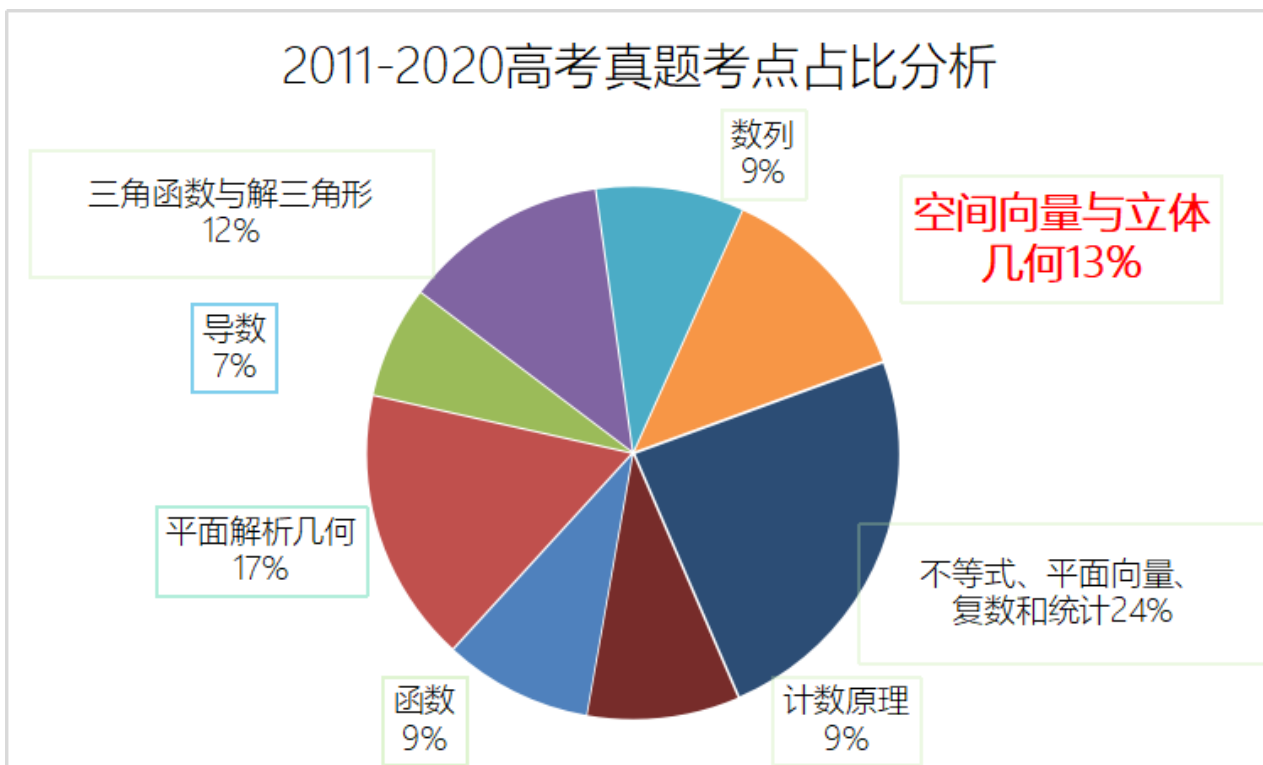


第一讲-立体几何初步

1. 考点分析

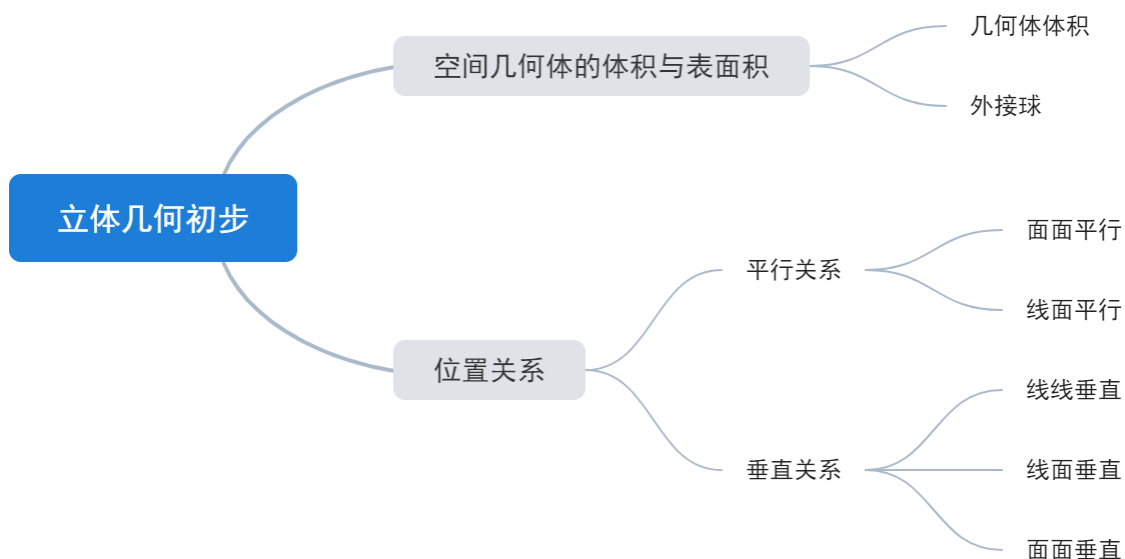
📊 考点占比



📊 考点分析

2011-2020高考真题考点分析							
考点	几何体体积	外接球	平行判定	垂直判定	线线角	线面角	二面角
2011			17 (文1)	17 (文2)、17 (理3)	17 (理1)	17 (文3)	17 (理2)
2012				17 (文2)、17 (理1)	17 (文1)、17 (理3)	17 (文3)	17 (理2)
2013			17 (文1)	17 (文2)、17 (理1)		17 (文3)、17 (理3)	17 (理2)
2014			17 (文1)	17 (文2)、17 (理1)		17 (文3)、17 (理2)	17 (理3)
2015			17 (文1)、17 (理1)	17 (文2)		17 (文3)、17 (理3)	17 (理2)
2016			17 (文1)、17 (理1)	17 (文2)		17 (文3)、17 (理3)	17 (理2)
2017	11 (文)、10 (理)		17 (理1)	17 (文2)	17 (文1)、17 (理3)	17 (文3)	17 (理2)
2018	11 (文)、11 (理)		17 (理1)	17 (文1)	17 (文2)	17 (文3)、17 (理3)	17 (理2)
2019	12 (文)、11 (理)		17 (文1)、17 (理1)	17 (文2)		17 (文3)、17 (理2)	17 (理3)
2020		5		17 (1)		17 (3)	17 (2)
频次	4	3	11	14	6	16	10

2. 知识梳理



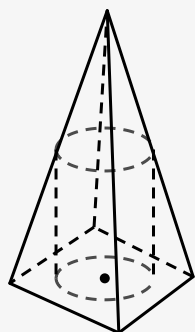
一、空间几何体的表面积与体积

1. 真题分析

1. 已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，侧棱长均为 $\sqrt{5}$ ．若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心，则该圆柱的体积为 _____ ．

【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【解析】



由题作图可知，四棱锥底面正方形的对角线长为2，且垂直相交平分，

由勾股定理得：正四棱锥的高为2，

由于圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，

有圆柱的上底面直径为底面正方形对角线的一半等于1，即半径等于 $\frac{1}{2}$ ；

由相似比可得圆柱的高为正四棱锥高的一半1，

则该圆柱的体积为： $V = Sh = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 1 = \frac{\pi}{4}$ ；

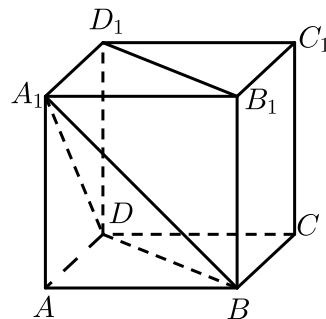
故答案为： $\frac{\pi}{4}$

【标注】【知识点】空间几何体的体积；组合体求体积、表面积问题

备注：2019年高考真题天津卷文科第12题

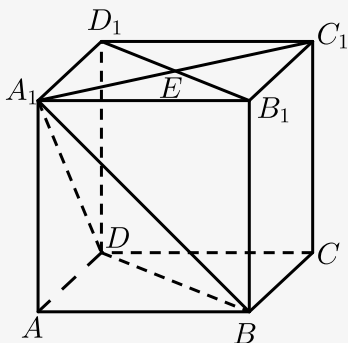
分析：本题考察了常见空间几何体体积的计算，其中包括如何计算正四棱锥的高以及圆柱体积。

2. 如图，已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，则四棱锥 $A_1 - BB_1D_1D$ 的体积为 _____ .



【答案】 $\frac{1}{3}$

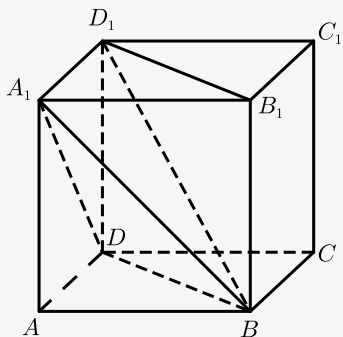
【解析】方法一：如图，连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于点 E ，



则 $A_1E \perp B_1D_1$ ， $A_1E \perp BB_1$ ，则 $A_1E \perp$ 平面 BB_1D_1D ，

所以 A_1E 为四棱锥 $A_1 - BB_1D_1D$ 的高，且 $A_1E = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，矩形 BB_1D_1D 的长和宽分别为 $\sqrt{2}$ ，1，故 $V_{A_1 - BB_1D_1D} = \frac{1}{3} \times 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3}$ 。

方法二：如图，连接 BD_1 ，



则四棱锥 $A_1 - BB_1D_1D$ 分成两个三棱锥 $B - A_1DD_1$ 与 $B - A_1B_1D_1$,

$$\begin{aligned} V_{A_1-BB_1D_1D} &= V_{B-A_1DD_1} + V_{B-A_1B_1D_1} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 \\ &= \frac{1}{3} . \end{aligned}$$

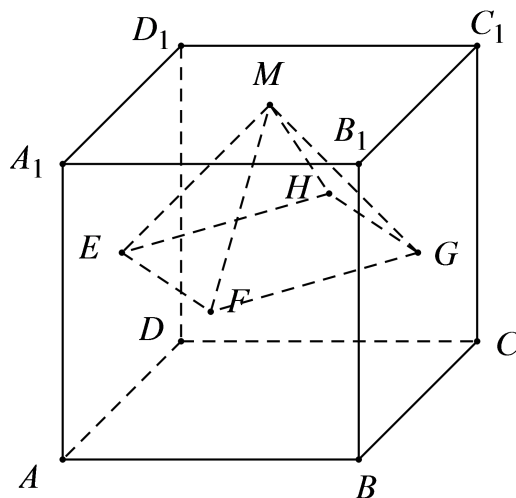
【标注】【素养】直观想象

【知识点】空间几何体的体积

备注：2018年高考真题天津卷文科11题

分析：本题考察的是四棱锥体积的计算，重点还是在于正四棱锥高的计算。

3. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，除面 $ABCD$ 外，该正方体其余各面的中心分别为点 E, F, G, H, M （如图），则四棱锥 $M - EFGH$ 的体积为 _____ .



【答案】 $\frac{1}{12}$

【解析】设 M 到平面 $EFGH$ 的距离为 h ,

$$\begin{aligned} \therefore V_{M-EFGH} &= \frac{1}{3} \cdot S_{\text{正方形}EFGH} \cdot h , \\ S_{\text{正方形}EFGH} &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} , \\ h &= \frac{1}{2} AA_1 = \frac{1}{2} , \\ \therefore V_{M-EFGH} &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} . \end{aligned}$$

【标注】【知识点】空间几何体的体积；组合体求体积、表面积问题

4.

已知一个正方体的所有顶点在一个球面上，若这个正方体的表面积为18，则这个球的体积为_____。

【答案】 $\frac{9\pi}{2}$

【解析】 设正方体边长为 a ，则 $6a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 3$ ，解得 $a = \sqrt{3}$ ，
外接球直径为 $2R = \sqrt{3}a = 3$ ， $R = \frac{3}{2}$ ， $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{27}{8} = \frac{9\pi}{2}$ 。

【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的体积；组合体求体积、表面积问题

备注：2017年高考真题天津卷理科第10题

分析：本题考察正方体外接球半径的计算方法，其中还包括已知正方体表面积计算棱长以及球的体积公式。

5. 若棱长为 $2\sqrt{3}$ 的正方体的顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（ ）。

- A. 12π B. 24π C. 36π D. 144π

【答案】 C

【解析】 由题意，正方体的对角线就是球的直径，
 $\therefore 2R = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = 6$ ，
 $\therefore R = 3$ ，
 $\therefore S = 4\pi R^2 = 36\pi$ 。
故选C。

【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的表面积；组合体求体积、表面积问题

2. 思路总结

考点总结：

- 1、正四棱锥的特征以及高的计算；
- 2、四棱锥体积的计算；
- 3、正方体外接球半径的计算；正方体外接球半径等于棱长的 $\sqrt{3}$ 倍，推广到一般情形为长方体的外接球直径等于体对角线的长度

3. 模拟演练

6. 埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥．以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积，则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为（ ）．



A. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
C. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】 C

【解析】 设正四棱锥侧面三角形的高为 h_1 ，正四棱锥的高为 h_2 ，底面正方形的边长为 m ，

$$\text{则有：} h_2^2 = h_1^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 \quad ①,$$

$$\text{又由题可知：} h_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot h_1 \quad ②,$$

$$\text{由①②知：} 4h_1^2 - 2mh_1 - m^2 = 0,$$

$$\text{即} 4\left(\frac{h_1}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{h_1}{m}\right) - 1 = 0,$$

$$\text{解得：} \frac{h_1}{m} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ 或 } \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ (舍去).}$$

故选C.

【标注】 【知识点】 棱柱、棱锥、棱台的结构特征

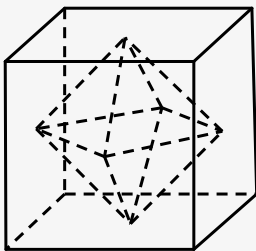
7. 棱长为 a 的正方体中，连接相邻面的中心，以这些线段为棱的八面体的体积为（ ）．

A. $\frac{a^3}{3}$
C. $\frac{a^3}{6}$

B. $\frac{a^3}{4}$
D. $\frac{a^3}{12}$

【答案】 C

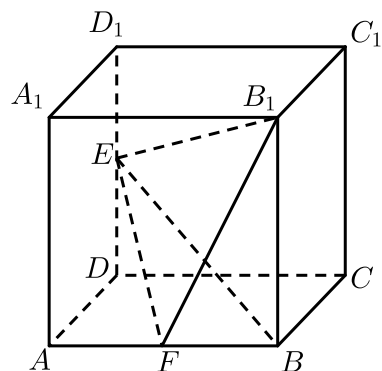
【解析】 画出图，



这个八面体是有两个四棱锥底面合在一起组成的，
一个四棱锥的底面面积是正方体的一个面的一半，
就是 $\frac{1}{2}a^2$ ，高为 $\frac{1}{2}a$ ，
所以八面体的体积为： $2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}a^2 \times \frac{1}{2}a = \frac{a^3}{6}$ 。
故选C。

【标注】【知识点】组合体求体积、表面积问题；空间几何体的体积

8. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1， E 为棱 DD_1 上的点， F 为 AB 的中点，则三棱锥 $B_1 - BFE$ 的体积为 _____。

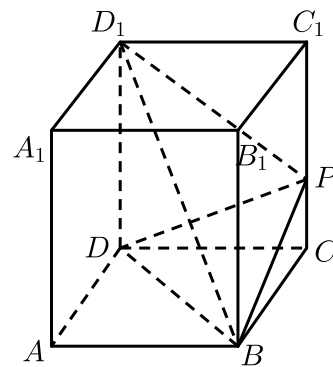


【答案】 $\frac{1}{12}$

【解析】 $V_{B_1-BFE} = V_{E-BFB_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BFB_1} \cdot AD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{12}$ 。

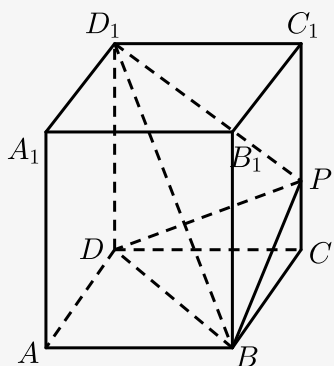
【标注】【知识点】等体积法

9. 如图，在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， P 是侧棱 CC_1 上一点，且 $C_1P = 2PC$ 。设三棱锥 $P - D_1DB$ 的体积为 V_1 ，正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 V ，则 $\frac{V_1}{V}$ 的值为 _____。



【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】



设正四面体中， $AB = a$ ， $AD = b$ ， $AA_1 = c$ ，

则 $V = a \cdot b \cdot c$ ，

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle PD_1D} \cdot |BC| \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot b \\ &= \frac{1}{6} abc \\ &= \frac{1}{6} V, \\ \therefore \frac{V_1}{V} &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】组合体求体积、表面积问题；空间几何体的体积

10. 正方体外接球的表面积为 16π ，则该正方体的表面积为 _____。

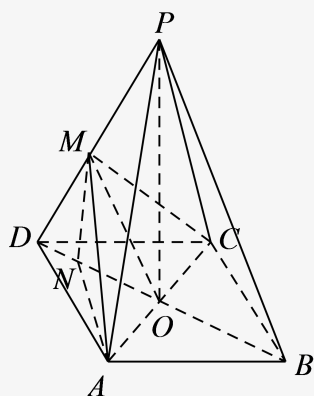
【答案】 32

【解析】因为正方体的外接球的表面积是 16π ，所以 $4\pi R^2 = 16\pi$ ，

则外接球的半径 $R = 2$ ，

所以正方体的体对角线长为 4，棱长等于 $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ ，

所以正方体的表面积为 $6 \times (\frac{4}{3}\sqrt{3})^2 = 32$ 。



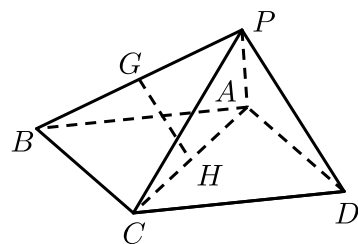
因为 O 为 AC 的中点，所以 O 为 BD 的中点，
 又 M 为 PD 的中点，所以 $PB \parallel MO$.
 因为 $PB \not\subset$ 平面 ACM ， $MO \subset$ 平面 ACM ，
 所以 $PB \parallel$ 平面 ACM .

- (2) 证明：因为 $\angle ADC = 45^\circ$ ，且 $AD = AC = 1$ ，
 所以 $\angle DAC = 90^\circ$ ，即 $AD \perp AC$ ，
 又 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AD \subset$ 平面 $ABCD$ ，
 所以 $PO \perp AD$ ，而 $AC \cap PO = O$ ，
 所以 $AD \perp$ 平面 PAC .

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；直线和平面平行的性质；直线和平面垂直的性质

备注：2011年高考真题天津卷文科第17题

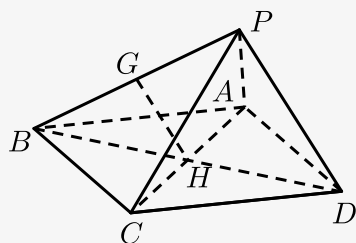
13. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形， $\triangle PCD$ 为等边三角形，平面 $PAC \perp$ 平面 PCD ， $PA \perp CD$ ， $CD = 2$ ， $AD = 3$.



- (1) 设 G ， H 分别为 PB ， AC 的中点，求证： $GH \parallel$ 平面 PAD .
 (2) 求证： $PA \perp$ 平面 PCD .

【答案】(1) 证明见解析 .
 (2) 证明见解析 .

【解析】(1) 如图，连接 BD ，



易知 $AC \cap BD = H$ ， $BH = DH$ 。

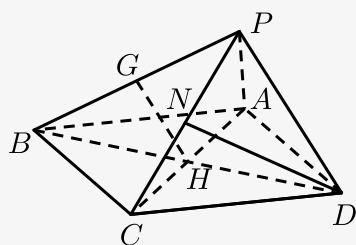
又由 $BG = PG$ ，

得 $GH \parallel PD$ ，

又因为 $GH \not\subset$ 平面 PAD ， $PD \subset$ 平面 PAD ，

所以 $GH \parallel$ 平面 PAD 。

(2) 如图，取棱 PC 的中点 N ，连接 DN 。



依题意得， $DN \perp PC$ ，

又因为平面 $PAC \perp$ 平面 PCD ，平面 $PAC \cap$ 平面 $PCD = PC$ ，

所以 $DN \perp$ 平面 PAC ，又 $PA \subset$ 平面 PAC ，

故 $DN \perp PA$ 。

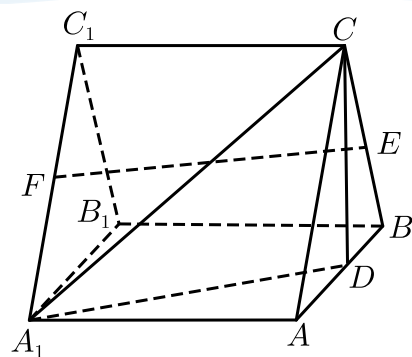
又 $PA \perp CD$ ， $CD \cap DN = D$ ，

所以 $PA \perp$ 平面 PCD 。

【标注】【知识点】几何法求空间角

备注：2019年高考真题天津卷文科第17题

14. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，侧棱 $A_1A \perp$ 底面 ABC ，且各棱长均相等， D ， E ， F 分别为棱 AB ， BC ， A_1C_1 的中点。

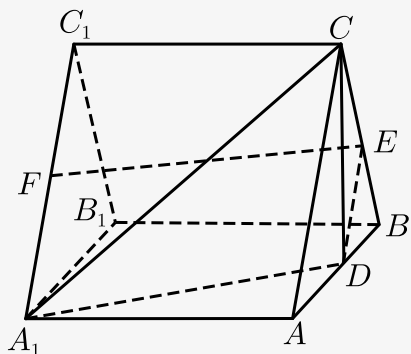


- (1) 证明 $EF \parallel \text{平面} A_1CD$.
- (2) 证明 $\text{平面} A_1CD \perp \text{平面} A_1ABB_1$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC \parallel A_1C_1$, 且 $AC = A_1C_1$,



连接 ED , 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 D, E 分别为 AB, BC 的中点, 所以 $DE = \frac{1}{2}AC$ 且 $DE \parallel AC$, 又 F 为 A_1C_1 的中点, 可得 $A_1F = DE$, 且 $A_1F \parallel DE$, 即四边形 A_1DEF 为平行四边形, 所以 $EF \parallel DA_1$, 又 $EF \notin \text{平面} A_1CD$, $DA_1 \subset \text{平面} A_1CD$, 所以 $EF \parallel \text{平面} A_1CD$.

(2) 连结 CD .

$\because \triangle ABC$ 是正三角形, D 为 AB 的中点,

$\therefore CD \perp AB$.

又 $\because$ 侧棱 $A_1A \perp$ 底面 ABC , $CD \subset \text{平面} ABC$,

$\therefore CD \perp A_1A$.

又 $A_1A \subset \text{平面} A_1ABB_1$, $AB \subset \text{平面} A_1ABB_1$, $A_1A \cap AB = A$,

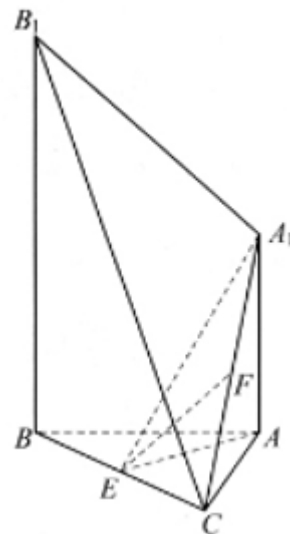
$\therefore CD \perp \text{平面} A_1ABB_1$. $\because CD \subset \text{平面} A_1CD$,

$\therefore \text{平面} A_1CD \perp \text{平面} A_1ABB_1$.

【标注】 【知识点】直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题；几何法求空间角；点、直线、

备注：2013年高考真题天津卷文科第17题

15. 如图，已知 $AA_1 \perp$ 平面 ABC ， $BB_1 // AA_1$ ， $AB = AC = 3$ ， $BC = 2\sqrt{5}$ ， $AA_1 = \sqrt{7}$ ， $BB_1 = 2\sqrt{7}$ ，
点 E ， F 分别是 BC ， A_1C 的中点，



- (1) 求证： $EF //$ 平面 A_1B_1BA ；
(2) 求证：平面 $AEA_1 \perp$ 平面 BCB_1 。

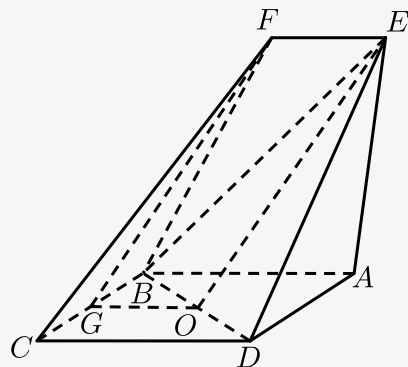
【答案】 (1) 见解析

(2) 见解析

【解析】 (1) 如图，如图 A_1B ，在 $\triangle A_1BC$ 中，因为 E, F 分别是 BC, A_1C 的中点，所以

$$EF // BA_1,$$

又因为 $EF \not\subset$ 平面 A_1B_1BA ，所以 $EF //$ 平面 A_1B_1BA



在 $\triangle BCD$ 中，因为 G 为 BC 的中点，
 所以， $OG \parallel DC$ ，且 $OG = \frac{1}{2}DC = 1$ ，
 又因为 $EF \parallel AB$ ， $AB \parallel CD$ ，
 所以， $EF \parallel OG$ 且 $EF = OG$ ，
 即四边形 $OGFE$ 为平行四边形，
 所以， $FG \parallel OE$ ，又 $FG \not\subset$ 平面 BED ， $OE \subset$ 平面 BED ，
 所以， $FG \parallel$ 平面 BED 。

- (2) 在 $\triangle ABD$ 中， $AD = 1$ ， $AB = 2$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ ，
 由余弦定理可 $BD = \sqrt{3}$ ，进而可得 $\angle ADB = 90^\circ$ ，即 $BD \perp AD$ ，
 又因为平面 $AED \perp$ 平面 $ABCD$ ， $BD \subset$ 平面 $ABCD$ ；
 平面 $AED \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ，
 所以 $BD \perp$ 平面 AED 。
 又因为 $BD \subset$ 平面 BED ，
 所以平面 $BED \perp$ 平面 AED 。

【标注】【知识点】几何法求空间角；平面和平面垂直的判定；面面垂直的证明问题；直线和平面垂直的性质；线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定

备注：2016年高考真题天津卷文科第17题

2. 思路总结

题型总结：

1、平行关系的判定；

线面平行转化为线线平行，我们证明线线平行的思路为构造中位线模型或者平行四边形模型，少数情形下，我们证明线面平行可借助于面面平行；

面面平行转化为线面平行，找到两组线面平行即可得面面平行；

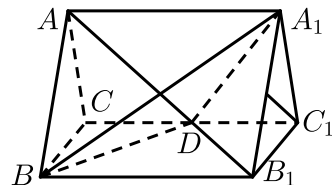
2、垂直关系的判定；

线面垂直的证明思路有两个：一是直接依据线面垂直判定定理去寻找线线垂直，二是根据面面垂直的性质可得到线面垂直；

面面垂直的证明可转化为线面垂直，找到一组线面垂直可得面面垂直。

3. 模拟演练

17. 如图，正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长都相等， D 为 CC_1 中点， E 为 A_1B_1 的中点。



(1) 求证： $C_1E \parallel$ 平面 A_1BD 。

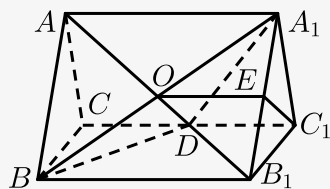
(2) 求证： $AB_1 \perp$ 平面 A_1BD 。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

【解析】 (1) 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长都相等， D 为 CC_1 中点， E 为 A_1B_1 的中点。

连接 AB_1 交 A_1B 于 O 点，连接 OE ，



则： $OE \parallel C_1D$ 且 $OE = C_1D$ ，

则：四边形 OEC_1D 为平行四边形。

所以： $OD \parallel C_1E$ ，

$C_1E \not\subset$ 平面 A_1BD ， $OD \subset$ 平面 A_1BD ，

则： $C_1E \parallel$ 平面 A_1BD 。

(2) 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长都相等，

所以：四边形 ABB_1A_1 为正方形，

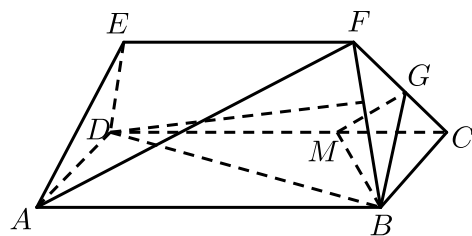
则： $AB_1 \perp A_1B$ ，

由于： $OD \perp AB_1$ ，

则： $AB_1 \perp$ 平面 A_1BD 。

【标注】【知识点】直线和平面垂直的判定；直线和平面平行的判定

18. 如图，在五面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是矩形， $BC = BF = CF = AE = DE = 2$ ， $AB = 6$ ， $EF = 4$ ， $EF \parallel AB$ ， G 为 FC 的中点， M 为线段 CD 上一点，且 $CM = 2$ 。



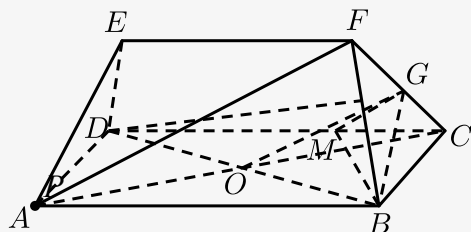
- (1) 求证： $AF \parallel$ 平面 BDG 。
 (2) 求证： $BF \perp DE$ 。
 (3) 求证：平面 $BGM \perp$ 平面 BFC 。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

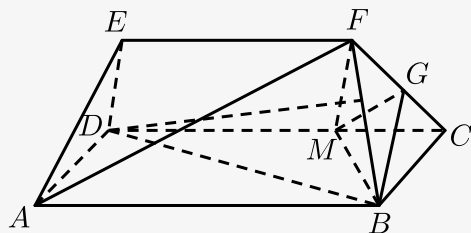
(3) 证明见解析。

【解析】 (1) 连接 AC 交 BD 于 O 点，则 O 为 AC 的中点，连接 OG ，



$\because$ 点 G 为 CF 中点，
 $\therefore OG$ 为 $\triangle AFC$ 的中位线
 $\therefore OG \parallel AF$ ，
 $\because AF \not\subset$ 面 BDG ， $OG \subset$ 面 BDG ，
 $\therefore AF \parallel$ 面 BDG 。

(2) $\because$ 连接 FM ，



$\because BF = CF = BC = 2$ ， G 为 CF 的中点，
 $\therefore BG \perp CF$ ，
 $\because CM = 2$ ，
 $\therefore DM = 4$ ，

$\because EF \parallel AB$, 四边形 $ABCD$ 为矩形 ,
 $\therefore EF \parallel DM$,
 又 $\because EF = 4$,
 $\therefore$ 四边形 $EFMD$ 为平行四边形 ,
 $\therefore MF \parallel DE$, $FM = ED = 2$,
 $\because$ 在直角 $\triangle BCM$ 中 , $\angle BCM = 90^\circ$, $BC = 2$, $CM = 2$,
 $\therefore BM = 2\sqrt{2}$,
 $\because$ 在 $\triangle BFM$ 中 , $BM = 2\sqrt{2}$, $MF = 2$, $BF = 2$,
 $\therefore \triangle BFM$ 是直角三角形 ,
 $\therefore BF \perp MF$,
 $\therefore BF \perp DE$.

(3) $\because BF = CF = BC = 2$, G 为 CF 的中点 ,

$\therefore BG \perp CF$,
 $\because CM = 2$,
 $\therefore DM = 4$,
 $\because EF \parallel AB$, 四边形 $ABCD$ 为矩形 ,
 $\therefore EF \parallel DM$,
 又 $\because EF = 4$,
 $\therefore$ 四边形 $EFMD$ 为平行四边形
 $\therefore FM = ED = 2$,
 $\therefore \triangle FCM$ 为正三角形 ,
 $\therefore MG \perp CF$,
 $\because MG \cap BG = G$,
 $\therefore CF \perp$ 面 BGM ,
 $\because CF \subset$ 面 BFC ,
 $\therefore$ 面 $BGM \perp$ 面 BFC .

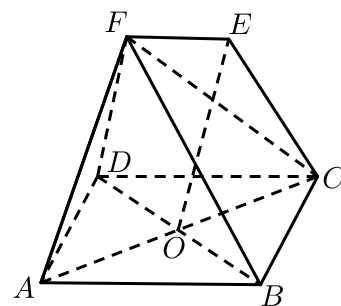
【标注】【知识点】点、直线、平面之间的位置关系；线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定；面面垂直的证明问题；平面和平面垂直的判定；线线垂直的证明问题

19. 如图 , 已知 $AB \perp$ 平面 ACD , $DE \perp$ 平面 ACD , $\triangle ACD$ 为等边三角形 , $AD = DE = 2AB$, F 为 CD 的中点 .

所以 $DE \perp AF$,
 又 $CD \cap DE = D$,
 故 $AF \perp$ 平面 CDE ,
 因为 $BG \parallel AF$,
 所以 $BG \perp$ 平面 CDE ,
 因为 $BG \subset$ 平面 BCE ,
 所以平面 $BCE \perp$ 平面 CDE .

【标注】【知识点】线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定；面面垂直的证明问题；平面和平面垂直的判定；点、直线、平面之间的位置关系；几何法求空间角

20. 如图，在几何体中，四边形 $ABCD$ 为菱形，对角线 AC 与 BD 的交点为 O ，四边形 $DCEF$ 为梯形， $DC \parallel EF$ ， $FD = FB$.



- (1) 若 $DC = 2EF$ ，求证： $OE \parallel$ 平面 ADF .
 (2) 求证：平面 $AFC \perp$ 平面 $ABCD$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) 取 AD 的中点 G ，连接 OG ， FG ，

因为 O 是菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 的交点，

所以 $OG \parallel DC$ ，且 $OG = \frac{1}{2}DC$ ，

又因为 $EF \parallel DC$ ，且 $DC = 2EF$ ，

所以 $OG \parallel EF$ ，且 $OG = EF$ ，从而四边形 $OGFE$ 为平行四边形，

所以 $OE \parallel FG$.

又 $FG \subset$ 平面 ADF ， $OE \not\subset$ 平面 ADF ，

$\therefore OE \parallel$ 平面 ADF .

- (2) 因为四边形 $ABCD$ 为菱形，

所以 $OC \perp BD$ ，

因为 $FD = FB$, O 是 BD 的中点,
 所以 $OF \perp BD$,
 又 $OF \cap OC = O$,
 所以 $BD \perp$ 平面 AFC ,
 又 $BD \subset$ 平面 $ABCD$,
 所以平面 $AFC \perp$ 平面 $ABCD$.

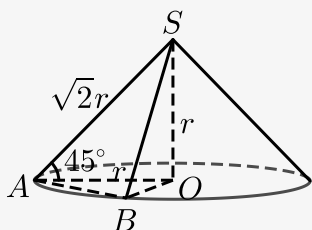
【标注】【知识点】点、直线、平面之间的位置关系；平面和平面垂直的判定；面面垂直的证明问题；直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题；几何法求空间角

三、综合创新

21. 已知圆锥的顶点为 S , 母线 SA, SB 所成角的余弦值为 $\frac{7}{8}$, SA 与圆锥底面所成角为 45° , 若 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$, 则该圆锥的侧面积为 _____.

【答案】 $40\sqrt{2}\pi$

【解析】 方法一：如图，



$\therefore SA$ 与底面成 45° 角，

$\therefore \triangle SOA$ 为等腰直角三角形．

设 $OA = r$, 则 $SO = r$, $SA = SB = \sqrt{2}r$,

在 $\triangle SAB$ 中, $\cos \angle ASB = \frac{7}{8}$,

$\therefore \sin \angle ASB = \frac{\sqrt{15}}{8}$,

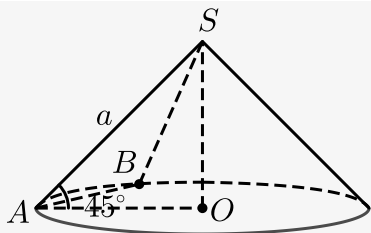
$\therefore S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} SA \cdot SB \cdot \sin \angle ASB = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2}r)^2 \times \frac{\sqrt{15}}{8} = 5\sqrt{15}$, 解得 $r = 2\sqrt{10}$,

$\therefore SA = \sqrt{2}r = 4\sqrt{5}$, 即母线长 $l = 4\sqrt{5}$,

$\therefore S_{\text{圆锥侧}} = \pi rl = \pi \times 2\sqrt{10} \times 4\sqrt{5} = 40\sqrt{2}\pi$.

故答案为： $40\sqrt{2}\pi$.

方法二：记 O 为该圆锥底面圆的圆心，母线长为 a ,



则由 $S_{\triangle ABS} = 5\sqrt{15}$ 且

$$S_{\triangle ABS} = \frac{1}{2} SA \cdot SB \cdot \sin \angle ASB = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{1 - \cos^2 \angle ASB} = 5\sqrt{15},$$

可得 $a^2 = 80$,

故在 $\triangle SAO$ 中, $OA = \frac{\sqrt{2}}{2} a$,

于是 $\odot O$ 的周长 $C = 2\pi \cdot OA = \sqrt{2}\pi a$,

所求侧面积为 $S_{\text{侧}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot C = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} a^2 = 40\sqrt{2}\pi$.

【标注】【知识点】空间几何体的表面积

22. 中国有悠久的金石文化, 印信是金石文化的代表之一. 印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体, 但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”(题图1). 半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体, 半正多面体体现了数学的对称美, 题图2是一个棱数为48的半正多面体, 它的所有顶点都在同一个正方体的表面上, 且此正方体的棱长为1. 则该半正多面体共有 _____ 个面, 其棱长为 _____.



图1

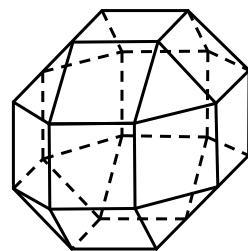


图2

【答案】 26; $\sqrt{2} - 1$

【解析】 方法一: 半正多面体面数从上至下依次为1, 8, 8, 8, 1,

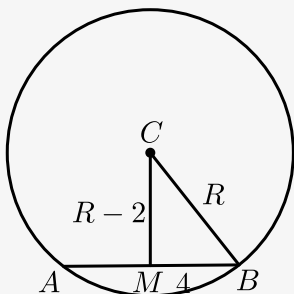
故共有 $1 + 8 + 8 + 8 + 1 = 26$ 个面.

半正多面体的所有顶点都在同一个正方体表面上, 如解析图1,

【答案】 $\frac{500\pi}{3}\text{cm}^3$

【解析】 设正方体上底面所在平面截球得小圆 M .

则圆心 M 为正方体上底面正方形的中心.如图.



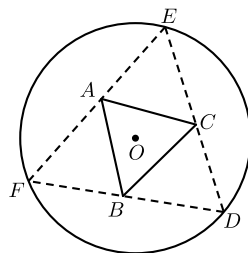
设球的半径为 R ,根据题意得球心到上底面的距离等于 $(R-2)\text{cm}$,

而圆 M 的半径为4,由球的截面圆性质,得 $R^2 = (R-2)^2 + 4^2$,解出 $R = 5$.

$\therefore$ 根据球的体积公式,该球的体积 $V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3} \times 5^3 = \frac{500\pi}{3}\text{cm}^3$.

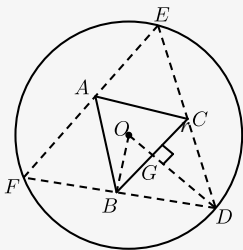
【标注】 【知识点】 组合体求体积、表面积问题;空间几何体的体积

24. 如图,圆形纸片的圆心为 O ,半径为 5cm ,该纸片上的等边三角形 ABC 的中心为 O . D, E, F 为圆 O 上的点, $\triangle DBC, \triangle ECA, \triangle FAB$ 分别是以 BC, CA, AB 为底边的等腰三角形.沿虚线剪开后,分别以 BC, CA, AB 为折痕折起 $\triangle DBC, \triangle ECA, \triangle FAB$,使得点 D, E, F 重合,得到三棱锥.当 $\triangle ABC$ 的边长变化时,所得三棱锥体积的最大值为 _____ cm^3 .



【答案】 $4\sqrt{15}$

【解析】 方法一:连接 OD ,交 BC 于点 G ,



由题, $OD \perp BC$,

$\therefore OG = \frac{\sqrt{3}}{6}BC$,设 $OG = x$,则 $BC = 2\sqrt{3}x$, $DG = 5 - x$,

$$\text{三棱锥的高 } h = \sqrt{DG^2 - OG^2} = \sqrt{25 - 10x},$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot 3x = 3\sqrt{3}x^2,$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h = \sqrt{3}x^2 \cdot \sqrt{25 - 10x} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{25x^4 - 10x^5}, x \in (0, \frac{5}{2}),$$

$$\text{设 } f(x) = 25x^4 - 10x^5, x \in (0, \frac{5}{2}),$$

$$\therefore f'(x) = 100x^3 - 50x^4 = 50x^3(-x + 2),$$

$$\therefore \text{当 } x = 2 \text{ 时, } f(x)_{\max} = 80,$$

$$\text{故 } V_{\max} = 4\sqrt{15}.$$

方法二：由题意可知，折起后所得三棱锥为正三棱锥，

当 $\triangle ABC$ 的边长变化时，

设 $\triangle ABC$ 的边长为 $a(a > 0)\text{cm}$ ，

$$\text{则 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\text{cm}^2, \triangle DBC \text{ 的高为 } \left(5 - \frac{\sqrt{3}}{6}a\right)\text{cm},$$

$$\text{则正三棱锥的高为 } \sqrt{\left(5 - \frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2} = \sqrt{25 - \frac{5\sqrt{3}}{3}a}\text{cm},$$

$$\therefore \text{三棱锥的体积 } V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \sqrt{25 - \frac{5\sqrt{3}}{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \sqrt{25a^4 - \frac{5\sqrt{3}}{3}a^5}.$$

$$\text{令 } t(a) = 25a^4 - \frac{5\sqrt{3}}{3}a^5,$$

$$\text{则 } t'(a) = 100a^3 - \frac{25\sqrt{3}}{3}a^4,$$

$$\text{令 } t'(a) = 0, \text{ 得 } a = 4\sqrt{3},$$

此时所得三棱锥的体积最大，为 $4\sqrt{15}\text{cm}^3$ 。

【标注】【知识点】空间几何体的体积

25. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上， $PA=PB=PC$ ， $\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形， E, F 分别是 PA, AB 的中点， $\angle CEF=90^\circ$ ，则球 O 的体积为（ ）。

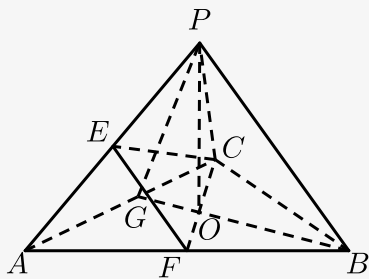
- A. $8\sqrt{6}\pi$ B. $4\sqrt{6}\pi$ C. $2\sqrt{6}\pi$ D. $\sqrt{6}\pi$

【答案】 D

【解析】 由 $PA=PB=PC$ ， $\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形，可知三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥，

则顶点 P 在底面的射影 O 为底面三角形的中心，

连接 BO 并延长，交 AC 于点 G ，连接 PG ，



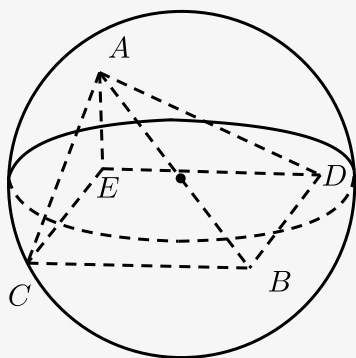
则 $AC \perp BG$ ，又 $PO \perp AC$ ， $PO \cap BG = O$ ，
 可得 $AC \perp$ 平面 PBG ，则 $PB \perp AC$ ，
 $\because E, F$ 分别是 PA, AB 的中点， $\therefore EF \parallel PB$ ，
 又 $\angle CEF = 90^\circ$ ，即 $EF \perp CE$ ， $\therefore PB \perp CE$ ，得 $PB \perp$ 平面 PAC ，
 $\therefore$ 正三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱两两互相垂直，
 把三棱锥补形为正方体，则正方体的外接球即为三棱锥的外接球，
 其直径为 $D = \sqrt{PA^2 + PB^2 + PC^2} = \sqrt{6}$ 。
 半径为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，则球 O 的体积为 $\frac{4}{3}\pi \times (\frac{\sqrt{6}}{2})^3 = \sqrt{6}\pi$ 。
 故选：D。

【标注】【知识点】线线垂直的证明问题；空间几何体的体积

26. 已知四面体 $ABCD$ 的顶点都在同一个球的球面上， $BC = \sqrt{3}$ ， $BD = 4$ ，且 $BC \perp BD$ ， $AC \perp BC$ ， $AD \perp BD$ 。若该三棱锥的体积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，则该球的表面积为 _____。

【答案】 23π

【解析】



由题意，如图： $BC \perp BD$ ， $AC \perp BC$ ， $AD \perp BD$ ，
 作 $CE \parallel BD$ ， $ED \parallel BC$ ，可得 $CBDE$ 是矩形，
 可得 $AE \perp$ 平面 $BCDE$ ， $BC = \sqrt{3}$ ， $BD = 4$ ，该三棱锥的体积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，
 可得 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{3} \times AE = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，
 可得 $AE = 2$ ，并且 AB 为球的直径， $BE = \sqrt{3 + 16} = \sqrt{19}$ ，

$$AB = \sqrt{19 + 4} = \sqrt{23} ,$$

$$\therefore \text{球的表面积} 4\pi \times \frac{AB^2}{4} = 23\pi .$$

故答案为： 23π .

【标注】【知识点】空间几何体的表面积；空间几何体的内切球、外接球问题