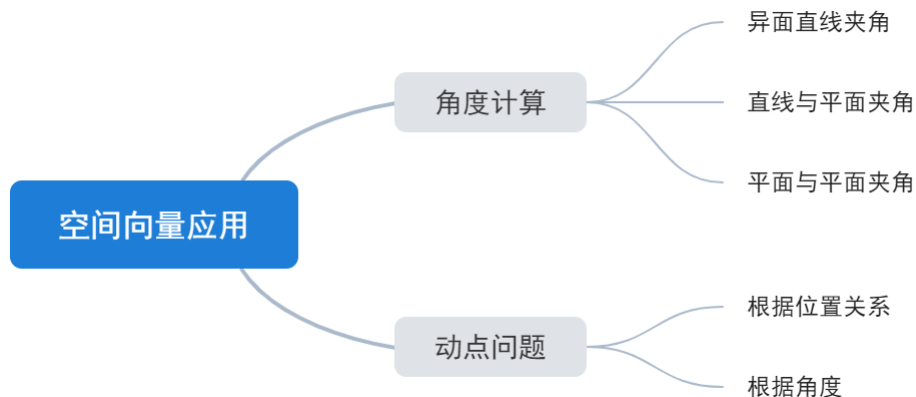


第二讲-空间向量的应用

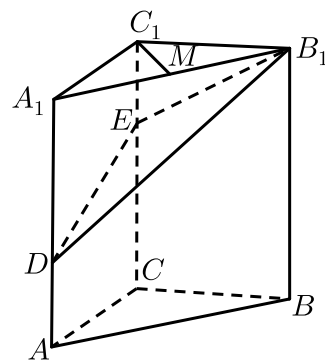
1. 知识梳理



一、 角度计算

1. 真题分析

1. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $CC_1 \perp$ 平面 ABC ， $AC \perp BC$ ， $AC = BC = 2$ ， $CC_1 = 3$ ，点 D ， E 分别在棱 AA_1 和棱 CC_1 上，且 $AD = 1$ ， $CE = 2$ ， M 为棱 A_1B_1 的中点。



- (1) 求二面角 $B - B_1E - D$ 的正弦值。
(2) 求直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值。

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{30}}{6}$.
(2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】 (1) 依题意， $\vec{CA} = (2, 0, 0)$ 是平面 BB_1E 的一个法向量，

$$\overrightarrow{EB_1} = (0, 2, 1), \overrightarrow{ED} = (2, 0, -1),$$

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 DB_1E 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EB_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{ED} = 0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} 2y + z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases},$$

不妨设 $x = 1$, 可得 $\vec{n} = (1, -1, 2)$,

$$\text{因此有} \cos \langle \overrightarrow{CA}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{CA}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$\text{于是} \sin \langle \overrightarrow{CA}, \vec{n} \rangle = \frac{\sqrt{30}}{6},$$

$$\therefore \text{二面角 } B - B_1E - D \text{ 的正弦值为 } \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

(2) 依题意, $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0)$,

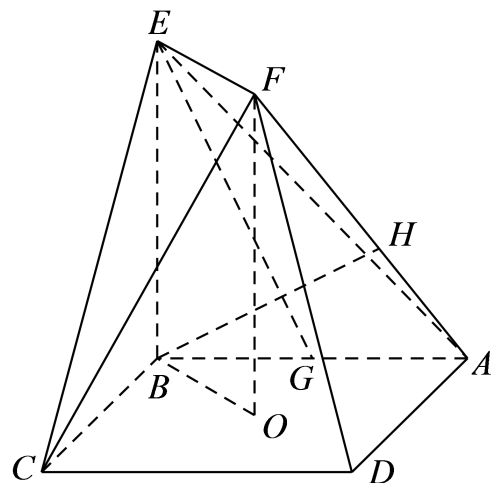
由(2)知 $\vec{n} = (1, -1, 2)$ 为平面 DB_1E 的一个法向量,

$$\text{于是} \cos \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AB}| |\vec{n}|} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 与平面 } DB_1E \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【标注】【知识点】线线垂直的证明问题；向量法解决空间中的平行问题；向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的垂直问题；向量法解决线面角问题；向量法解决异面直线所成角问题；建立空间直角坐标系

2. 如图, 正方形 $ABCD$ 的中心为 O , 四边形 $OBEF$ 为矩形, 平面 $OBEF \perp$ 平面 $ABCD$, 点 G 为 AB 的中点, $AB = BE = 2$.



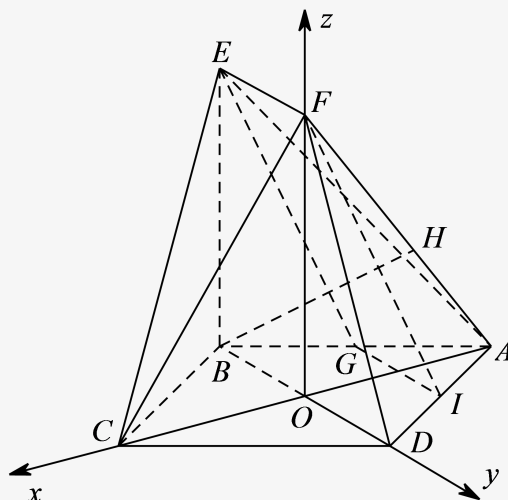
(1) 求二面角 $O - EF - C$ 的正弦值;

(2)

设 H 为线段 AF 上的点, 且 $AH = \frac{2}{3}HF$, 求直线 BH 和平面 CEF 所成角的正弦值.

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 (2) $\frac{\sqrt{7}}{21}$

【解析】 (1) 如图所示建立空间直角坐标系 $O-xyz$



$$B(0, -\sqrt{2}, 0), C(\sqrt{2}, 0, 0), E(0, -\sqrt{2}, 2), F(0, 0, 2)$$

设面 CEF 的法向量 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{EF} = (x, y, z) \cdot (0, \sqrt{2}, 0) = \sqrt{2}y = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{CF} = (x, y, z) \cdot (-\sqrt{2}, 0, 2) = -\sqrt{2}x + 2z = 0 \end{cases}$$

得: $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

$$\therefore \vec{n}_1 = (\sqrt{2}, 0, 1)$$

$\because OC \perp \text{面} OEF$,

$\therefore \text{面} OEF$ 的法向量 $\vec{n}_2 = (1, 0, 0)$

$$|\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sin \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

二面角 $O-EF-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) $\because AH = \frac{2}{3}HF$

$$\therefore \vec{AH} = \frac{2}{5}\vec{AF} = \frac{2}{5}(\sqrt{2}, 0, 2) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

设 $H(x, y, z)$

$$\therefore \overrightarrow{AH} = (x + \sqrt{2}, y, z) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}, 0, \frac{4}{5} \right)$$

$$\text{得: } \begin{cases} x = -\frac{3\sqrt{2}}{5}, y = 0, z = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{BH} = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{5}, \sqrt{2}, \frac{4}{5} \right)$$

设直线 BH 和平面 CEF 所成角为 θ

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{BH}, \vec{n}_2 \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{BH} \cdot \vec{n}_1|}{|\overrightarrow{BH}| |\vec{n}_1|} = \frac{\left| -\frac{6}{5} + \frac{4}{5} \right|}{\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{5}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$$

所以直线 BH 和平面 CEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{21}$.

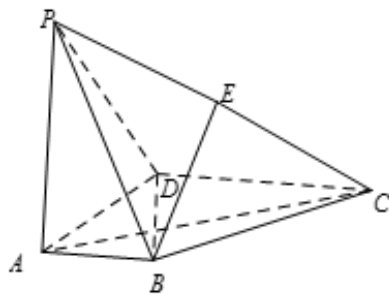
【标注】【知识点】向量法解决二面角问题

2. 思路总结

- 1、建系条件：优先寻找几何体中满足三条线两两垂直的模型，若找不到，退而求其次寻找线面垂直的模型；
- 2、异面直线夹角求解步骤：
 - 计算两条异面直线端点的点坐标；
 - 计算两条直线的方向向量；
 - 计算两条异面直线的夹角；
- 3、线面角的求解步骤：
 - 计算直线的端点坐标和平面内两条相交直线的端点坐标；
 - 计算直线的方向向量和平面的法向量；
 - 计算直线和平面的夹角；
- 4、二面角的求解步骤：
 - 计算两个平面的法向量；
 - 计算两个平面的夹角的余弦值并且判断角为钝角还是锐角；

3. 模拟演练

3. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AD \perp AB$ ， $AB \parallel DC$ ， $AD = DC = AP = 2$ ， $AB = 1$ ，点 E 为棱 PC 的中点。



(1) 求直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值；

(2) 若 F 为棱 PC 上一点，满足 $BF \perp AC$ ，求二面角 $F-AB-P$ 的余弦值。

【答案】 (1) 直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

(2) 二面角 $F-AB-P$ 余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 。

【解析】 (1) 向量 $\overrightarrow{BD} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{PB} = (1, 0, -2)$ 。

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 PBD 的法向量，则
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -x + 2y = 0, \\ x - 2z = 0. \end{cases}$$

不妨令 $y = 1$ ，可得 $\vec{n} = (2, 1, 1)$ 为平面 PBD 的一个法向量。于是有

$$\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{BE} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{BE}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{BE}|} = \frac{2}{\sqrt{6} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以，直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

(2) 向量 $\overrightarrow{BC} = (1, 2, 0)$, $\overrightarrow{CP} = (-2, -2, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 0)$, $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$ 。

由点 F 在棱 PC 上，设 $\overrightarrow{CF} = \lambda \overrightarrow{CP}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ 。

$$\text{故 } \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BC} + \lambda \overrightarrow{CP} = (1 - 2\lambda, 2 - 2\lambda, 2\lambda).$$

由 $BF \perp AC$ ，得 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ，

$$\text{因此，} 2(1 - 2\lambda) + 2(2 - 2\lambda) = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{3}{4}. \text{ 即 } \overrightarrow{BF} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

设 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$ 为平面 FAB 的法向量，则
$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \end{cases} \text{ 即}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z = 0. \end{cases}$$

不妨令 $z = 1$ ，可得 $\vec{n}_1 = (0, -3, 1)$ 为平面 FAB 的一个法向量。

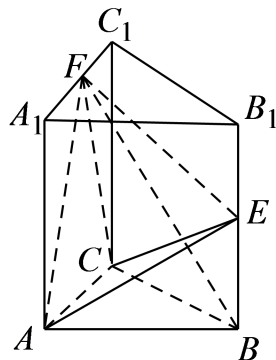
取平面 ABP 的法向量 $\vec{n}_2 = (0, 1, 0)$ ，则

$$\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{-3}{\sqrt{10} \times 1} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

易知，二面角 $F-AB-P$ 是锐角，所以其余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 。

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；向量法解决线面角问题；向量法解决二面角问题；直线和平面垂直的性质；线面垂直的证明问题

4. 已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = 2$, $AA_1 = \sqrt{6}$, 点 E, F 分别为侧棱 BB_1 和边 A_1C_1 的中点.



- (1) 求直线 AF 与平面 ACE 所成角的正弦值.
 (2) 求二面角 $F - CE - A$ 的余弦值.

【答案】 (1) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.
 (2) $\frac{\sqrt{5}}{15}$.

【解析】 (1) $\because BF \perp \text{面 } ACE$.

$\therefore \overrightarrow{BF}$ 为面 ACE 一个法向量.

又 $\because \overrightarrow{AF} = (-1, 0, \sqrt{6})$.

设 AF 与面 ACE 夹角为 θ .

$$\therefore |\sin \theta| = \left| \cos \langle \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BF} \rangle \right| = \frac{|6|}{|3 \cdot \sqrt{7}|} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

$\therefore$ 正弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

- (2) 设面 FCE 法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$.

$$\overrightarrow{CF} = (1, 0, \sqrt{6}), \quad \overrightarrow{EF} = \left(0, -\sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{CF} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \overrightarrow{EF} \cdot \vec{n}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 = (-2\sqrt{6}, \sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

设二面角 $F - CE - A$ 为 α .

$$\therefore |\cos \alpha| = \left| \cos \langle \vec{n}_1, \overrightarrow{FB} \rangle \right| = \frac{|\sqrt{6}|}{30 \cdot \sqrt{30}} = \frac{\sqrt{5}}{15}.$$

$\therefore$ 二面角 $F - CE - A$ 为锐角.

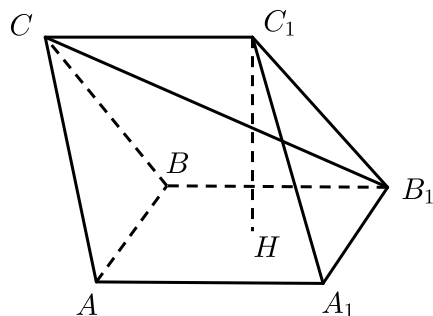
$\therefore$ 二面角 $F - CE - A$ 余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{15}$.

【标注】【知识点】直线和平面垂直的判定；线面垂直的证明问题；向量法解决线面角问题；向量法解决空间中的平行问题；向量法解决二面角问题

二、动点位置确定

1. 真题分析

5. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， H 是正方形 AA_1B_1B 的中心， $AA_1 = 2\sqrt{2}$ ， $C_1H \perp$ 平面 AA_1B_1B ，且 $C_1H = \sqrt{5}$



设 N 为棱 B_1C_1 的中点，点 M 在平面 AA_1B_1B 内，且 $MN \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ ，求线段 BM 的长.

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

【解析】 (1) 由 N 为棱 B_1C_1 的中点，

$$\text{得 } N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

设 $M(a, b, 0)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{MN} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - a, \frac{3\sqrt{2}}{2} - b, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\text{由 } MN \perp \text{平面 } A_1B_1C_1, \text{ 得 } \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0, \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0. \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - a\right) \cdot (-2\sqrt{2}) = 0, \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - a\right) \cdot (-\sqrt{2}) + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - b\right) \cdot (-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5} = 0. \end{cases}$$

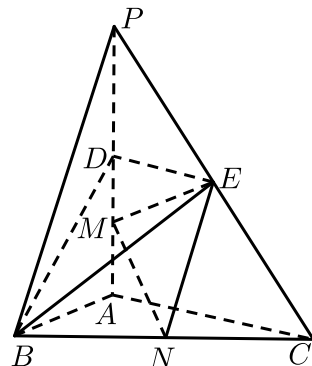
$$\text{解得 } \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ b = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases} \text{ 故 } M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right).$$

$$\text{因此 } \overrightarrow{BM} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right),$$

$$\text{所以线段 } BM \text{ 的长为 } |\overrightarrow{BM}| = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题；向量法求空间距离；向量法解决异面直线所成角问题

6. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 底面 ABC ， $\angle BAC = 90^\circ$ ．点 D, E, N 分别为棱 PA, PC, BC 的中点， M 是线段 AD 的中点， $PA = AC = 4, AB = 2$ ．



已知点 H 在棱 PA 上，且直线 NH 与直线 BE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{21}$ ，求线段 AH 的长．

【答案】 (1) $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{1}{2}$.

【解析】 (1) 由题意可设 $AH = h (0 \leq h \leq 4)$ ，则 $H(0, 0, h)$ ，

所以 $\overrightarrow{NH} = (-1, -2, h)$ ， $\overrightarrow{BE} = (-2, 2, 2)$ ，

由已知得

$$\left| \cos \langle \overrightarrow{NH}, \overrightarrow{BE} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{NH} \cdot \overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{NH}| \cdot |\overrightarrow{BE}|} = \frac{|2h - 2|}{\sqrt{h^2 + 4 + 1} \times \sqrt{4 + 4 + 4}} = \frac{\sqrt{7}}{21},$$

整理得 $10h^2 - 21h + 8 = 0$ ，

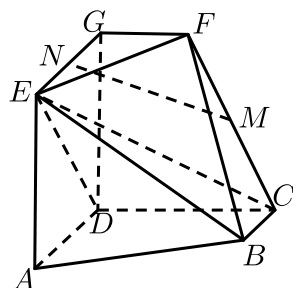
解得 $h = \frac{8}{5}$ 或 $h = \frac{1}{2}$.

所以线段 AH 的长为 $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题；向量法解决异面直线所成角问题；直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题

【素养】数学运算

7. 如图， $AD \parallel BC$ 且 $AD = 2BC$ ， $AD \perp CD$ ， $EG \parallel AD$ 且 $EG = AD$ ， $CD \parallel FG$ 且 $CD = 2FG$ ， $DG \perp$ 平面 $ABCD$ ， $DA = DC = DG = 2$.



若点 P 在线段 DG 上，且直线 BP 与平面 $ADGE$ 所成的角为 60° ，求线段 DP 的长．

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】 (1) 设线段 DP 的长为 $h(h \in [0, 2])$ ，则点 P 的坐标为 $(0, 0, h)$ ，

可得 $\overrightarrow{BP} = (-1, -2, h)$ ，

易知， $\overrightarrow{DC} = (0, 2, 0)$ 为平面 $ADGE$ 的一个法向量，

$$\text{故 } \left| \cos \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{DC} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{DC}|} = \frac{2}{\sqrt{h^2 + 5}} ,$$

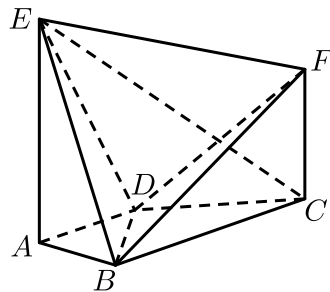
由题意，可得 $\frac{2}{\sqrt{h^2 + 5}} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

解得 $h = \frac{\sqrt{3}}{3} \in [0, 2]$.

所以，线段 DP 的长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；向量法解决二面角问题；直线的方向向量与平面的法向量；向量法求空间距离

8. 如图， $AE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $CF \parallel AE$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $AB = AD = 1$ ， $AE = BC = 2$.



若二面角 $E - BD - F$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$ ，求线段 CF 的长．

【答案】 (1) 线段 CF 的长为 $\frac{8}{7}$.

【解析】 (1) 设 $\vec{m} = (x, y, z)$ 为平面 BDF 的法向量，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{BD} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{BF} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} -x + y = 0 \\ 2y + hz = 0 \end{cases},$$

不妨令 $y = 1$, 可得 $\vec{m} = \left(1, 1, -\frac{2}{h}\right)$,

$$\text{由题意, 有} \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{\left|4 - \frac{2}{h}\right|}{3\sqrt{2 + \frac{4}{h^2}}} = \frac{1}{3},$$

解得 $h = \frac{8}{7}$, 经检验, 符合题意.

所以, 线段 CF 的长为 $\frac{8}{7}$.

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的平行问题；向量法解决线面角问题

2. 思路总结

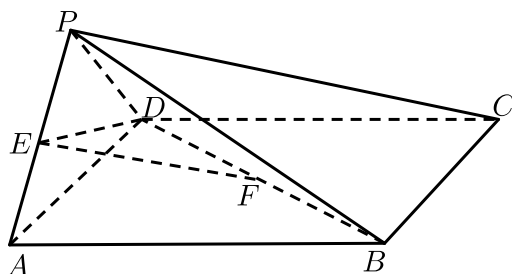
动点问题解题思路：

1. 设出动点坐标，设法一般为如下形式：如果动点 C 在线段 AB 上，那么可以设成 $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$ 的形式；
2. 写出动点 C 的坐标（以含有 λ 的式子表示），并且以此为基础写出相关直线的方向向量和相关平面的法向量；
3. 根据题目给的角度或者位置关系列出方程；
4. 求解方程，解出 λ 即可.

以上四步可以总结为口诀：“设动点、写坐标、列方程、解方程”。

3. 模拟演练

9. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ， E, F 分别为 PA, BD 中点， $PA = PD = AD = 2$.



在棱 PC 上是否存在一点 G ，使 $GF \perp$ 平面 EDF ？若存在，指出点 G 的位置；若不存在，说明理由。

【答案】（1）在棱 PC 上不存在一点 G ，使 $GF \perp$ 平面 EDF 成立。

【解析】 (1) 假设在棱 PC 上存在一点 G , 使 $GF \perp$ 平面 EDF . 设 $G(x_1, y_1, z_1)$, 则

$\overrightarrow{FG} = (x_1, y_1 - 1, z_1)$. 由 (2) 可知平面 EDF 的一个法向量是

$\vec{n} = (1, -1, -\sqrt{3})$. 因为 $GF \perp$ 平面 EDF , 所以 $\overrightarrow{FG} = \lambda \vec{n}$.

于是, $x_1 = \lambda, y_1 - 1 = -\lambda, z_1 = -\sqrt{3}\lambda$, 即 $x_1 = \lambda, y_1 = 1 - \lambda, z_1 = -\sqrt{3}\lambda$.

又因为点 G 在棱 PC 上, 所以 $\overrightarrow{GC}$ 与 $\overrightarrow{PC}$ 共线.

因为 $\overrightarrow{PC} = (-1, 2, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{CG} = (x_1 + 1, y_1 - 2, z_1)$,

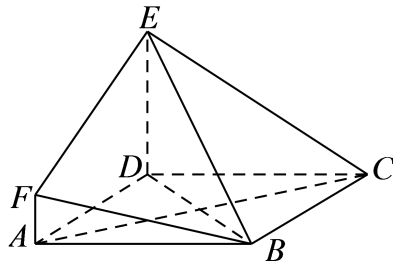
所以 $\frac{x_1 + 1}{-1} = \frac{y_1 - 2}{2} = \frac{z_1}{-\sqrt{3}}$.

所以 $\frac{1 + \lambda}{-1} = \frac{-\lambda - 1}{2} = \frac{-\sqrt{3}\lambda}{-\sqrt{3}}$, 无解.

故在棱 PC 上不存在一点 G , 使 $GF \perp$ 平面 EDF 成立.

【标注】【知识点】直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题；向量法解决空间中的平行问题；向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的垂直问题

10. 如图, $ABCD$ 是边长为 3 的正方形, $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $AF \parallel DE$, $DE = 3AF$, BE 与平面 $ABCD$ 所成角为 60° .



设点 M 是线段 BD 上的一个动点, 试确定点 M 的位置, 使得 $AM \parallel$ 平面 BEF , 并证明你的结论.

【答案】 (1) 点 M 坐标为 $(2, 2, 0)$, 证明见解析.

【解析】 (1) 点 M 是线段 BD 上一个动点,

设 $M(t, t, 0)$, 则 $\overrightarrow{AM} = (t - 3, t, 0)$,

$\because AM \parallel$ 平面 BDE ,

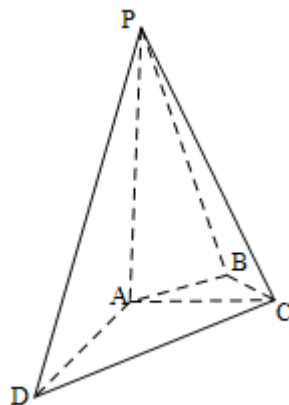
$\therefore \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, 即 $4(t - 3) + 2t = 0$,

解得: $t = 2$,

此时, 点 M 坐标为 $(2, 2, 0)$, $BM = \frac{1}{3}BD$.

【标注】【知识点】线面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定；向量法解决空间中的平行问

11. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AC \perp AD$ ， $AB \perp BC$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ， $PA = AD = 2$ ， $AC = 1$ 。



设 E 为棱 PA 上的点，满足异面直线 BE 与 CD 所成的角为 30° ，求 AE 的长。

【答案】 (1) $AE = \frac{\sqrt{10}}{10}$ 。

【解析】 (1) 设点 E 的坐标为 $(0, 0, h)$ ，其中 $h \in [0, 2]$ 。因此得 $\overrightarrow{BE} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, h\right)$ 。

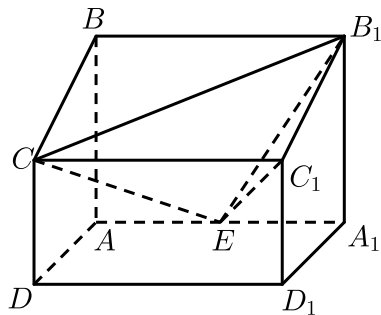
由 $\overrightarrow{CD} = (2, -1, 0)$ ，故。

$$\cos \langle \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CD} \rangle = \frac{\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{BE}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2} + h^2} \times \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10 + 20h^2}},$$

$$\text{所以, } \frac{3}{\sqrt{10 + 20h^2}} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 解得 } h = \frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ 即 } AE = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

【标注】【知识点】向量法解决异面直线所成角问题；向量法解决二面角问题

12. 如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，侧棱 $A_1A \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AB \parallel DC$ ， $AB \perp AD$ ， $AD = CD = 1$ ， $AA_1 = AB = 2$ ， E 为棱 AA_1 的中点。



设点 M 在线段 C_1E 上，且直线 AM 与平面 ADD_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ，求线段 AM 的长。

【答案】(1) $AM = \sqrt{2}$.

【解析】(1) (方法一)

$\overrightarrow{AE} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{EC_1} = (1, 1, 1)$, 设 $\overrightarrow{EM} = \lambda \overrightarrow{EC_1} = (\lambda, \lambda, \lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, 有
 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = (\lambda, \lambda + 1, \lambda)$.

可取 $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 2)$ 为平面 ADD_1A_1 的一个法向量, 设 θ 为直线 AM 与平面 ADD_1A_1 所成的角, 则

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (\lambda + 1)^2 + \lambda^2} \times 2}$$
$$= \frac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2 + 2\lambda + 1}}, \text{ 于是 } \frac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2 + 2\lambda + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{6},$$

解得 $\lambda = \frac{1}{3}$, 所以 $AM = \sqrt{2}$.

(方法二)

连接 D_1E , 过点 M 作 $MH \perp ED_1$ 于点 H , 可得 $MH \perp$ 平面 ADD_1A_1 , 连接 AH , 则 $\angle MAH$ 为直线 AM 与平面 ADD_1A_1 所成的角.

设 $AM = x$, 从而在 $Rt\triangle AHM$ 中, 有 $MH = \frac{\sqrt{2}}{6}x$, $AH = \frac{\sqrt{34}}{6}x$, 在

$Rt\triangle C_1D_1E$ 中, $C_1D_1 = 1$, $ED_1 = \sqrt{2}$

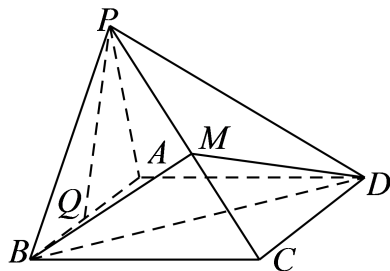
得 $EH = \sqrt{2}MH = \frac{1}{3}x$, 在 $\triangle AEH$ 中, $\angle AEH = 135^\circ$, $AE = 1$, 由

$AH^2 = AE^2 + EH^2 - 2AE \cdot EH \cos 135^\circ$, 得 $\frac{17}{18}x^2 = 1 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{3}x$, 整理得 $5x^2 - 2\sqrt{2}x - 6 = 0$, 解得 $x = \sqrt{2}$, 所以线段 AM 的长为 $\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题

【素养】数学运算

13. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle ABC = 60^\circ$, 侧面 PAB 是边长为 2 的正三角形, 侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$.



在侧棱 PC 上存在一点 M , 使得二面角 $M-BD-C$ 的大小为 60° , 求 $\frac{CM}{CP}$ 的值.

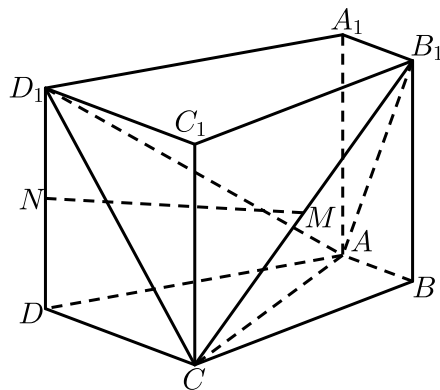
【答案】(1) $\frac{2}{5}$.

【解析】(1) 设 $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CP} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{3}{2}t, \sqrt{3}t\right)$,
 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{3}{2}t - 1, \sqrt{3}t\right)$, $\overrightarrow{BM} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}, -\frac{3}{2}t + 1, \sqrt{3}t\right)$,
 $\overrightarrow{DB} = (2\sqrt{3}, 0, 0)$,
 设平面 MBD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,
 $\therefore \vec{n} \perp \overrightarrow{DB}, \vec{n} \perp \overrightarrow{MB}$,
 $\Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\right)x + \left(-\frac{3}{2}t + 1\right)y + \sqrt{3}tz = 0 \end{cases}$,
 取 $z = \sqrt{3}$, $\vec{n} = \left(0, \frac{6t}{3t-2}, \sqrt{3}\right)$,
 又 $\because$ 平面 $ABCD$ 的法向量 $\vec{m} = (0, 0, 1)$,
 $\therefore \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \cos 60^\circ$,
 $\therefore \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 + \left(\frac{6t}{3t-2}\right)^2}} = \frac{1}{2}$,
 解出 $t = 2$ (舍去) 或 $t = \frac{2}{5}$,
 此时 $\frac{CM}{CP} = \frac{2}{5}$.

【标注】【知识点】向量法解决线面角问题；向量法解决空间中的平行问题；向量法解决二面角问题；线面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定

三、综合创新

14. 如图，在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，侧棱 $A_1A \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AB \perp AC$ ， $AB = 1$ ，
 $AC = AA_1 = 2$ ， $AD = CD = \sqrt{5}$ ，且点 M 和 N 分别为 B_1C 和 D_1D 的中点.



- (1) 求证： $MN \parallel$ 平面 $ABCD$.
- (2) 求二面角 $D_1 - AC - B_1$ 的正弦值 .
- (3) 设 E 为棱 A_1B_1 上的点，若直线 NE 和平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$ ，求线段 A_1E 的长 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

(3) $\sqrt{7} - 2$.

【解析】 (1) 作 $MQ \perp BC$ ，且与 BC 交于点 Q ，连接 DQ ，

由题意可知四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱，

所以 $DD_1 \parallel BB_1$ ，

又因为 M 为 B_1C 的中点，

所以 $MQ \parallel BB_1$ ， $MQ = \frac{1}{2}BB_1$ ，

又因为 N 为 DD_1 的中点，

所以 $ND \parallel MQ$ ， $ND = MQ$.

所以四边形 $NDQM$ 是平行四边形 .

所以 $MN \parallel DQ$.

因为 $DQ \subset$ 平面 $ABCD$ ，

$MN \not\subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $MN \parallel$ 平面 $ABCD$.

(2) 以 AC 为 x 轴， AB 为 y 轴， AA_1 为 z 轴建立空间直角坐标系，如图，

则 $C(2, 0, 0)$ ， $B_1(0, 1, 2)$ ， $A(0, 0, 0)$ ， $D_1(1, -2, 2)$ ，

$A_1(0, 0, 2)$ ， $N(1, -2, 1)$ ， $B(0, 1, 0)$ ，

设平面 D_1AC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$$\overrightarrow{AD_1} = (1, -2, 2), \overrightarrow{AC} = (2, 0, 0),$$

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \text{ 令 } z = 1 \text{ 得 } \vec{n} = (0, 1, 1).$$

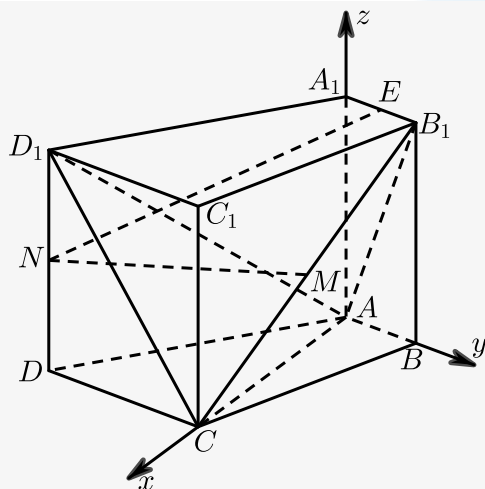
设平面 CB_1A 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ，

$$\overrightarrow{AB_1} = (0, 1, 2), \overrightarrow{AC} = (2, 0, 0),$$

$$\begin{cases} y_1 + 2z_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}, \text{ 令 } z_1 = 1 \text{ 得 } \vec{m} = (0, -2, 1).$$

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{所以二面角 } D_1 - AC - B_1 \text{ 的正弦值为 } \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$



(3) 设 $E(x, y, z)$, $\overrightarrow{A_1E} = \lambda \overrightarrow{A_1B_1}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), $\overrightarrow{A_1E} = (x, y, z - 2)$, $\overrightarrow{A_1B_1} = (0, 1, 0)$

所以 $E = (0, \lambda, 2)$.

$\overrightarrow{NE} = (-1, \lambda + 2, 1)$,

平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$,

由已知得,

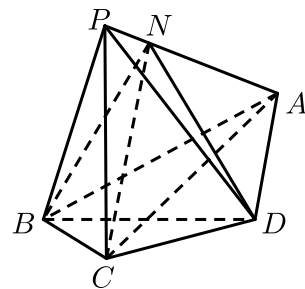
$$\left| \cos \langle \overrightarrow{NE}, \vec{n}_1 \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{NE} \cdot \vec{n}_1|}{|\overrightarrow{NE}| |\vec{n}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2 + (\lambda + 2)^2}} = \frac{1}{3},$$

解得 $\lambda = \sqrt{7} - 2$,

所以, 线段 A_1E 的长为 $\sqrt{7} - 2$.

【标注】【知识点】向量法解决线面角问题；向量法解决空间中的平行问题；向量法解决二面角问题；直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题

15. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \perp DC$, $AD = AB = 2\sqrt{3}$, $CB = CD = 2$, $PC \perp$ 平面 $ABCD$, $PC = 4$, 点 N 在线段 PA 上, 且 $AN = 3NP$.



(1) 求证: $DN \perp AC$.

(2) 求二面角 $C-DN-A$ 的正弦值.

(3)

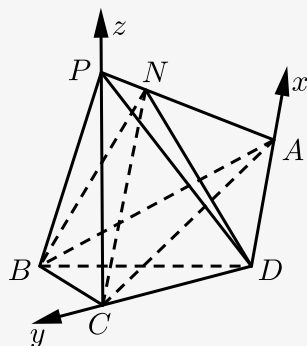
在线段 BP 上是否存在点 T ，使得 $CT \parallel$ 平面 PAD ，若存在，求出线段 BT 的长，若不存在，说明理由。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $\frac{8\sqrt{65}}{65}$ 。

(3) 存在，线段 BT 的长为 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ 。

【解析】(1) 以 D 为原点，分别以 $\overrightarrow{DA}$ ， $\overrightarrow{DC}$ ， $\overrightarrow{CP}$ 为 x ， y ， z 轴正方向建立空间直角坐标系，



$$D(0,0,0), A(2\sqrt{3},0,0), C(0,2,0), B(\sqrt{3},3,0), P(0,2,4),$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AP}, \text{ 所以 } N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 3\right),$$

$$\overrightarrow{DN} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 3\right), \overrightarrow{AC} = (-2\sqrt{3}, 2, 0),$$

$$\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-2\sqrt{3}) + \frac{3}{2} \times 2 + 3 \times 0 = -3 + 3 = 0,$$

所以 $DN \perp AC$ 。

(2) 设 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 是面 CDN 的一个法向量，

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DN} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{3}{2}y_1 + 3z_1 = 0 \end{cases},$$

$$y_1 = 0, \text{ 令 } x_1 = \sqrt{3}, \text{ 则 } z_1 = -\frac{1}{2},$$

$$\vec{n}_1 = \left(\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2}\right),$$

设 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 是面 ADN 的一个法向量，

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{DN} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}x_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{3}{2}y_2 + 3z_2 = 0 \end{cases},$$

$$x_2 = 0, \text{ 令 } y_2 = 2, \text{ 则 } z_2 = -1,$$

$$\vec{n}_2 = (0, 2, -1),$$

$$\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3 + \frac{3}{4}} \times \sqrt{4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{65}},$$

记二面角 $C-DN-A$ 的平面角为 θ ,

$$\sin B = \frac{8\sqrt{65}}{65}.$$

(3) 设 $T(x, y, z)$, $\overrightarrow{BT} = \lambda \overrightarrow{BP} = (-\sqrt{3}\lambda, -\lambda, 4\lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$,

$$\text{则 } \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BT} = (\sqrt{3}(1-\lambda), 1-\lambda, 4\lambda),$$

又面 PDA 的法向量 $\vec{n}_2 = (0, 2, -1)$,

若 $CT \parallel$ 面 PAD , 则 $\overrightarrow{CT} \perp \vec{n}_2$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{CT} \cdot \vec{n}_2 = 2(1-\lambda) - 4\lambda = 2 - 6\lambda = 0,$$

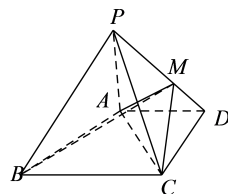
所以 $\lambda = \frac{1}{3}$ 符合题意,

$$\text{此时 } \overrightarrow{BT} = \frac{1}{3}(-\sqrt{3}, -1, 4),$$

$$|\overrightarrow{BT}| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3+1+16} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；向量法解决空间中的垂直问题；向量法解决二面角问题；向量法解决异面直线所成角问题

16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD \perp CD$, 且 $AD = CD = \sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{2}$, $PA = 2$.



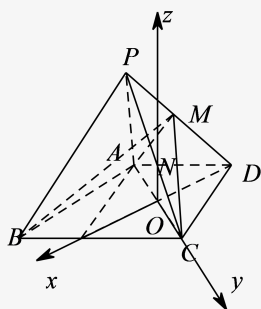
- (1) 取 PC 的中点 N , 求证: $DN \parallel$ 平面 PAB .
 (2) 求直线 AC 与 PD 所成的余弦值.
 (3) 在线段 PD 上, 是否存在一点 M , 使得二面角 $M-AC-D$ 的大小为 45° , 如果存在, 求 BM 与平面 MAC 所成的角, 如果不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 证明见解析.

$$(2) \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$(3) \frac{\pi}{6}.$$

【解析】 (1) 如图建系:



$A(0, -1, 0)$, $B(2, -1, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(-1, 0, 0)$, $P(0, -1, 2)$,

PC 中点 $N(0, 0, 1)$,

$\therefore \overrightarrow{DN} = (0, 1, 0)$, 设平面 PAB 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, 由 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 2)$,

$\overrightarrow{AB} = (2, 0, 0)$,

可得: $\vec{n} = (0, 1, 0)$, $\therefore \overrightarrow{DN} \cdot \vec{n} = 0$, $\therefore DN \not\subset$ 平面 PAB ,

$\therefore DN \parallel$ 平面 PAB .

(2) $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{PD} = (-1, 1, -2)$,

$$\therefore \cos \theta = \left| \frac{2}{2 \cdot \sqrt{6}} \right| = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

(3) 设 $M(x, y, z)$ 及 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PD}$,

$$\therefore \begin{cases} x = -\lambda \\ y + 1 = \lambda \\ z - 2 = -2\lambda \end{cases}, \text{推出 } M(-\lambda, \lambda - 1, 2(2 - \lambda)),$$

设平面 ACM 的法向量 $\vec{m} = (2 - 2\lambda, 0, \lambda)$,

由 $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{AM} = (-\lambda, \lambda - 1, 2(2 - \lambda))$, 可得 $\vec{m} = (2 - 2\lambda, 0, \lambda)$,

平面 ACD 的法向量 $\vec{n} = (0, 0, 1)$,

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\lambda}{1 \cdot \sqrt{\lambda^2 + (2 - 2\lambda)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 推出 } \sqrt{2}\lambda = \sqrt{5\lambda^2 - 8\lambda + 4},$$

解得 $\lambda = \frac{2}{3}$.

$$\therefore M\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \overrightarrow{BM} = \left(-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \vec{m} = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right),$$

$$\therefore \sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{BM}, \vec{m} \rangle \right| = \left| \frac{\frac{12}{9}}{\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2}, \text{ 则 } \theta = \frac{\pi}{6}.$$

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；向量法解决异面直线所成角问题；向量法解决二面角问题