(3, 4)$, 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 方向上的投影为 _____.

🔴 模长与数量积

38. 设平面向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-2, y)$, 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $|2\vec{a} - \vec{b}|$ 等于 $()$.

A. 4

B. 5

C. $3\sqrt{5}$

D. $4\sqrt{5}$

39. 向量 $\vec{a} = (1, -1)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, 则 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = ()$.

A. -1

B. 1

C. 0

D. 2

40. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 5\sqrt{2}$, 则 $|\vec{b}|$ 等于 $()$.

A. $\sqrt{5}$

B. $\sqrt{10}$

C. 5

D. 25