

第一讲-立体几何初步练习题

一、空间几何体的表面积与体积

1. 已知圆锥的高为3，底面半径长为4，若某球的表面积与此圆锥侧面积相等，则该球的体积为 _____ .

【答案】 $\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$

【解析】 $\because$ 圆锥的底面半径 $r = 4$ ，高 $h = 3$ ，

$\therefore$ 圆锥的母线 $l = 5$ ，

$\therefore$ 圆锥侧面积 $S = \pi rl = 20\pi$ ，

设球的半径为 r ，则 $4\pi r^2 = 20\pi$ ，

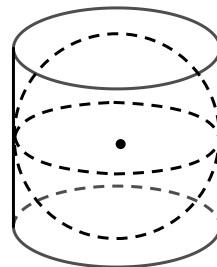
$\therefore r = \sqrt{5}$ ，

$\therefore$ 该球的体积为 $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (\sqrt{5})^3 = \frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$.

故答案为： $\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$.

【标注】【知识点】组合体求体积、表面积问题；空间几何体的体积

2. 如图所示是古希腊数学家阿基米德的墓碑文，墓碑上刻着一个圆柱，圆柱内有一个内切球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等，相传这个图形表达了阿基米德最引以为自豪的发现．我们来重温这个伟大发现，圆柱的表面积与球的表面积之比为 _____ .



【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】 设球的半径为 R ，则圆柱的底面半径为 R ，高为 $2R$ ，

$$\therefore V_{\text{圆柱}} = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3, \quad V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

$$\therefore \frac{V_{\text{圆柱}}}{V_{\text{球}}} = \frac{2\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{2}.$$

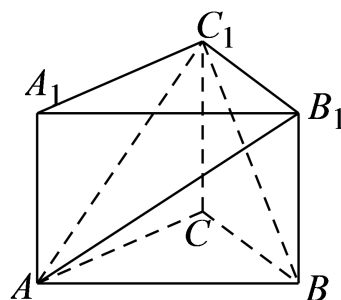
$$S_{\text{圆柱}} = 2\pi R \times 2R + 2 \times \pi R^2 = 6\pi R^2, S_{\text{球}} = 4\pi R^2,$$

$$\therefore \frac{S_{\text{圆柱}}}{S_{\text{球}}} = \frac{6\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{3}{2}.$$

故答案为： $\frac{3}{2}$.

【标注】【知识点】组合体求体积、表面积问题；空间几何体的表面积

3. 如图所示，已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为1，且 $AA_1 \perp$ 底面 ABC ，则三棱锥 $B_1 - ABC_1$ 的体积为 _____ .



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{12}$

【解析】 $\because$ 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为1，且 $AA_1 \perp$ 底面 ABC ，

$$\therefore S_{\triangle BB_1C_1} = \frac{1}{2} \times BB_1 \times B_1C_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2},$$

$$\text{点 } A \text{ 到平面 } BB_1C_1 \text{ 的距离 } h = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

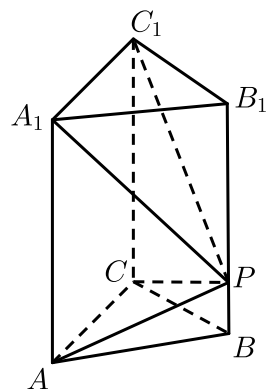
$\therefore$ 三棱锥 $B_1 - ABC_1$ 的体积：

$$V = \frac{1}{3} \times S_{\triangle BB_1C_1} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

【标注】【知识点】棱柱、棱锥、棱台的结构特征；组合体求体积、表面积问题；空间几何体的体积；线面垂直的证明问题

4. 如图，三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为1， P 为侧棱 B_1B 上的一点，则四棱锥 $P - ACC_1A_1$ 的体积为 _____ .



【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】 设点 P 到平面 ABC 、平面 $A_1B_1C_1$ 的距离分别为 h_1, h_2 ,

则棱柱的高为 $h = h_1 + h_2$,

又记 $S = S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A_1B_1C_1}$,

则三棱柱的体积为 $V = Sh = 1$,

而从三棱柱中去掉四棱锥 $P - ACC_1A_1$ 的剩余体积为

$$V' = V_{P-ABC} + V_{P-A_1B_1C_1}$$

$$= \frac{1}{3}Sh_1 + \frac{1}{3}Sh_2$$

$$= \frac{1}{3}S(h_1 + h_2)$$

$$= \frac{1}{3},$$

$$\text{从而 } V_{P-ACC_1A_1} = V - V' = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

故答案为： $\frac{2}{3}$ 。

【标注】【知识点】空间几何体的体积；组合体求体积、表面积问题

5. 设三棱锥的三条侧棱两两互相垂直，且长度分别为 $2, 2\sqrt{3}, 4$ ，则其外接球的表面积为 _____。

【答案】 32π

【解析】 此三棱锥的外接球即棱长为 $2, 2\sqrt{3}, 4$ 的长方体的外接球，

而长方体的体对角线即为球直径，

$$\text{直径 } 2R = \sqrt{4 + 12 + 16} = 4\sqrt{2}, R = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{外接球表面积：} S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 8 = 32\pi.$$

故答案为： 32π 。

【标注】【知识点】空间几何体的表面积；空间几何体的内切球、外接球问题；棱柱、棱锥、棱台

6. 设棱长为2的正四面体 $ABCD$ 内接于球 O ，则该球的表面积是 _____ .

【答案】 6π

【解析】 $\therefore$ 正四面体 $ABCD$ 的外接球半径为 $r = \frac{\sqrt{6}}{4}a$,

$$\therefore r = \frac{\sqrt{6}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{6}}{2} ,$$

$$\therefore S_{\text{表}} = 4\pi r^2 = 4 \times \pi \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 6\pi .$$

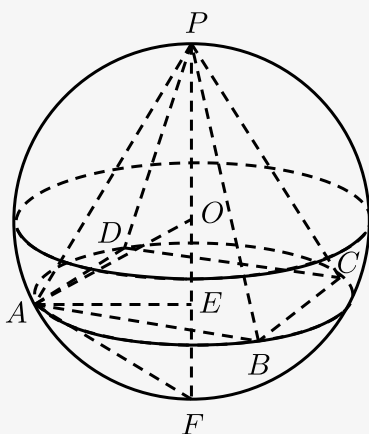
故答案为： 6π .

【标注】 【知识点】 空间几何体的内切球、外接球问题；组合体求体积、表面积问题；空间几何体的表面积

7. 正四棱锥的顶点都在同一球面上 . 若该棱锥的高为4，底面边长为2，则该球的表面积为 _____ .

【答案】 $\frac{81}{4}\pi$

【解析】 如图，



四棱锥 $P-ABCD$ 中， PE 为高， PF 为球的直径，由射影定理知 $PA^2 = PF \cdot PE$ ， $AE = \sqrt{2}$.

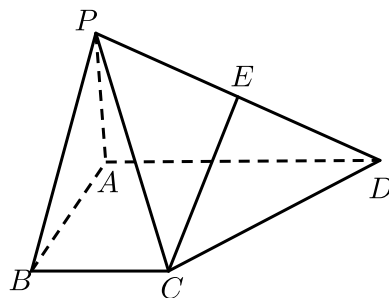
$$PF = 2R, |AP| = 3\sqrt{2}, \text{ 则 } R = \frac{9}{4} ,$$

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{81}{16} = \frac{81}{4}\pi .$$

【标注】 【知识点】 圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征

二、 空间中的位置关系

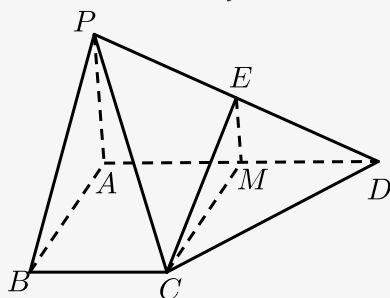
8. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是直角梯形，
 $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ ， $PA = AB = BC = \frac{1}{2}AD = 1$ ， E 为侧棱 PD 的中点。



- (1) 求证： $CE \parallel$ 平面 PAB 。
 (2) $AB \perp$ 平面 PAD 。

【答案】 (1) 证明见解析。
 (2) 证明见解析。

【解析】 (1) 取 AD 中点 M ，连接 EM ， CM ，
 $\left. \begin{array}{l} E \text{ 为 } PD \text{ 中点} \\ M \text{ 为 } AD \text{ 中点} \end{array} \right\} \Rightarrow EM \parallel PA$ ，
 $\left. \begin{array}{l} EM \parallel PA \\ PA \subset \text{面 } PAB \\ EM \not\subset \text{面 } PAB \end{array} \right\} \Rightarrow EM \parallel \text{面 } PAB$ 。
 $BC \parallel \frac{1}{2}AD \Rightarrow BC \parallel AM$
 $\Rightarrow$ 四边形 $ABCM$ 为平行四边形
 $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} AB \parallel CM \\ AB \subset \text{面 } PAB \\ CM \not\subset \text{面 } PAB \end{array} \right\} \Rightarrow CM \parallel \text{面 } PAB$ ，
 $\left. \begin{array}{l} CM \parallel \text{面 } PAB \\ EM \parallel \text{面 } PAB \\ CM \cap EM = M \end{array} \right\} \Rightarrow \text{面 } EMC \parallel \text{面 } PAB$ ，
 $\left. \begin{array}{l} \text{面 } EMC \parallel \text{面 } PAB \\ EC \subset \text{面 } EMC \end{array} \right\} \Rightarrow CE \parallel \text{面 } PAB$ 。



$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \angle BAD = 90^\circ \Rightarrow AB \perp AD, \\
 & \left. \begin{array}{l} PA \perp \text{面} ABCD \\ AB \subset \text{面} ABCD \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp PA, \\
 & \left. \begin{array}{l} AB \perp PA \\ AB \perp AD \\ PA \cap AD = A \\ PA \subset \text{面} PAD \\ AD \subset \text{面} PAD \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp \text{面} PAD.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】几何法求空间角；直线和平面垂直的性质；线面垂直的证明问题；点、直线、平面之间的位置关系；直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题

9. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD \perp ABCD$ ， $\triangle PAD$ 是正三角形，底面 $ABCD$ 是直角梯形， $AB \parallel CD$ ， $CD \perp AD$ ， $CD = 2AB = 2AD = 2$ ， M 为 PC 的中点。

(1) 求证： $BM \parallel$ 平面 PAD 。

(2) 求证：直线 $BM \perp PDC$ 。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

【解析】(1) 取 PD 中点 N ，连接 MN ， AN ， $MN \parallel CD$ ，且 $MN = \frac{1}{2}CD$ 。

$$\text{又} \because AB \parallel \frac{1}{2}CD.$$

$$\therefore AB \parallel MN.$$

四边形 $ABMN$ 为平行四边形。

$$\therefore MB \parallel AN.$$

又 $\because MB \subset \text{面} PAD$ ， $AN \subset \text{面} PAD$ 。

$$\therefore BM \parallel \text{平面} PAD.$$

(2) 面 $PAD \perp$ 平面 $ABDC$ ，且平面 $PAD \cap$ 平面 $ABDC = AD$ 。

$$CD \perp AD.$$

$$\therefore CD \perp \text{平面} PAD.$$

$$AN \subset \text{面} PAD, AN \perp CD.$$

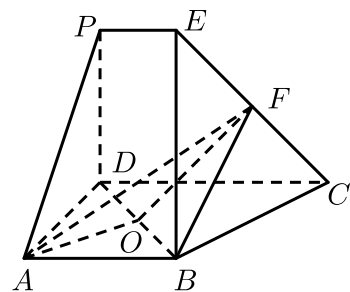
在直角三角形 PAD 中 $AN \perp PD$ 。

$$\text{又} \because PC \cap CD = D, AN \perp \text{平面} PDC.$$

$$MB \parallel AN, \therefore MB \perp \text{平面} PDC.$$

【标注】【知识点】几何法求空间角；直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题；点、直线、平面之间的位置关系；线面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定

10. 如图，在多面体 $ABCDPE$ 中，四边形 $ABCD$ 和 $CDPE$ 都是直角梯形， $AB//DC$ ， $PE//DC$ ， $AD\perp DC$ ， $PD\perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB=PD=DA=2PE=2$ ， $CD=3PE$ ， F 是 CE 的中点。

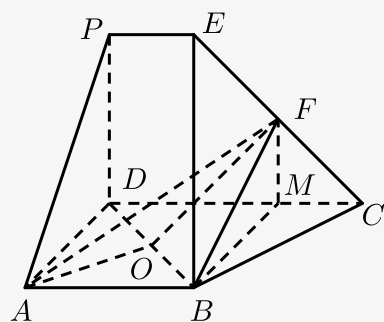


- (1) 求证： $BF//$ 平面 ADP 。
 (2) 已知 O 是 BD 的中点，求证： $BD\perp$ 平面 AOF 。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

【解析】 (1) 作 $FM\perp CD$ ，垂足为 M ，连接 BM ，



所以 $FM//PD$ 且 $DM=2PE=AB$ ，
 又因为 $DM//AB$ ，
 所以 $DMBA$ 是平行四边形，
 所以 $BM//AD$ ，
 因为 $BM\not\subset$ 平面 ADP ， $AD\subset$ 平面 ADP ，
 所以 $BM//$ 平面 ADP ，
 同理， $FM//$ 平面 ADP ，
 因 $BM\cap FM=M$ ，
 所以平面 $BMF//$ 平面 ADP ，
 因为 $BF\subset$ 平面 BFM ，
 所以 $BF//$ 平面 ADP 。

- (2) 因为 $FM//PD$ ， $PD\perp$ 平面 $ABCD$ ，
 所以 $FM\perp$ 平面 $ABCD$ ，
 所以 $FM\perp BM$ ， $FM\perp DM$ ，

又 $FM = 1$, $DM = BM = 2$,

所以 $FD = FB = \sqrt{5}$,

因为 O 是 BD 的中点,

所以 $FO \perp BD$,

因为 $AB = AD$, O 是 BD 的中点,

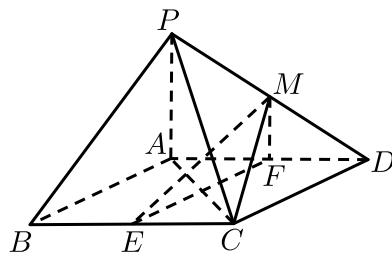
所以 $AO \perp BD$,

因为 $AO \cap FO = O$,

所以 $BD \perp$ 平面 AOF .

【标注】【知识点】线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定；几何法求空间角；线面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定；点、直线、平面之间的位置关系

11. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, $\angle BCD = 135^\circ$, 侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$, $\angle BAP = 90^\circ$, $AB = AC = PA = 6$, E, F 分别为 BC, AD 的中点, 点 M 在线段 PD 上.



- (1) 求证: $EF \perp$ 平面 PAC .
(2) 若 M 为 PD 的中点, 求证: $ME \parallel$ 平面 PAB .

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 在平行四边形 $ABCD$ 中, 因为 $AB = AC$, $\angle BCD = 135^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$.

所以 $AB \perp AC$.

由 E, F 分别为 BC, AD 的中点, 得 $EF \parallel AB$,

所以 $EF \perp AC$,

因为侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $\angle BAP = 90^\circ$,

所以 $PA \perp$ 底面 $ABCD$,

又因为 $EF \subset$ 底面 $ABCD$,

所以 $PA \perp EF$,

又因为 $PA \cap AC = A$, $PA \subset$ 平面 PAC , $AC \subset$ 平面 PAC ,

所以 $EF \perp$ 平面 PAC .

(2) 因为 M 为 PD 的中点 , F 分别为 AD 的中点 ,

所以 $MF \parallel PA$,

又因为 $MF \not\subset$ 平面 PAB , $PA \subset$ 平面 PAB ,

所以 $MF \parallel$ 平面 PAB ,

同理 , 得 $EF \parallel$ 平面 PAB .

又因为 $MF \cap EF = F$, $MF \subset$ 平面 MEF , $EF \subset$ 平面 MEF ,

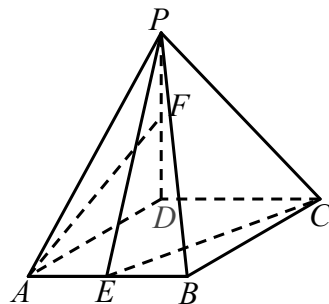
所以平面 $MEF \parallel$ 平面 PAB ,

又因为 $ME \subset$ 平面 MEF ,

所以 $ME \parallel$ 平面 PAB .

【标注】【知识点】几何法求空间角；直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题；直线和平面垂直的判定；线面垂直的证明问题；向量法解决空间中的平行问题

12. 如图 , 在四棱锥 $P - ABCD$ 中 , 底面 $ABCD$ 是菱形 , $\angle DAB = 60^\circ$. $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $PD = AD = 1$, 点 E , F 分别为 AB 和 PD 中点 .



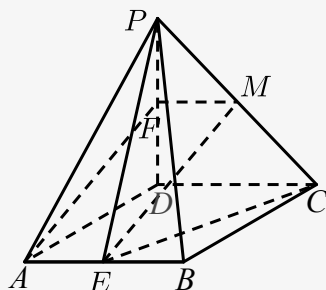
(1) 求证 : 直线 $AF \parallel$ 平面 PEC .

(2) 求证 : $AC \perp$ 面 PBD .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) 作 $FM \parallel CD$ 交 PC 于 M ,



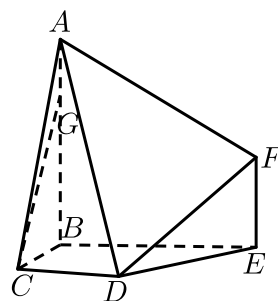
$\therefore AC \perp \text{面} PBD$,
 $\therefore$ 点 F 为 PD 中点 ,
 $\therefore FM \parallel \frac{1}{2} CD$,
 $\therefore AE \parallel \frac{1}{2} AB$,
 $\therefore FM \parallel AE$,
 $\therefore AEMF$ 为平行四边形 ,
 $\therefore AF \parallel EM$,
 $\therefore AF \not\subset \text{平面} PEC$, $EM \subset \text{平面} PEC$,
 $\therefore$ 直线 $AF \parallel \text{平面} PEC$.

(2) 底面 $ABCD$ 是菱形 ,

$\therefore AC \perp BD$,
 $PD \perp \text{平面} ABCD$, $AC \subset \text{平面} ABCD$,
 $\therefore AC \perp PD$,
 又 $BD \perp PD = D$,
 $\therefore AC \perp \text{面} PBD$.

【标注】【知识点】线面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定；几何法求空间角；直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题

13. 如图，多面体 $ABCDEF$ 中， BA, BC, BE 两两垂直，其 $AB \parallel EF, CD \parallel BE, AB = BE = 2, BC = CD = EF = 1$.



- (1) 若点 G 在线段 AB 上，且 $BG = 3GA$ ，求证： $CG \parallel \text{平面} ADF$.
 (2) 求证： $\text{平面} ABD \perp \text{平面} DEF$.

【答案】 (1) 证明见解析 .
 (2) 证明见解析 .

【解析】 (1) 过 G 点作 $GH \parallel BE$ ，与 AF 相交于点 H ，

 $\therefore EF \parallel BM,$

即 $GH \parallel \frac{1}{2}MF$, $GH \parallel \frac{1}{2}BE$,

$$GH \parallel \frac{1}{2}CD.$$
$$\therefore HD // GC .$$
$$\therefore CG \parallel \text{平面} ADF.$$
$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{2}, DE = \sqrt{2}.$$
$$\therefore \angle BDE = 90^\circ, BD \perp DE.$$
$$BE \cap BC = B .$$

又 $\because DE \subset \text{面} BCDE$.

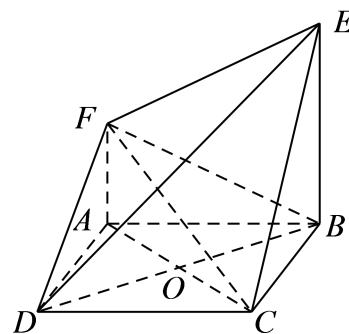
$$\therefore AB \cap BD = B.$$

又 $\because DE \subset \text{面}DEF$.

 $\therefore \text{面} ABD \perp \text{面} DEF.$

11

14. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$ ， $AF \parallel BE$ ， $AB \perp BE$ ， $AB = BE = 2$ ， $AF = 1$ 。

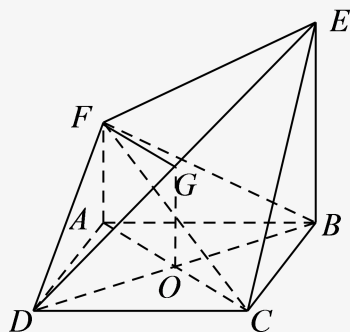


- (1) 求证： $AC \parallel$ 平面 DEF 。
 (2) 求证：平面 $BDE \perp$ 平面 DEF 。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

【解析】 (1) 连接 AC ， BD 交点为 O ，取 DE 的中点 G ，连结 OG ， FG ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形， $\therefore O$ 为 BD 中点。

$\therefore OG \parallel BE$ ，且 $OG = \frac{1}{2}BE$ 。

又 $\because AF \parallel BE$ ， $AF = \frac{1}{2}BE$ ，

$\therefore AF \parallel OG$ ， $AF = OG$ ，

$\therefore$ 四边形 $OAFG$ 为平行四边形，

$\therefore AO \parallel FG$ ，即 $AC \parallel FG$ 。

又 $AC \not\subset$ 平面 DEF ， $FG \subset$ 平面 DEF ，

$\therefore AC \parallel$ 平面 DEF 。

(2) $\because$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$ ，平面 $ABCD \cap$ 平面 $ABEF = AB$ ， $AB \perp BE$ ，

$\therefore BE \perp$ 平面 $ABCD$ 。

$\because AC \subset$ 平面 $ABCD$ ， $\therefore BE \perp AC$ 。

又四边形 $ABCD$ 为正方形, $\therefore AC \perp BD$.

又 $BD \cap BE = B$, $BD \subset \text{平面} BDE$, $BE \subset \text{平面} BDE$,

$\therefore AC \perp \text{平面} BDE$.

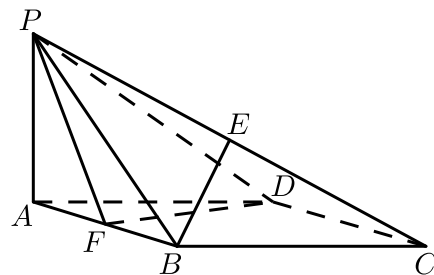
由(1)可知 $AC \parallel FG$, $\therefore FG \perp \text{平面} BDE$,

又 $FG \subset \text{平面} DEF$,

$\therefore \text{平面} BDE \perp \text{平面} DEF$,

【标注】【知识点】平面和平面垂直的判定；面面垂直的证明问题；几何法求空间角；直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题

15. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = 2$, $PA = 1$. $PA \perp \text{平面} ABCD$, E 是 PC 的中点, F 是 AB 的中点.



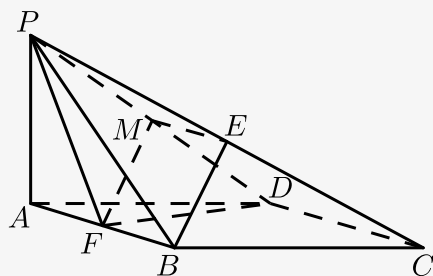
(1) 求证: $BE \parallel \text{平面} PDF$.

(2) 求证: $\text{平面} PDF \perp \text{平面} PAB$.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】(1): 取 PD 中点 M ,



$\therefore E$ 是 PC 的中点,

$\therefore ME$ 是 $\triangle PCD$ 的中位线,

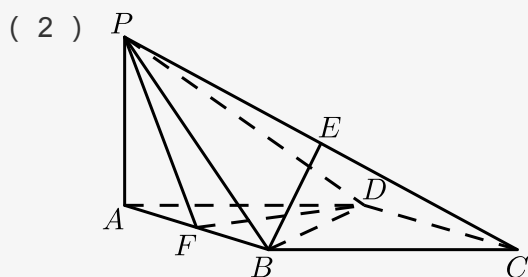
$\therefore ME \parallel FB$,

$\therefore$ 四边形 $MEBF$ 是平行四边形,

$\therefore BE \parallel MF$,

$\because BE \not\subset \text{平面} PDF, MFC \subset \text{平面} PDF,$

$\therefore BE // \text{平面} PDF.$



连接 BD , 得 $\triangle ABD$ 为等边三角形,

又 $\because F$ 为 AB 中点,

$\therefore DF \perp AB,$

$\because PA \perp \text{平面} ABCD,$

$\therefore PA \perp DF,$

$\because \text{由 } PA \cap AB = A,$

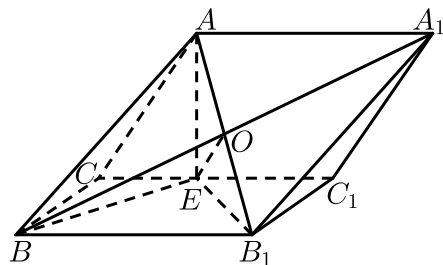
$\therefore DF \perp \text{平面} PAB,$

$\because DF \subset \text{平面} PDF,$

$\therefore \text{平面} PDF \perp \text{平面} PAB.$

【标注】【知识点】线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定；直线和平面垂直的判定；面面垂直的证明问题；平面和平面垂直的判定；几何法求空间角；向量法解决空间中的平行问题

16. 如图, 斜三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 , E 为棱 CC_1 的中点, A_1B 与 AB_1 交于点 O , 若 $AC = CC_1 = 2BC = 2$, $\angle ACC_1 = \angle CBB_1 = 60^\circ$.



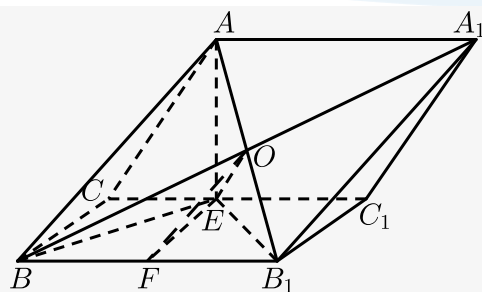
(1) 证明: 直线 $OE // \text{平面} ABC$.

(2) 证明: 平面 $ABE \perp \text{平面} AB_1E$.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 取 BB_1 的中点 F , 连接 OF, EF ,

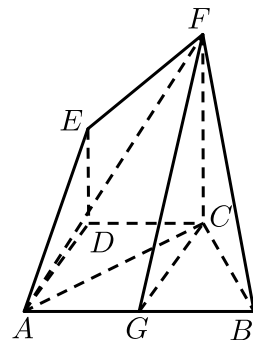


$\because E, O$ 分别为 CC_1, BA_1 的中点 ,
 $\therefore OF \parallel AB, EF \parallel BC$,
 $\because OF \not\subset \text{平面} ABC, EF \not\subset \text{平面} ABC$,
 $\therefore OF \parallel \text{平面} ABC, EF \parallel \text{平面} ABC$,
 $\therefore \text{平面} OEF \parallel \text{平面} ABC$,
 $\therefore \text{直线} OE \parallel \text{平面} ABC$.

(2) $\because AC = 2CE = 2, \angle ACC_1 = 60^\circ$,
 $\therefore AE \perp CC_1$,
 $\because \text{平面} ACC_1A_1 \perp \text{平面} BCC_1B_1$,
 $\therefore AE \perp \text{平面} BCC_1B_1$,
 $\therefore AE \perp BE$,
 $\because BC = CE = EC_1 = C_1B_1 = 1, \angle CBB_1 = 60^\circ$,
 $\therefore \angle CEB = 30^\circ, \angle C_1EB_1 = 60^\circ$,
 $\therefore \angle BEB_1 = 90^\circ$, 即 $EB_1 \perp BE$,
 $\therefore BE \perp \text{平面} AB_1E$,
 $\therefore \text{平面} ABE \perp \text{平面} AB_1E$.

【标注】【知识点】线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定；几何法求空间角；面面垂直的证明问题；平面和平面垂直的判定

17. 在等腰梯形 $ABCD$ 中 , $AB \parallel CD$, 直线 $FC \perp \text{平面} ABCD$, $ED \parallel FC$ 点 G 为 AB 的中点 , 且 $FC = AB = 2ED = 2CD = 2, \angle ABC = 60^\circ$.



(1) 求证: $AE \parallel$ 平面 GCF .

(2) 求证: 平面 $ACF \perp$ 平面 BCF .

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 取 FC 的中点 N , 连接 FN ,

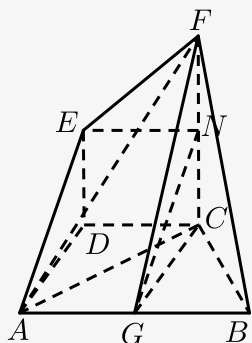
$$\because ED \parallel FC, FC = 2ED,$$

$$\therefore ED \parallel NC,$$

$\therefore$ 四边形 $EDCN$ 是平行四边形,

$$\therefore EN \parallel DC,$$

连接 NG , $EN \parallel DC$,



$$\text{又 } DC \parallel AG,$$

$$\therefore EN \parallel AG,$$

$\therefore$ 四边形 $EAGN$ 是平行四边形,

$$\therefore EA \parallel NG,$$

又 $EA \not\subset$ 平面 GCF , $NC \subset$ 面 GCF ,

$$\therefore AE \parallel \text{平面 } GCF.$$

(2) $\because DC \parallel AG$,

$\therefore$ 四边形 $AGCD$ 为平行四边形,

$$\therefore AD = GC,$$

$$\because AD = BC,$$

$$\therefore BC = GC,$$

$$\because \angle ABC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle BCG$ 为等边三角形,

$$\because AB = 2,$$

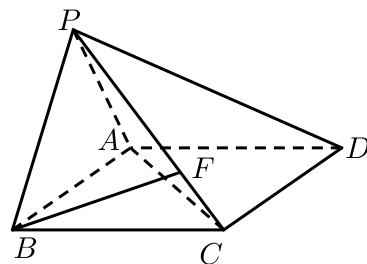
$$\therefore BC = BG = \frac{1}{2}AB = 1,$$

由余弦定理得:

$$\begin{aligned}
 AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 3, \\
 \therefore AC^2 + BC^2 &= AB^2, \\
 \therefore \angle ACB &= 90^\circ, \\
 \therefore AC &\perp BC, \text{ 又 } AC \perp CF, BC \cap FC = C, \\
 \therefore AC &\perp \text{平面 } BCF, \\
 \text{又 } AC &\subset \text{平面 } ACF, \\
 \therefore \text{平面 } ACF &\perp \text{平面 } BCF.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；向量法解决线面角问题

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 的边长是 2 的正方形， $PA = PB$ ， $PA \perp PB$ ， F 为 CP 上的点，且 $BF \perp$ 平面 PAC 。



- (1) 求证： $PA \perp BC$ 。
 (2) 求证：平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$ 。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

【解析】 (1) $\because BF \perp$ 平面 PAC ， $PA \subset$ 平面 PAC ，

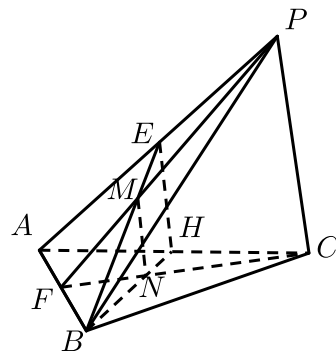
$$\begin{aligned}
 \therefore BF &\perp PA, \\
 \because PA &\perp PB, PB \cap BF = B, \\
 \therefore PA &\perp \text{平面 } PBC, \\
 \text{又 } BC &\subset \text{平面 } PBC, \\
 \therefore PA &\perp BC.
 \end{aligned}$$

- (2) 由(1)可知 $PA \perp BC$ ，
 又底面 $ABCD$ 是正方形，
 $\therefore AB \perp BC$ ，
 又 $AB \cap PA = A$ ，
 $\therefore BC \perp$ 平面 PAB ，
 又 $BC \subset$ 平面 $ABCD$ ，

$\therefore$ 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$.

【标注】【知识点】直线和平面垂直的性质；平面和平面垂直的判定；点、直线、平面之间的位置关系

19. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形， $\angle PCA = 90^\circ$ ， E 、 F 、 H 分别为 AP 、 AB 、 AC 的中点， PF 交 BE 于点 M ， CF 交 BH 于点 N ， $AP = 4$ ， $BE = \sqrt{3}$.



- (1) 求证： $AC \perp$ 平面 BEH .
 (2) 求证： $PC \parallel MN$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because \triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形， H 是 AC 中点，

$$\therefore BH \perp AC ,$$

$\because \angle PCA = 90^\circ$ ， E 、 H 分别是 AP 、 AC 的中点，

$$\therefore \angle EHA = 90^\circ ,$$

$$\therefore EH \perp AC ,$$

$$\because EH \cap BH = H ,$$

$$\therefore AC \perp \text{平面 } BEH .$$

(2) $\because PF$ 交 BE 于点 M ， CF 交 BH 于点 N ，

$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形， $\angle PCA = 90^\circ$ ， E 、 F 、 H 分别为 AP 、 AB 、 AC 的中点，

$\therefore N$ 是 $\triangle ABC$ 的中心，

$$\therefore \frac{FN}{FC} = \frac{1}{3} , M \text{ 是 } \triangle ABP \text{ 的重心 ,}$$

$$\therefore \frac{FM}{FP} = \frac{3}{4} ,$$

$$\therefore \frac{FN}{FC} = \frac{FM}{FP} ,$$

$$\therefore PC \parallel MN .$$

【标注】【知识点】直线和平面垂直的判定；线面垂直的证明问题；几何法求空间角；线线平行的证明问题；棱柱、棱锥、棱台的结构特征

三、综合创新

20. 在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $AB \perp BC$ ， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ， $PA = 5$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为_____.

【答案】 50π

【解析】 $\because$ 在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ，

$AB \perp BC$ ， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ， $PA = 5$ ，

$\therefore$ 以 AB ， BC ， PA 为长宽高构建长方体，

则长方体的外接球就是三棱锥 $P-ABC$ 的外接球，

$\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径 $R = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ，

$\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为：

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 50\pi.$$

故答案为： 50π .

【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的表面积；组合体求体积、表面积问题

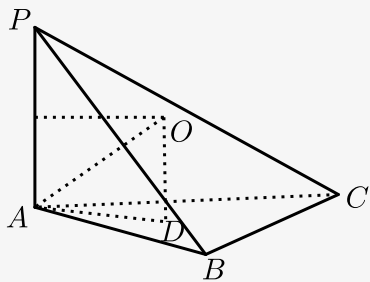
21. 在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ，且 $\triangle ABC$ 为等边三角形， $AP = AB = 2$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为（ ）.

A. $\frac{27}{2}\pi$
C. $\frac{26}{3}\pi$

B. $\frac{28}{3}\pi$
D. $\frac{25}{2}\pi$

【答案】 B

【解析】 如图所示：三棱锥 $P-ABC$ 中，



$PA \perp$ 平面 ABC ，且 $\triangle ABC$ 为等边三角形， $AP = AB = 2$ ，

$$\therefore AD = \frac{2}{3} \sqrt{2^2 - 1^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{外接球的半径 } r^2 = 1^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{21}{9},$$

$$\therefore S = 4\pi \times \frac{21}{9} = \frac{28\pi}{3}.$$

故选：B.

【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的表面积

22. 在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $\triangle ABC$ 是等腰三角形，其中 $AB = BC = 2$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $PA = 4$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 _____.

【答案】 32π

【解析】 $AB = BC = 2$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ，

则 $AC = 2\sqrt{3}$ ，设 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 r ，

$$2r = \frac{AC}{\sin \angle ABC} = 4, \text{ 即 } r = 2,$$

设外接球半径为 R ，

$$\text{则 } R^2 = \left(\frac{PA}{2}\right)^2 + r^2 = 8,$$

$$\text{故 } R = 2\sqrt{2}, S = 4\pi R^2 = 32\pi.$$

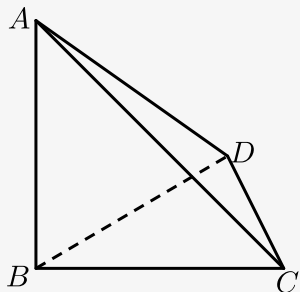
故答案为： 32π .

【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题

23. 已知三棱锥 $A-BCD$ 中， $AB \perp$ 面 BCD ， $\angle BDC = 90^\circ$ ， $AB = BD = 2$ ， $CD = 1$ ，则三棱锥的外接球体积为 _____.

【答案】 $\frac{9}{2}\pi$

【解析】 如图，



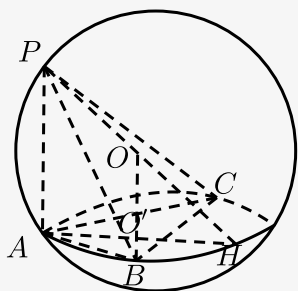
$\because AB \perp \text{面} BCD$,
 $\therefore AB \perp DC$,
 又 $\angle BDC = 90^\circ$,
 $\therefore BD \perp DC$, 而 $AB \cap BD = B$,
 $\therefore DC \perp \text{平面} ABD$, 则 $DC \perp AD$,
 $\therefore AC$ 为三棱锥 $A - BCD$ 的外接球的直径 ,
 $\because AB = BD = 2$, $CD = 1$,
 $\therefore AC = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$,
 $\therefore$ 三棱锥的外接球的半径为 $\frac{3}{2}$,
 $\therefore$ 三棱锥的外接球的体积为 $V = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{2}\pi$.
 故答案为 : $\frac{9}{2}\pi$.

【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的体积

24. 已知三棱锥 $P - ABC$ 的底面 ABC 是边长为 2 的等边三角形 , $PA \perp \text{平面} ABC$, 且 $PA = 2$, 则该三棱锥外接球的表面积为 _____ .

【答案】 $\frac{28\pi}{3}$

【解析】 如图 ,



$PA \perp \text{平面} ABC$, 连结 PO , 延长至圆上交于 H ,
 过 O 作 $OO' \parallel PA$ 交平面 ABC 于 O' ,
 则 $\triangle PAH$ 为 $\text{Rt}\triangle$,

$\therefore O$ 为斜边 PH 的中点,

$\therefore OO'$ 为 $\triangle PAH$ 的中位线, O' 为小圆圆心,则 O' 为 AH 的中点,则 $\frac{OO'}{PA} = \frac{O'H}{AH} = \frac{1}{2}$,

$\therefore O'H = AO' = \frac{2}{3}\sqrt{2^2 - 1^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $OO' = \frac{1}{2}PA = 1$,

则球的半径 $R = OH = \sqrt{OO'^2 + O'H^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$,

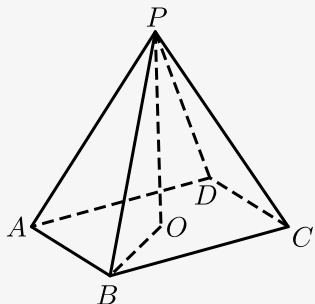
球的表面积为 $4\pi R^2 = \frac{28\pi}{3}$.

【标注】【知识点】空间几何体的表面积；空间几何体的内切球、外接球问题

25. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 满足 $PA = PB = PC = PD = AB = 2$, 且底面 $ABCD$ 为正方形, 则该四棱锥的外接球的体积为 _____.

【答案】 $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$

【解析】



由已知, 四棱锥 $P-ABCD$ 为正四棱锥, 设外接球半径为 R ,

作 $PO \perp$ 底面 $ABCD$,

$\therefore PA = PB = PC = PD = AB = 2$,

$\therefore PO = BO = \sqrt{2}$,

同理可得 $AO = CO = DO = PO = \sqrt{2}$,

$\therefore R = \sqrt{2}$,

$\therefore$ 外接球的体积为 $V = \frac{4\pi}{3} \cdot R^3 = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$.

故答案为: $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$.

【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的体积