

平面向量基本定理与坐标运算-习题

一、选择题

1. 在下列向量组中，可以把向量 $\vec{a} = (3, 2)$ 表示出来的是 () .

- A. $\vec{e}_1 = (0, 0), \vec{e}_2 = (1, 2)$
- B. $\vec{e}_1 = (-1, 2), \vec{e}_2 = (5, -2)$
- C. $\vec{e}_1 = (3, 5), \vec{e}_2 = (6, 10)$
- D. $\vec{e}_1 = (2, -3), \vec{e}_2 = (-2, 3)$

【答案】 B

【解析】 排除A项：若 $\vec{e}_1 = (-1, 2), \vec{e}_2 = (5, -2)$ ，
设存在实数 λ, μ ，使得 $\vec{a} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$ ，
则 $(3, 2) = \lambda(-1, 2) + \mu(5, -2)$ ，
所以 $\begin{cases} 3 = -\lambda + 5\mu \\ 2 = 2\lambda - 2\mu \end{cases}$ ，
解得 $\begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 1 \end{cases}$ ，则 $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ，
符合题意；易知C，D项为共线向量，排除C，D项。
故选B。

【标注】 【知识点】 平面向量的正交分解及坐标表示；坐标表示平面向量的共线

2. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$ ，向量 $\vec{b} = (3, 1)$ ，则 $\vec{b} - \vec{a} = ()$.

- A. $(2, -1)$
- B. $(2, 0)$
- C. $(-2, 1)$
- D. $(4, 3)$

【答案】 A

【解析】 $\because \vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (3, 1)$ ，
 $\therefore \vec{b} - \vec{a} = (2, -1)$.
故选A。

【标注】 【知识点】 平面向量加、减、数乘的坐标运算；平面向量线性运算综合（非坐标）

3. 已知向量 $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (x, 1)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = (\quad)$.

A. $2\sqrt{5}$

B. $\sqrt{10}$

C. $3\sqrt{5}$

D. 2

【答案】 B

【解析】 $\because \vec{a} \perp \vec{b}$,

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

$$\therefore 2x - 1 = 0,$$

$$\therefore x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \vec{b} = \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

$$\vec{a} + 2\vec{b} = (3, 1),$$

$$\therefore |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{10}.$$

故选B.

【标注】 【知识点】 坐标表示平面向量的垂直；利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）

4. 如果向量 $\vec{a} = (n, 1)$ 与 $\vec{b} = (4, n)$ 共线，且方向相反，则 n 的值为 ().

A. ± 2

B. -2

C. 2

D. 0

【答案】 B

【解析】 $\because \vec{a} = (n, 1)$, $\vec{b} = (4, n)$,

且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，方向相反，

$$\therefore \begin{cases} \frac{n}{4} = \frac{1}{n} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 4n + n < 0 \end{cases},$$

$$\therefore n = -2.$$

故选B.

【标注】 【知识点】 相等向量与相反向量；坐标表示平面向量的共线；坐标表示平面向量的垂直

5. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, 3)$, $\vec{a} + \vec{b}\lambda$ 与 $2\vec{a} + \vec{b}$ 共线，则 λ 值为 ____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 因为 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, 3)$,

$$\text{所以 } \vec{a} + \vec{b}\lambda = (1 + 2\lambda, 2 + 3\lambda), 2\vec{a} + \vec{b} = (4, 7).$$

又因为 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $2\vec{a} + \vec{b}$ 共线，所以 $(1+2\lambda) \cdot 7 = (2+3\lambda) \cdot 4$ ，解得 $\lambda = \frac{1}{2}$ 。

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的共线；平面向量加、减、数乘的坐标运算；坐标表示平面向量的垂直

6. 已知向量 $\vec{a} = (1, \lambda)$ ， $\vec{b} = (1, 0)$ ， $\vec{c} = (8, 4)$ 。若 λ 为实数， $(\vec{a} - 5\vec{b}) \perp \vec{c}$ ，则 $\lambda = (\quad)$ 。
- A. -2 B. 2 C. 5 D. 8

【答案】 D

【解析】 $\because (\vec{a} - 5\vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ ，根据向量的四则运算列出方程得，
 $\therefore (\vec{a} - 5\vec{b}) \cdot \vec{c} = (1 - 5, \lambda - 0) \cdot (8, 4)$ ，
 得 $-32 + 4\lambda = 0$ ，解得 $\lambda = 8$ 。
 故选 D。

【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；坐标表示平面向量的垂直

7. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (2, -3)$ 。若向量 $\vec{c}$ 满足 $(\vec{c} + \vec{a}) // \vec{b}$ ， $\vec{c} \perp (\vec{a} + \vec{b})$ ，则 $\vec{c}$ 等于 $(\quad)$ 。
- A. $(\frac{7}{9}, \frac{7}{3})$ B. $(-\frac{7}{3}, -\frac{7}{9})$
 C. $(\frac{7}{3}, \frac{7}{9})$ D. $(-\frac{7}{9}, -\frac{7}{3})$

【答案】 D

【解析】 设 $\vec{c} = (x, y)$ ，则 $\vec{c} + \vec{a} = (x+1, y+2)$ 。
 由 $(\vec{c} + \vec{a}) // \vec{b}$ ， $\vec{c} \perp (\vec{a} + \vec{b})$ ， $\vec{a} + \vec{b} = (3, -1)$ ，
 得 $-3(x+1) - 2(y+2) = 0$ ①， $3x - y = 0$ ②，
 由 ①② 解得 $x = -\frac{7}{9}$ ， $y = -\frac{7}{3}$ 。
 故 $\vec{c} = (-\frac{7}{9}, -\frac{7}{3})$ 。

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的共线；坐标表示平面向量的垂直

8. 已知 $\vec{a} = (1, -1)$ ， $\vec{b} = (x+1, x)$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 45° ，则 x 的值为 $(\quad)$ 。
- A. 0 B. -1 C. 0 或 -1 D. -1 或 1

【答案】 C

【解析】

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x+1-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(x+1)^2 + x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

解得 $x = 0$ 或 $x = -1$.

故选C.

【标注】【知识点】向量的数量积的定义；利用向量数量积求夹角；向量的夹角的判断

9. 已知向量 $\vec{a} = (m, 2)$, $\vec{b} = (2, -1)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\frac{|2\vec{a} - \vec{b}|}{\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})}$ 等于 ().

A. $-\frac{5}{3}$

B. 1

C. 2

D. $\frac{5}{4}$

【答案】 B

【解析】 $\because \vec{a} \perp \vec{b}$,

$$\therefore 2m - 2 = 0, m = 1,$$

$$\therefore \vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (2, -1),$$

$$2\vec{a} - \vec{b} = (0, 5),$$

$$\therefore |2\vec{a} - \vec{b}| = 5,$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (3, 1),$$

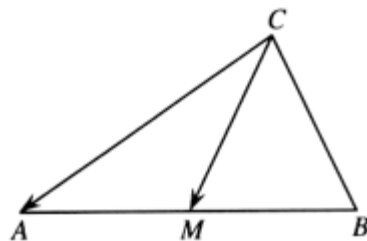
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = 3 + 2 = 5,$$

$$\therefore \frac{|2\vec{a} - \vec{b}|}{\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})} = \frac{5}{5} = 1.$$

故选B.

【标注】【知识点】数量积的坐标表达式；平面向量数量积运算（非坐标）

10. 如图所示, M 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点, 若 $\vec{CM} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$, 则 $\vec{CB} =$ ().



A. $\vec{a} - 2\vec{b}$

B. $2\vec{a} - \vec{b}$

C. $\vec{a} + 2\vec{b}$

D. $2\vec{a} + \vec{b}$

【答案】 B

【解析】 $\because M$ 是 AB 的中点，

$\therefore$ 由向量加法的平行四边形法得

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}),$$

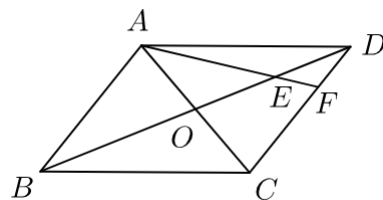
$$\text{则 } \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = 2\vec{a} - \vec{b}.$$

故选 B.

【标注】 【知识点】 平面向量线性运算综合（非坐标）

11. 在平行四边形 $ABCD$ 中， AC 与 BD 交于点 O ， E 是线段 OD 的中点， AE 的延长线与 CD 交于点 F . 若

$\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ ，则 $\overrightarrow{AF} = ()$.



- A. $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
B. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$
C. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$
D. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

【答案】 B

【解析】 方法一：由 E 为 OD 的中点可知 $\frac{DE}{EB} = \frac{DF}{AB} = \frac{1}{3}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC},$$

$$\text{设 } \overrightarrow{AD} = \vec{m}, \overrightarrow{AB} = \vec{n}, \therefore \begin{cases} \vec{m} + \vec{n} = \vec{a} \\ \vec{m} - \vec{n} = \vec{b} \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} \vec{m} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ \vec{n} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \end{cases}$$

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \vec{m} + \frac{1}{3}\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

方法二：由于 $\frac{DF}{FC} = \frac{1}{2}$ ，则

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},$$

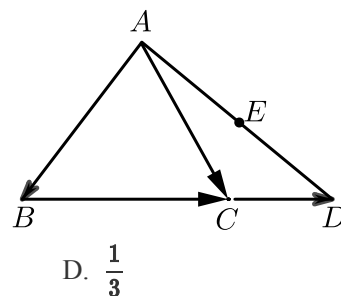
将 $\vec{m}$ ， $\vec{n}$ 代入即可. 以下同解法一.

故选 B.

【标注】 【知识点】 向量分解中的待定系数法；平面向量基本定理及其意义

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 BC 延长线上一点, 点 E 为线段 AD 的中点, 若 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CD}$, 且

$$\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}, \text{ 则 } \lambda = (\quad).$$



A. $-\frac{1}{4}$

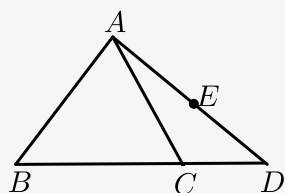
B. $\frac{1}{4}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

【答案】 A

【解析】



$\because E$ 为 AD 中点,

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = 2\lambda \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2} \overrightarrow{AC},$$

$\because D, C, B$ 共线,

$$\therefore 2\lambda + \frac{3}{2} = 1,$$

$$\therefore \lambda = -\frac{1}{4}.$$

故选A.

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的数乘运算及运算规则

二、 填空题

13. 已知 $\vec{p} = (1, 2)$, $\vec{q} = (-1, 3)$, 则 $\vec{p}$ 在 $\vec{q}$ 方向上的射影长为 _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

【解析】 $\because \vec{p} = (1, 2), \vec{q} = (-1, 3),$

$$\therefore \vec{p} \text{ 在 } \vec{q} \text{ 方向上的射影长为: } \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{q}|} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；平面向量数量积的运算律；向量的投影；利用投影解决平面向量的数量积

14. 已知向量 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (3, m)$, 则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影为 -3 , 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 _____.

【答案】 $\frac{2\pi}{3}$

【解析】 根据题意, 设向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 夹角为 θ ,

$$\text{向量 } \vec{a} = (1, \sqrt{3}), \vec{b} = (3, m), \text{ 则 } |\vec{a}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + \sqrt{3}m,$$

$$\text{若 } \vec{b} \text{ 在 } \vec{a} \text{ 上的投影为 } -3, \text{ 则有 } \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{3 + \sqrt{3}m}{2} = -3,$$

$$\text{解可得: } m = -3\sqrt{3},$$

$$\text{则 } \vec{b} = (3, -3\sqrt{3}), \text{ 则 } |\vec{b}| = 6,$$

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-6}{2 \times 6} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{又由 } 0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$\text{则 } \theta = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{2\pi}{3}.$$

【标注】【知识点】向量的数量积的定义；利用向量数量积求夹角；平面向量数量积运算（非坐标）；向量的夹角的判断

15. 设向量 $\vec{a} = (m, 1)$, $\vec{b} = (1, 2)$, 且 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$, 则 $m =$ _____.

【答案】 -2

【解析】 方法一: $\because \vec{a} = (m, 1), \vec{b} = (1, 2),$

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} = (m+1, 3), |\vec{a}|^2 = m^2 + 1, |\vec{b}|^2 = 5, |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (m+1)^2 + 9,$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2,$$

$$\therefore (m+1)^2 + 9 = m^2 + 1 + 5,$$

$$\therefore m = -2.$$

$$\text{方法二: } \because |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2,$$

$$\therefore 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ 即 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

$$\text{又 } \vec{a} = (m, 1), \vec{b} = (1, 2),$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = m + 2 = 0,$$

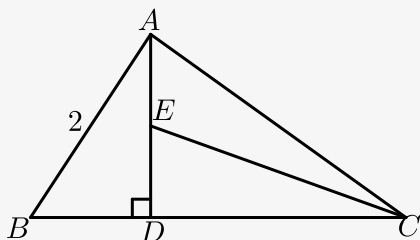
$$\therefore m = -2.$$

【标注】【知识点】平面向量的正交分解及坐标表示

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, AD 为 BC 边上的高, E 为 AD 的中点, $\vec{CE} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{BC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 _____.

【答案】 $-\frac{4}{3}$

【解析】由已知得 $BD = 1$, $CD = 2$,



$$\therefore \vec{BD} = \frac{1}{3} \vec{BC}, \vec{DC} = \frac{2}{3} \vec{BC}.$$

$$\vec{CE} = \vec{CD} + \vec{DE} = -\frac{2}{3} \vec{BC} - \frac{1}{2} \vec{AD}$$

$$= -\frac{2}{3} \vec{BC} - \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BD})$$

$$= -\frac{2}{3} \vec{BC} - \frac{1}{2} \vec{AB} - \frac{1}{6} \vec{BC}$$

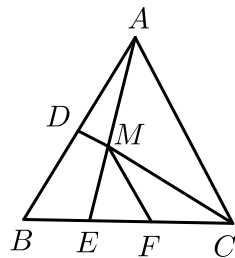
$$= -\frac{1}{2} \vec{AB} - \frac{5}{6} \vec{BC},$$

$$\therefore \lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{5}{6},$$

$$\therefore \lambda + \mu = -\frac{4}{3}.$$

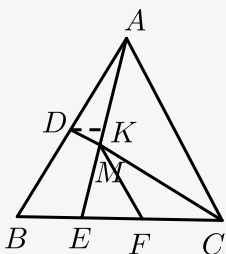
【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义；平面向量线性运算综合（非坐标）

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 AB 的中点, E, F 为 BC 的两个三等分点, AE 交 CD 于点 M , 设 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$, 设 $\vec{FM} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, 求 $\lambda + \mu =$ _____.



【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】 过D作 $DK \parallel BE$ 交AE于K,



$$\begin{aligned} \therefore \frac{DK}{BE} &= \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}, \\ \therefore \frac{EC}{DK} &= \frac{2BE}{DK} = \frac{1}{4}, \\ \therefore \frac{KM}{ME} &= \frac{1}{4}, \text{ 设 } KM = k, ME = 4k, \\ \text{又} \because \frac{AK}{KM} &= 5, \therefore AK = 5k, \\ \therefore \frac{EM}{MA} &= \frac{4k}{5k+k} = \frac{2}{3}, \\ \therefore EM &= \frac{2}{5}AE, MA = \frac{3}{5}AE, \\ \therefore \overrightarrow{FM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{ME} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{5}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= -\frac{1}{10}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{10}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{15}\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{15}\vec{a} + \frac{7}{15}\vec{b}, \\ \therefore \lambda &= -\frac{1}{15}, \mu = \frac{7}{15}, \\ \therefore \lambda + \mu &= \frac{6}{15} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

故答案为: $\frac{2}{5}$.

【标注】【知识点】向量系数求值问题；平面向量基本定理及其意义；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的加法运算及运算规则；平面向量的数乘运算及运算规则

三、解答题

18. 已知向量 $\vec{a} = (4, 1)$, $\vec{b} = (-5, 2)$.

- (1) 若 $(\vec{a} + \vec{b}) \parallel (m\vec{a} - \vec{b})$, 求实数 m 的值.
- (2) 若 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (m\vec{a} - \vec{b})$, 求实数 m 的值.

【答案】(1) $m = -1$.

(2) $m = -11$.

【解析】(1) $\vec{a} + \vec{b} = (-1, 3)$,

$$m\vec{a} - \vec{b} = (4m + 5, m - 2),$$

$$\because (\vec{a} + \vec{b}) // (m\vec{a} - \vec{b}),$$

$$\therefore \frac{4m + 5}{-1} = \frac{m - 2}{3},$$

$$\therefore 12m + 15 = -m + 2,$$

$$13m = -13,$$

$$m = -1.$$

故答案为： $m = -1$.

$$(2) \because (\vec{a} + \vec{b}) \perp (m\vec{a} - \vec{b}),$$

$$\therefore -4m - 5 + 3m - 6 = 0.$$

$$\therefore m = -11.$$

故答案为： $m = -11$.

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的共线；坐标表示平面向量的垂直；平面向量数量积运算（非坐标）

19. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, \lambda)$, $\vec{c} = (-3, 2)$.

(1) 若 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线，求实数 λ 的值.

(2) 求 $\vec{c}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影.

(3) 若 $k\vec{a} + \vec{c}$ 与 $\vec{a} - 2\vec{c}$ 垂直，求实数 k 的值.

【答案】(1) $-\frac{8}{3}$.

(2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(3) $\frac{25}{3}$.

【解析】(1) $\vec{a} + 2\vec{b} = (5, 2 + 2\lambda)$,

若 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线，

$$\text{则 } \frac{5}{-3} = \frac{2 + 2\lambda}{2},$$

$$\therefore \lambda = -\frac{8}{3}.$$

(2) $\vec{c}$ 在 $\vec{a}$ 方向上投影为 $|\vec{c}| \cos \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$,

$$|\vec{c}| \cos \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = |\vec{a}| \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}|} = \frac{1 \times (-3) + 2 \times 2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} .$$

$$(3) \quad k\vec{a} + \vec{c} = (k-3, 2k+2) ,$$

$$\vec{a} - 2\vec{c} = (7, 2) ,$$

$$\therefore k\vec{a} + \vec{c} \text{ 与 } \vec{a} - 2\vec{c} \text{ 垂直} ,$$

$$\therefore (k\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{c}) = 0 ,$$

$$\text{即 } (k-3) \times 7 + (2k+2) \times (-2) = 0 ,$$

$$\therefore k = \frac{25}{3} .$$

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的共线；坐标表示平面向量的垂直；利用投影解决平面向量的数量积；向量的投影；向量的数量积的定义；平面向量数量积运算（非坐标）；利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）

20. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点 $A(1, 2)$ ， $B(3, 4)$ ， $C(5, 0)$ 。

$$(1) \quad \text{求 } \cos \langle \vec{AC}, \vec{BD} \rangle .$$

$$(2) \quad \text{若实数 } t \text{ 满足 } \vec{OA} \perp (\vec{BC} - t\vec{OA}) , \text{ 求 } t \text{ 的值} .$$

$$\text{【答案】} (1) \quad \frac{\sqrt{5}}{5} .$$

$$(2) \quad -\frac{6}{5} .$$

【解析】 (1) 由平行四边形 $ABCD$ ，可得 $\vec{AB} = \vec{DC}$ ，

$$\text{则 } \vec{DC} = (2, 2) , \text{ 由 } C(5, 0) , \text{ 则 } D(3, -2) ,$$

$$\text{有 } \vec{AC} = (4, -2) , \vec{BD} = (0, -6) ,$$

$$\cos \langle \vec{AC}, \vec{BD} \rangle = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BD}}{|\vec{AC}| \cdot |\vec{BD}|} = \frac{4 \times 0 + (-2) \times (-6)}{\sqrt{16+4} \cdot \sqrt{36}} = \frac{\sqrt{5}}{5} .$$

$$(2) \quad \vec{BC} = (2, -4) ,$$

$$\therefore \vec{OA} \perp (\vec{BC} - t\vec{OA}) ,$$

$$\text{则 } \vec{OA} \cdot (\vec{BC} - t\vec{OA}) = 0 ,$$

$$\text{即有 } \vec{OA} \cdot \vec{BC} = t\vec{OA}^2 ,$$

$$\text{则 } 1 \times 2 - 4 \times 2 = 5t ,$$

$$\text{计算得 } t = -\frac{6}{5} .$$

【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题；利用向量数量积求夹角；向量的夹角的判断；坐标表示平面向量的垂直

