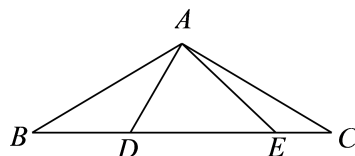


## 第二讲-平面向量练习题

### 一、基底法

1. 如图，在三角形 $ABC$ 中， $\angle BAC = 120^\circ$ ， $AB = AC = 2$ ， $D, E$ 为 $BC$ 边上的点，且

$$\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DE}, \text{ 则 } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \underline{\hspace{2cm}}.$$



**【答案】**  $\frac{1}{3}$

**【解析】** 根据条件： $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ ， $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ ，

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{11}{18}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{5}{18}\overrightarrow{AC}^2$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{11}{18} \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{10}{9}$$

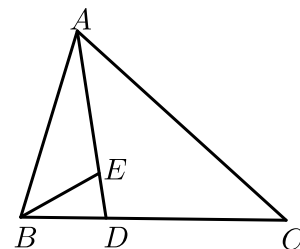
$$= \frac{1}{3}.$$

故答案为： $\frac{1}{3}$ 。

**【标注】**【知识点】线性运算和数量积综合问题；向量的数量积的定义

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ ， $AB = 2$ ， $AC = 3$ ， $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$ ， $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{ED}$ ，则  $BE =$

\_\_\_\_\_。



【答案】  $\frac{\sqrt{13}}{4}$

【解析】  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

$$= \overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$$

$$= \overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore |\overrightarrow{BE}| = \left| -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \right|$$

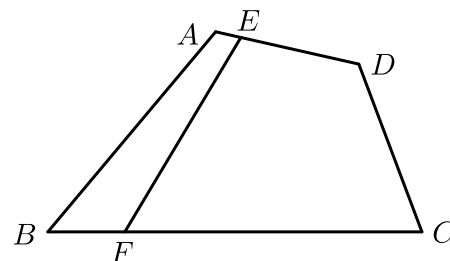
$$= \sqrt{1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{4} \times 2 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} + \frac{9}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

故答案为：  $\frac{\sqrt{13}}{4}$  .

【标注】【知识点】利用向量数量积求模长；向量的模

3. 如图，在四边形  $ABCD$  中，已知  $AB = 3$ ， $DC = 2$ ，点  $E$ 、 $F$  分别在边  $AD$ 、 $BC$  上，且  $\overrightarrow{ED} = 5\overrightarrow{AE}$ ， $\overrightarrow{FC} = 5\overrightarrow{BF}$ ，若向量  $\overrightarrow{AB}$  与  $\overrightarrow{DC}$  的夹角为  $60^\circ$ ，则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF}$  的值为 \_\_\_\_\_ .



【答案】 8

【解析】 延长  $BA$ 、 $CD$  交于  $H$ ，则  $\angle H = 60^\circ$ ，

令  $BH = CH = 5$ ，则  $\triangle HBC$  为等边三角形，

设 $\angle HAD = \theta$ ，在 $\triangle HAD$ 中，

利用余弦定理 $\cos 60^\circ = \frac{4+9-AD^2}{2 \times 2 \times 3}$ ，解得 $AD^2 = 7$ ， $\therefore AD = \sqrt{7}$ ，

$$BF = \frac{1}{6}BC = \frac{5}{6}, AE = \frac{1}{6}AD = \frac{\sqrt{7}}{6}, \therefore \cos \theta = \frac{4+7-9}{2 \times 2 \times \sqrt{7}} = \frac{2}{4\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14},$$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{EF}$$

$$= \vec{AB} \cdot (\vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BF})$$

$$= \vec{AB} \cdot \vec{EA} + \vec{AB}^2 + \vec{AB} \cdot \vec{BF}$$

$$= 3 \times \frac{5}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 9 + 3 \times \frac{\sqrt{7}}{6} \times \cos \theta$$

$$= -\frac{5}{4} + 9 + \frac{1}{4} = 8.$$

【标注】【素养】数学运算

【知识点】向量的数量积的定义

## 二、坐标法

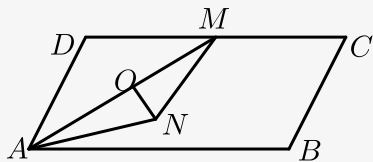
### 1. 正向求数量积

4. 在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $AD = 2$ ， $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ， $M$ 为 $DC$ 的中点， $N$ 为平面 $ABCD$ 内一点，若 $|\vec{AB} - \vec{NB}| = |\vec{AM} - \vec{AN}|$ ，则 $\vec{AM} \cdot \vec{AN} = \underline{\hspace{2cm}}$  .

【答案】6

【解析】由若 $|\vec{AB} - \vec{NB}| = |\vec{AM} - \vec{AN}|$ ，则可得 $|\vec{MN}| = |\vec{AN}|$ ，

取 $AM$ 的中点为 $O$ ，连接 $ON$ ，则 $ON \perp AM$ ，



$$\text{又 } \vec{AM} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB},$$

$$\text{所以 } \vec{AM} \cdot \vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AM}^2 = \frac{1}{2}\left(\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{AD}^2 + \frac{1}{4}\vec{AB}^2 + \vec{AD} \cdot \vec{AB}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 + \frac{1}{4} \times 16 + 2 \times 4 \times \frac{1}{2}\right) = 6.$$

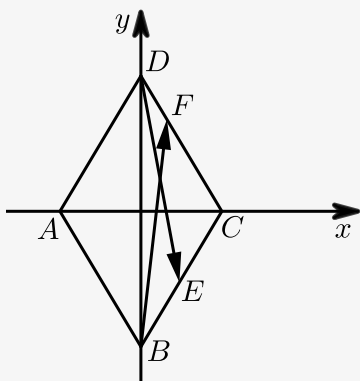
故答案为：6 .

【标注】【知识点】向量的数量积的定义

5. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为2,  $\angle BAD = 120^\circ$ , 点 $E, F$ 分别在边 $BC, DC$ 上,  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ , 则 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DE} = ( \quad )$ .
- A.  $-\frac{22}{3}$                       B.  $\frac{2}{3}$                       C.  $\frac{5}{6}$                       D.  $\frac{22}{3}$

【答案】A

【解析】根据题意, 分别以直线 $AC, BD$ 为 $x, y$ 轴, 建立如图所示平面直角坐标系,



根据菱形 $ABCD$ 的边长为2,  $\angle BAD = 120^\circ$ 可求出以下几点坐标:  $B(0, -\sqrt{3})$ ,

$C(1, 0)$ ,  $D(0, \sqrt{3})$ ,

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC},$$

$$\therefore \frac{|DF|}{|FC|} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore E\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), F\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right),$$

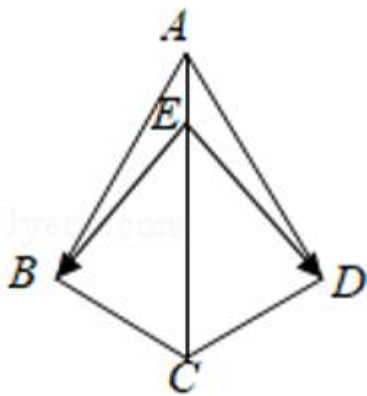
$$\therefore \overrightarrow{BF} = \left(\frac{1}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{3}\right), \overrightarrow{DE} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{6} - \frac{15}{2} = -\frac{22}{3}.$$

故选: A.

【标注】【知识点】数量积的坐标表达式; 平面向量数量积运算(非坐标)

6. 如图, 平面四边形 $ABCD$ ,  $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ,  $BC = CD = 2$ , 点 $E$ 在对角线 $AC$ 上,  $AC = 4AE = 4$ , 则 $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED}$ 的值为( )



A. 17

B. 13

C. 5

D. 1

**【答案】** D

**【解析】** 解：由题意可知  $CE = 3, \angle BCE = 60^\circ$ ,

$$\therefore EB = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{7},$$

$$\therefore \cos \angle BEC = \frac{7 + 9 - 4}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

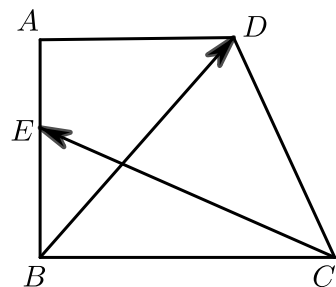
$$\therefore \cos \angle BED = 2\cos^2 \angle BEC - 1 = \frac{1}{7}.$$

$$\therefore \vec{EB} \cdot \vec{ED} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{1}{7} = 1.$$

故选：D.

**【标注】**【知识点】平面向量数量积的运算律；余弦定理；正余弦定理综合求解边角

7. 如图所示，在梯形  $ABCD$  中， $\angle B = \frac{\pi}{2}$ ， $AB = \sqrt{2}$ ， $BC = 2$ ，点  $E$  是  $AB$  的中点，若向量  $\vec{CD}$  在向量  $\vec{BC}$  上的投影为  $-\frac{1}{2}$ ，则  $\vec{CE} \cdot \vec{BD} = (\quad)$ .



A. -2

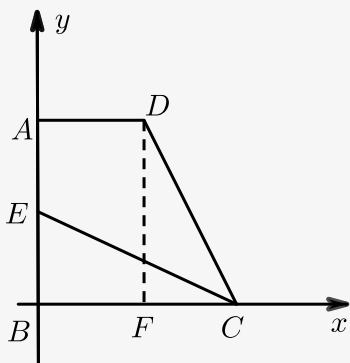
B.  $-\frac{1}{2}$

C. 0

D.  $\sqrt{2}$

**【答案】** A

**【解析】** 以  $B$  为原点， $BC$  为  $x$  轴， $AB$  为  $y$  轴建系，如图：



$$\therefore AB = \sqrt{2}, BC = 2,$$

$$\therefore A(0, \sqrt{2}), B(0, 0), C(2, 0), D \text{ 的纵坐标为 } \sqrt{2}.$$

$$\therefore E \text{ 为 } AB \text{ 的中点},$$

$$\therefore E\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} \text{ 在 } \overrightarrow{BC} \text{ 上的投影为 } -\frac{1}{2},$$

$$\text{设 } \overrightarrow{CD} \text{ 与 } \overrightarrow{BC} \text{ 夹角为 } \theta,$$

$$\therefore |\overrightarrow{CD}| \cos \theta = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{过 } D \text{ 作 } DF \perp BC, \text{ 垂足为 } F,$$

$$\text{在 Rt} \triangle DFC \text{ 中},$$

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{|\overrightarrow{FC}|}{|\overrightarrow{CD}|},$$

$$\therefore |\overrightarrow{CF}| = \frac{1}{2},$$

$$\therefore D\left(\frac{3}{2}, \sqrt{2}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{CE} = \left(-2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \overrightarrow{BD} = \left(\frac{3}{2}, \sqrt{2}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BD} = -3 + 1 = -2.$$

故选 A.

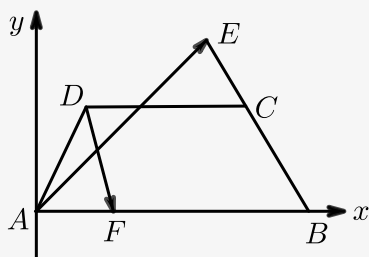
**【标注】**【知识点】向量的数量积的定义；平面向量数量积运算（非坐标）

## 2. 逆向求参数

8. 在等腰梯形中,  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 2$ ,  $AD = 1$ ,  $\angle DAB = 60^\circ$ , 若  $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CE}$ ,  $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AB}$ , 且  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = -1$ , 则  $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**【答案】**  $\frac{1}{4}$

【解析】如图，



以A为坐标原点，建立平面直角坐标系，

由已知可得  $A(0,0)$ ， $D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $F(2\lambda, 0)$ ，

$B(2,0)$ ， $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

设  $E(m,n)$ ，

则  $\overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $\overrightarrow{CE} = \left(m - \frac{3}{2}, n - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

由  $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CE}$ ，

得  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(3m - \frac{9}{2}, 3n - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

可得  $m = \frac{4}{3}$ ， $n = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

$\therefore E\left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ，

则  $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ， $\overrightarrow{DF} = \left(2\lambda - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

由  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = -1$ ，

得  $\frac{4}{3} \left(2\lambda - \frac{1}{2}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -1$ ，

解得  $\lambda = \frac{1}{4}$ 。

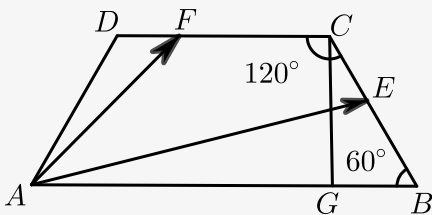
故答案为： $\frac{1}{4}$ 。

【标注】【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算

9. 在等腰梯形  $ABCD$  中，已知  $AB \parallel DC$ ， $AB = 2$ ， $BC = 1$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，动点  $E$  和  $F$  分别在线段  $BC$  和  $DC$  上，且  $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{4\lambda} \overrightarrow{DC}$ ，且  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{23}{8}$ ，则  $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $2 - \sqrt{3}$

【解析】如图，



在等腰梯形 $ABCD$ 中,  $AB = 2$ ,  $BC = 1$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,

$\therefore BC = AD = 1$ ,  $BG = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}$ , 则  $CD = AB - 2BG = 2 - 1 = 1$ ,

则  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF})$

$$= (\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BC}) \cdot \left( \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4\lambda} \overrightarrow{DC} \right)$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{4\lambda} \overrightarrow{DC} + \lambda \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \lambda \overrightarrow{BC} \cdot \frac{1}{4\lambda} \overrightarrow{DC}$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \lambda \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4\lambda} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \frac{1}{4} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC}$$

$$= 2 \times 1 \times \cos 60^\circ + \lambda \times 1 \times 1 \times \cos 60^\circ + \frac{1}{4\lambda} \times 2 \times 1 + \frac{1}{4} \times 1 \times 1 \times \cos 120^\circ$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2\lambda} + \frac{7}{8} = \frac{23}{8}.$$

整理得  $\lambda + \frac{1}{\lambda} - 4 = 0$ , 则  $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ ,

$$\text{得 } \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3},$$

由题意知  $\lambda < 1$ , 则  $\lambda = 2 - \sqrt{3}$ .

故答案为:  $2 - \sqrt{3}$ .

**【标注】**【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算;平面向量数量积运算(非坐标)

10. 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 满足 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ,  $|\overrightarrow{AB}| = 2$ ,  $|\overrightarrow{AD}| = 1$ ,  $E$ 、 $F$ 分别是线段 $BC$ 、 $CD$ 的中点, 若 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BF} = -\frac{5}{4}$ , 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{AD}$ 的夹角的余弦值为 \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{1}{2}$

**【解析】** 依题可知, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC},$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DE} = \left( \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) \cdot \left( \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \right)$$

$$= \frac{5}{4} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}^2$$

$$= \frac{5}{4} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 1^2$$



$$\begin{aligned}
&\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AB}, \\
&\text{即} (m - \sqrt{5}, n) = \frac{1}{5} (-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}), \\
&\text{求得} m = \frac{4\sqrt{5}}{5}, n = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \\
&\therefore D\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \\
&\text{则} \overrightarrow{OE} = \lambda \overrightarrow{OD} = \lambda \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \\
&= \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\lambda, \frac{2\sqrt{5}}{5}\lambda\right), \\
&\overrightarrow{EA} = \left(\sqrt{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5}\lambda, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\lambda\right), \\
&\therefore \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{EA} = \frac{3}{4}, \\
&\therefore \frac{4\sqrt{5}}{5}\lambda \cdot \left(\sqrt{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5}\lambda\right) - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\lambda\right)^2 \\
&= \frac{3}{4}, \\
&\text{解得} \lambda = \frac{3}{4} \text{ 或 } \lambda = \frac{1}{4}, \\
&\therefore \text{向量} \overrightarrow{EA} \text{ 在向量} \overrightarrow{OD} \text{ 上的投影为} \\
&ED = \left| \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OE} \right| = \left| \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) - \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\lambda, \frac{2\sqrt{5}}{5}\lambda\right) \right| \\
&= \left| \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}(1-\lambda), \frac{2\sqrt{5}}{5}(1-\lambda)\right) \right|, \\
&\text{当} \lambda = \frac{3}{4} \text{ 时, } ED = \left| \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{10}\right) \right| = \frac{1}{2}, \\
&\text{当} \lambda = \frac{1}{4} \text{ 时, } ED = \left| \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{10}\right) \right| = \frac{3}{2}, \\
&\text{即向量} \overrightarrow{EA} \text{ 在向量} \overrightarrow{OD} \text{ 上的投影为} \frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

故选：D.

**【标注】**【知识点】数量积的坐标表达式；平面向量数量积运算（非坐标）；向量的数量积的定义；向量的投影

### 3. 范围最值

12. 已知正三角形 $ABC$ 的边长为1，点 $P$ 是 $AB$ 边上的动点，点 $Q$ 是 $AC$ 边上的动点，且

$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ} = (1 - \lambda) \overrightarrow{AC}, \lambda \in \mathbf{R}$ ，则 $\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP}$ 的最大值为（ ）.

A.  $\frac{3}{2}$

B.  $-\frac{3}{2}$

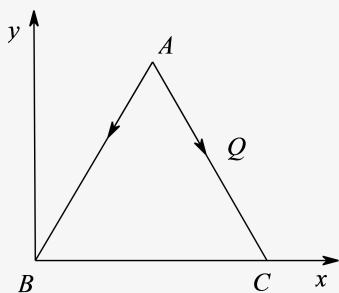
C.  $\frac{3}{8}$

D.  $-\frac{3}{8}$

【答案】D

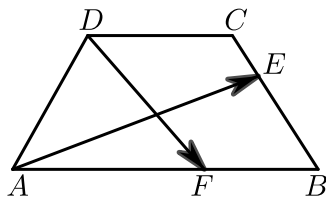
【解析】如图建立平面直角坐标系，因为正三角形 $ABC$ 的边长为1，

$$\begin{aligned} \text{所以 } B(0,0), A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), C(1,0). \text{ 所以 } \overrightarrow{AB} &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ \overrightarrow{AP} &= \left(-\frac{1}{2}\lambda, -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right), \overrightarrow{AQ} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right). \\ \text{所以 } \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ})(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}) = \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{8}, \\ \text{所以最大值为 } &-\frac{3}{8}. \end{aligned}$$



【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题；数量积的坐标表达式

13. 如图，等腰梯形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = CD = 2$ ，若 $E$ 、 $F$ 分别是边 $BC$ 、 $AB$ 上的点，且满足 $\frac{BE}{BC} = \frac{AF}{AB} = \lambda$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF}$ 的取值范围是 \_\_\_\_\_ .



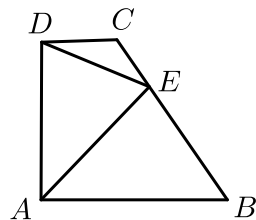
【答案】 $[-4, 6]$

【解析】 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF}$

$$\begin{aligned} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE})(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD}) \\ &= (\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{BC})(\lambda\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) \\ &= \lambda\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \lambda^2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \lambda\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= 16\lambda - 4 - 4\lambda^2 - 2\lambda \\ &= -4\lambda^2 + 14\lambda - 4, \\ &\because \lambda \in [0, 1], \\ &\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} \in [-4, 6]. \end{aligned}$$

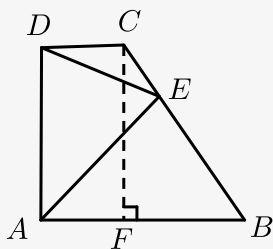
【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；平面向量数量积的运算律

14. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ ， $AB = BC = 2$ ， $CD = 1$ ， $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ ， $E$ 是线段 $BC$ 上一动点，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE}$ 的最小值为\_\_\_\_\_.



【答案】  $\frac{15}{16}$

【解析】方法一：如图过点 $C$ 做 $CF \perp AB$ 交 $AB$ 于点 $F$ ，



在 $\triangle BOF$ 中， $\angle CBF = \frac{\pi}{3}$ ，

则 $BF = 1$ ， $CF = \sqrt{3}$ ，

$\therefore AB = 2$ ，

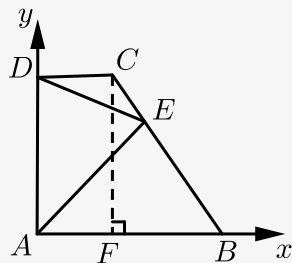
$\therefore AF \parallel CD$ ，

$\therefore$ 四边形 $AFCD$ 为平行四边形，

$\therefore CF \perp AB$ ，

$\therefore \angle A = \frac{\pi}{2}$ ，

$\therefore$ 如图建立平面直角坐标系，



则 $A(0,0)$ ， $B(2,0)$ ， $D(0,\sqrt{3})$ ， $C(1,\sqrt{3})$ ，

则 $\overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{3})$ ，

设 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC} (0 \leq \lambda \leq 1)$ ，

$$\text{则 } \overrightarrow{BE} = (-\lambda, \sqrt{3}\lambda),$$

$$\text{故 } E(2-\lambda, \sqrt{3}\lambda),$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = (2-\lambda, \sqrt{3}\lambda), \overrightarrow{DE} = (2-\lambda, \sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}),$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE}$$

$$= (2-\lambda)^2 + \sqrt{3}\lambda(\sqrt{3}\lambda - \sqrt{3})$$

$$= 4\lambda^2 - 7\lambda + 4,$$

$$\therefore \lambda = \frac{7}{2 \times 4} = \frac{7}{8} \text{ 时, } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{15}{16} \text{ 为最小值.}$$

$$\text{方法二: } \because \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE},$$

$$\text{设 } BE = x (0 \leq x \leq 2), \text{ 则 } CE = 2 - x,$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE})$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}$$

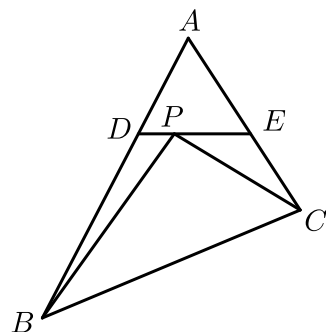
$$= 2 + x \cdot \cos \frac{2}{3}\pi + 2(2-x) \cos \frac{\pi}{3} - x(2-x)$$

$$= x^2 - \frac{7}{2}x + 4,$$

$$\text{故 } x = \frac{\frac{7}{2}}{2} = \frac{7}{4} \text{ 时, } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{15}{16} \text{ 为最小值.}$$

**【标注】**【知识点】平面向量数量积的运算律；线性运算和数量积综合问题

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $AC = 2$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $D$ ， $E$ 分别是边 $AB$ ， $AC$ 上的点， $AE = 1$ ，且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}$ ，则 $|\overrightarrow{AD}| = \underline{\hspace{2cm}}$ ，若 $P$ 是线段 $DE$ 上的一个动点，则 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP}$ 的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



**【答案】**  $1; -\frac{1}{16}$

**【解析】**  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AE}| \cdot \cos \angle BAC = |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ,

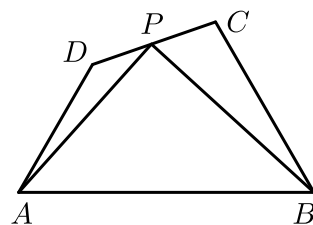
解得 $|\overrightarrow{AD}| = 1$ ,

$\therefore$ 点 $P$ 是线段 $DE$ 上的一个动点，

$$\begin{aligned}
&\therefore \text{设 } \overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DE}, \\
&\text{则 } \overrightarrow{EP} = (1 - \lambda) \overrightarrow{ED}, \\
&\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DP} = -2\overrightarrow{AD} + \lambda(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) \\
&= -(2 + \lambda)\overrightarrow{AD} + \lambda\overrightarrow{AE}, \\
&\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EP} = -\overrightarrow{AE} + (1 - \lambda)(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}) = (\lambda - 2)\overrightarrow{AE} + (1 - \lambda)\overrightarrow{AD}, \\
&\therefore \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} = [-(2 + \lambda)\overrightarrow{AD} + \lambda\overrightarrow{AE}] \cdot [(\lambda - 2)\overrightarrow{AE} + (1 - \lambda)\overrightarrow{AD}] \\
&= -(2 + \lambda)(1 - \lambda)\overrightarrow{AD}^2 + \lambda(\lambda - 2)\overrightarrow{AE}^2 \\
&\quad + [\lambda(1 - \lambda) - (\lambda - 2)(\lambda + 2)]\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} \\
&= -(-\lambda^2 - \lambda + 2) + \lambda^2 - 2\lambda + (-2\lambda^2 + \lambda + 4) \cdot \frac{1}{2} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda, \\
&\text{当 } \lambda = \frac{1}{4} \text{ 时, } (\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP})_{\min} = -\frac{1}{16}. \\
&\text{故答案为: } 1; -\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

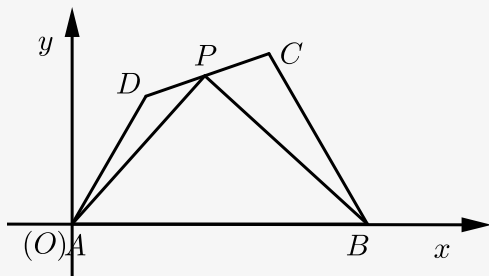
**【标注】**【知识点】向量的数量积的定义；线性运算和数量积综合问题；平面向量的加法运算及运算规则；平面向量的数乘运算及运算规则

16. 如图，在四边形  $ABCD$  中， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $DA = 3$ ， $AB = 6$ ， $BC = 4$ ，点  $P$  是线段  $DC$  上的一个动点，则  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$  的最小值为 \_\_\_\_\_.



**【答案】**  $-\frac{9}{28}$

**【解析】** 以  $A$  为坐标原点， $AB$  所在直线为  $x$  轴建立平面直角坐标系（如图），



$$\begin{aligned}
&\because \angle DAB = 60^\circ, \angle ABC = 60^\circ, DA = 3, AB = 6, BC = 4, \\
&\therefore A(0, 0), B(6, 0), C(4, 2\sqrt{3}), D\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right),
\end{aligned}$$

∵点P是线段DC上一个动点, 可设 $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DC} (0 \leq \lambda \leq 1)$ ,

$$\text{则 } \overrightarrow{DP} = \lambda \left( \frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left( \frac{5}{2}\lambda, \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda \right),$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}$$

$$= \left( \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) + \left( \frac{5}{2}\lambda, \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda \right)$$

$$= \left( \frac{5}{2}\lambda + \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DP}$$

$$= \left( -\frac{9}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) + \left( \frac{5}{2}\lambda, \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda \right)$$

$$= \left( \frac{5}{2}\lambda - \frac{9}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \left( \frac{5}{2}\lambda + \frac{3}{2} \right) \cdot \left( \frac{5}{2}\lambda - \frac{9}{2} \right) + \left( \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

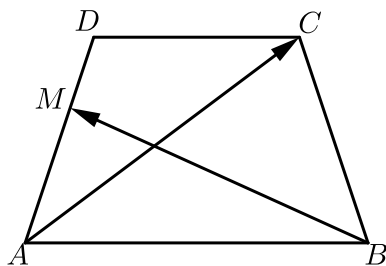
$$= 7\lambda^2 - 3\lambda$$

$$= 7 \left( \lambda - \frac{3}{14} \right)^2 - \frac{9}{28},$$

$$\therefore \text{当 } \lambda = \frac{3}{14} \in [0, 1] \text{ 时, } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} \text{ 取得最小值 } -\frac{9}{28}.$$

**【标注】**【知识点】数量积的坐标表达式; 平面向量数量积运算(非坐标)

17. 如图, 在梯形ABCD中,  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 4$ ,  $AD = 3$ ,  $CD = 2$ , M是线段AD上一点, (可与A, D重合), 若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = -3$ , 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 的取值范围是 \_\_\_\_\_.



**【答案】**  $[-5, 8]$

**【解析】** 设 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AD}$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$\therefore \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

$$\therefore \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = \left( \lambda \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \right) \left( \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda - 1\right)\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}, \\
&= 9\lambda - 8 + \left(\frac{1}{2}\lambda - 1\right)\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -3, \\
\therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} &= 2\frac{5-9\lambda}{\lambda-2} = -2 \cdot \left(9 + \frac{13}{\lambda-2}\right) \in [-5, 8].
\end{aligned}$$

**【标注】**【知识点】线性运算和数量积综合问题；平面向量数量积运算（非坐标）；向量的数量积的定义；平面向量数量积的运算律

18. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为2,  $\angle BAD = 120^\circ$ , 点 $E$ 、 $F$ 分别在边 $BC$ ,  $CD$ 上,  $\overrightarrow{BE} = \lambda\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{DF} = \mu\overrightarrow{DC}$ , 若 $2\lambda + \mu = \frac{5}{2}$ , 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值 \_\_\_\_\_ .

**【答案】** 3

**【解析】**  $\because \overrightarrow{BE} = \lambda\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{DF} = \mu\overrightarrow{DC}$ , 且 $2\lambda + \mu = \frac{5}{2}$ .  
 $\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF})$   
 $= (\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \mu\overrightarrow{DC})$   
 $= (1 + \lambda\mu)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \lambda|\overrightarrow{AD}|^2 + \mu|\overrightarrow{AB}|^2$   
 $= (1 + \lambda\mu) \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 4(\lambda + \mu)$   
 $= 4(\lambda + \mu) - 2(1 + \lambda\mu)$ .  
 由题意知,  $\lambda, \mu > 0$ .  
 $\because 2\lambda + \mu = \frac{5}{2}$ .  
 $\therefore$  原式  $= 4\lambda^2 - 9\lambda + 8$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ).  
 $\therefore$  最小值为 $\lambda = 1$ 时, .  
 $\therefore 4\lambda^2 - 9\lambda + 8 = 3$ .

**【标注】**【知识点】平面向量数量积的运算律

### 三、综合创新

19. 已知 $\triangle ABC$ 内一点 $P$ 满足 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$ , 过点 $P$ 的直线分别交边 $AB$ 、 $AC$ 于 $M$ 、 $N$ 两点,  $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AN} = \mu\overrightarrow{AC}$ , 则 $\lambda + \mu$ 的最小值为 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $\frac{9}{8}$

【解析】 如图，

由  $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AN} = \mu \overrightarrow{AC}$  及题意得， $\lambda > 0$ ， $\mu > 0$ ， $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{AM}$ ， $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{\mu} \overrightarrow{AN}$  带

入  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{8} \overrightarrow{AC}$  得：

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2\lambda} \overrightarrow{AM} + \frac{1}{8\mu} \overrightarrow{AN}.$$

又  $M, P, N$  三点共线.

$$\therefore \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{8\mu} = 1, \text{ 且 } \lambda, \mu > 0.$$

$$\therefore \lambda + \mu = (\lambda + \mu) \left( \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{8\mu} \right),$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{8\mu} + \frac{\mu}{2\lambda} + \frac{1}{8}$$

$$\geq \frac{5}{8} + 2\sqrt{\frac{\lambda}{8\mu} \cdot \frac{\mu}{2\lambda}}$$

$$= \frac{5}{8} + \frac{1}{2} = \frac{9}{8}, \text{ 当且仅当 } \frac{\lambda}{8\mu} = \frac{\mu}{2\lambda}, \text{ 即 } \lambda = 2\mu = \frac{3}{4} \text{ 时取“=”}.$$

$$\therefore \lambda + \mu \text{ 的最小值为 } \frac{9}{8}.$$

故答案为： $\frac{9}{8}$ .

【标注】 【知识点】 基本不等式的概念

20. 在矩形  $ABCD$  中， $AB = 1$ ， $AD = 2$ ，动点  $P$  在以点  $C$  为圆心且与  $BD$  相切的圆上. 若

$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$ ，则  $\lambda + \mu$  的最大值为 ( ).

A. 3

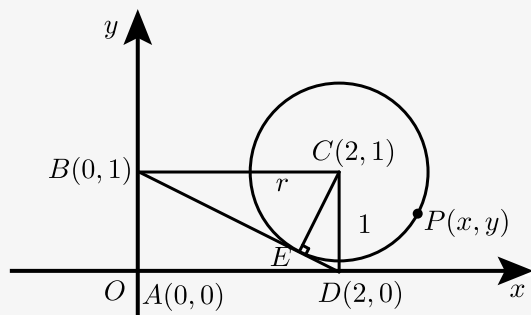
B.  $2\sqrt{2}$

C.  $\sqrt{5}$

D. 2

【答案】 A

【解析】 方法一：由题意，



设  $BD$  与圆  $C$  切于点  $E$ ，连接  $CE$ ，以  $A$  为坐标原点， $AD$  所在直线为  $x$  轴， $AB$  所在直线为  $y$  轴建立平面直角坐标系如图所示，则  $A(0,0)$ ， $B(0,1)$ ， $C(2,1)$ ， $D(2,0)$  .

$$\therefore |CD| = 1, |BC| = 2,$$

$$\therefore |BD| = \sqrt{5}.$$

$\therefore BD$  切  $\odot C$  于点  $E$ ,

$\therefore CE \perp BD$ ,

$\therefore CE$  是  $\text{Rt}\triangle BCD$  中斜边  $BD$  上的高.

$$|EC| = \frac{2S_{\triangle BCD}}{|BD|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 即 } \odot C \text{ 的半径为 } \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$\therefore P$  在  $\odot C$  上,  $\therefore P$  的轨迹方程为  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{4}{5}$ ,

设  $P$  点坐标  $(x_0, y_0)$ , 可以设出  $P$  点坐标满足的参数方程如下:

$$\begin{cases} x_0 = 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos \theta \\ y_0 = 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \sin \theta \end{cases}, \text{ 而 } \overrightarrow{AP} = (x_0, y_0), \overrightarrow{AB} = (0, 1), \overrightarrow{AD} = (2, 0).$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD} = (2\mu, \lambda),$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{2}x_0 = 1 + \frac{\sqrt{5}}{5} \cos \theta, \lambda = y_0 = 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \sin \theta.$$

两式相加得:

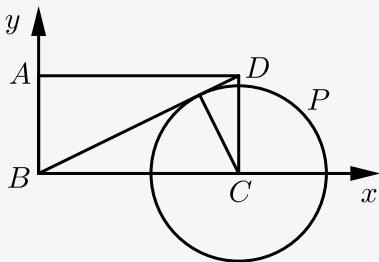
$$\lambda + \mu = 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \sin \theta + 1 + \frac{\sqrt{5}}{5} \cos \theta$$

$$= 2 + \sin(\theta + \varphi) \leq 3,$$

$$(\text{其中 } \sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}),$$

当且仅当  $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \varphi, k \in \mathbf{Z}$  时,  $\lambda + \mu$  取得最大值 3.

方法二: 如图所示, 建立平面直角坐标系,



设  $A(0, 1), B(0, 0), C(2, 0), D(2, 1), P(x, y)$ ,

根据等面积公式可得圆  $C$  的半径为  $r = \frac{2}{\sqrt{5}}$ , 即圆  $C$  的方程是  $(x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ ,

$$\overrightarrow{AP} = (x, y-1), \overrightarrow{AB} = (0, -1), \overrightarrow{AD} = (2, 0),$$

$$\text{若满足 } \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}, \text{ 即 } \begin{cases} x = 2\mu \\ y-1 = -\lambda, \mu = \frac{x}{2}, \lambda = 1-y, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \lambda + \mu = \frac{x}{2} - y + 1, \text{ 设 } z = \frac{x}{2} - y + 1, \text{ 即 } \frac{x}{2} - y + 1 - z = 0,$$

点  $P(x, y)$  在圆  $(x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$  上,

$$\text{所以圆心到直线的距离 } d \leq r, \text{ 即 } \frac{|2-z|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ 解得 } 1 \leq z \leq 3,$$

所以  $z$  的最大值是 3, 即  $\lambda + \mu$  的最大值是 3.

故选A.

【标注】【知识点】平面向量的正交分解及坐标表示

21. 已知正三角形 $ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$ , 平面 $ABC$ 内的动点 $P, M$ 满足 $|\overrightarrow{AP}| = 1, \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MC}$ , 则

$|\overrightarrow{BM}|^2$ 的最大值是( ).

A.  $\frac{43}{4}$

B.  $\frac{49}{4}$

C.  $\frac{37+6\sqrt{3}}{4}$

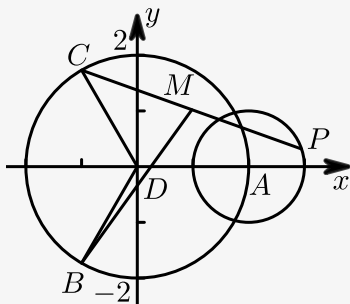
D.  $\frac{37+2\sqrt{33}}{4}$

【答案】B

【解析】方法一：由已知易得 $\angle ADC = \angle ADB = \angle BDC = 120^\circ$ ,

$|\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DC}| = 2$ , 以 $D$ 为原点,

直线 $DA$ 为 $x$ 轴建立平面直角坐标系,



则 $A(2, 0), B(-1, -\sqrt{3}), C(-1, \sqrt{3})$ , 设 $P(x, y)$ ,

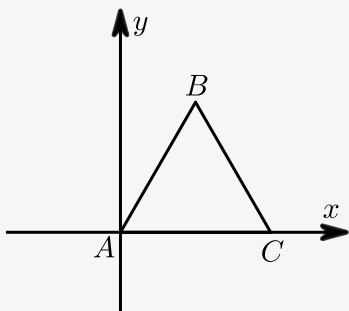
由已知 $|\overrightarrow{AP}| = 1$ , 得 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ , 又 $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MC}$ ,

$$\therefore M\left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+\sqrt{3}}{2}\right), \therefore \overrightarrow{BM}\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+3\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\therefore |\overrightarrow{BM}|^2 = \frac{(x-1)^2 + (y+3\sqrt{3})^2}{4}, \text{ 它表示圆 } (x-2)^2 + y^2 = 1 \text{ 上点 } (x, y) \text{ 与点 } (-1, -3\sqrt{3}) \text{ 距离平方的 } \frac{1}{4},$$

$$\therefore \left(\overrightarrow{BM}\right)_{\max}^2 = \frac{1}{4} \left( \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} + 1 \right)^2 = \frac{49}{4}.$$

方法二：以 $A$ 为坐标原点, 建立如图所示的平面直角坐标系,



则  $A(0,0)$  ,  $C(2\sqrt{3},0)$  ,  $B(\sqrt{3},3)$

设  $P(x,y)$  ,

$$\because |\vec{AP}| = 1 ,$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 1 ,$$

$$\because \vec{PM} = \vec{MC} ,$$

$\therefore M$  为  $PC$  的中点 ,

$$\therefore M\left(\frac{x+2\sqrt{3}}{2}, \frac{y}{2}\right)$$

$$\therefore |\vec{BM}|^2 = \left(\frac{x+2\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - 3\right)^2$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - 3y + 9$$

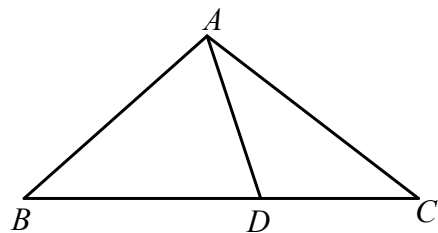
$$= \frac{1}{4} - 3y + 9 = \frac{37}{4} - 3y$$

又  $\because -1 \leq y \leq 1$  ,

$\therefore$  当  $y = -1$  时 ,  $|\vec{BM}|^2$  取得最大值 , 且最大值为  $\frac{49}{4}$  .

**【标注】**【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算

22. 如图 , 在  $\triangle ABC$  中 ,  $AD \perp AB$  ,  $\vec{BC} = \sqrt{3}\vec{BD}$  ,  $|\vec{AD}| = 1$  , 则  $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$  .



**【答案】**  $\sqrt{3}$

**【解析】**  $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot \vec{AD} = (\vec{AB} + \sqrt{3}\vec{BD}) \cdot \vec{AD}$   
 $= \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \sqrt{3}\vec{BD} \cdot \vec{AD}$  ,

$$\because AD \perp AB, \therefore \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0,$$

而在直角 $\triangle ABD$ 中易知 $\vec{BD}$ 在 $\vec{AD}$ 方向上的投影为 $|\vec{BD}| \cos \langle \vec{AD}, \vec{BD} \rangle = |\vec{AD}|$ ,

$$\text{从而 } \vec{BD} \cdot \vec{AD} = |\vec{AD}|^2 = 1,$$

$$\therefore \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \sqrt{3} \vec{BD} \cdot \vec{AD} = 0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

**【标注】**【素养】数学运算

**【知识点】**用基底法求向量的数量积

23. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 是单位向量,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , 若向量 $\vec{c}$ 与向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 共面, 且满足 $|\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}| = 1$ , 则 $|\vec{c}|$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$

**【解析】**  $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$

$$\because \vec{a}, \vec{b} \text{ 是单位向量, } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

$$\text{则设 } \vec{a}(1, 0), \vec{b} = (0, 1), \vec{c} = (x, y),$$

$$\therefore |-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 1,$$

$$\therefore |(x-1), (y+1)| = 1,$$

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 1,$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1,$$

$$\text{圆心 } C(1, -1), \text{ 半径 } r = 1,$$

$$\therefore |OC| = \sqrt{2},$$

$$\therefore \sqrt{2} - 1 \leq |\vec{c}| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2} + 1.$$

$$\text{故答案为: } (\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1).$$

**【标注】**【知识点】向量的模；利用向量数量积求模长；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量加、减、数乘的坐标运算

24. 已知点 $C$ 为线段 $AB$ 上一点,  $P$ 为直线 $AB$ 外一点,  $PC$ 是 $\angle APB$ 的角平分线,  $I$ 为 $PC$ 上一点, 满足

$$\vec{BI} = \vec{BA} + \lambda \left( \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} + \frac{\vec{AP}}{|\vec{AP}|} \right) (\lambda > 0), |\vec{PA}| - |\vec{PB}| = 4, |\vec{PA} - \vec{PB}| = 10, \text{ 则 } \frac{\vec{BI} \cdot \vec{BA}}{|\vec{BA}|}$$

值为( ).

A. 2

B. 3

C. 4

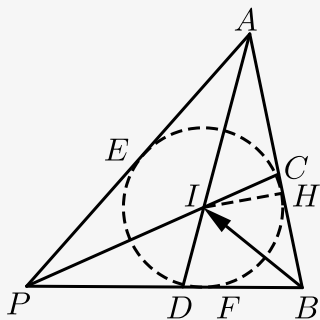
D. 5

【答案】 B

【解析】  $\because |\vec{PA} - \vec{PB}| = |\vec{BA}| = 10$ ,  $PC$  是  $\angle APB$  的角平分线,

$$\text{又满足 } \vec{BI} = \vec{BA} + \lambda \left( \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} + \frac{\vec{AP}}{|\vec{AP}|} \right) (\lambda > 0), \text{ 即 } \vec{AI} = \lambda \left( \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} + \frac{\vec{AP}}{|\vec{AP}|} \right),$$

所以  $I$  在  $\angle BAP$  的角平分线上, 由此得  $I$  是  $\triangle ABP$  的内心, 过  $I$  作  $IH \perp AB$  于  $H$ , 以  $I$  为圆心,  $IH$  为半径, 作  $\triangle PAB$  的内切圆, 如图,



分别切  $PA$ ,  $PB$  于点  $E$ ,  $F$ ,

$$\begin{aligned} \because |\vec{PA}| - |\vec{PB}| &= 4, |\vec{PA} - \vec{PB}| = 10, |\vec{BH}| = |\vec{BF}| \\ &= \frac{1}{2} (|\vec{PB}| + |\vec{AB}| - |\vec{PA}|) \\ &= \frac{1}{2} [|\vec{AB}| - (|\vec{PA}| - |\vec{PB}|)] \\ &= 3, \end{aligned}$$

在直角三角形  $BIH$  中,  $\cos \angle IBH = \frac{|\vec{BH}|}{|\vec{BI}|}$ ,

$$\text{所以 } \frac{\vec{BI} \cdot \vec{BA}}{|\vec{BA}|} = |\vec{BI}| \cos \angle IBH = |\vec{BH}| = 3.$$

故选 B.

【标注】【知识点】向量的模；平面向量的加法运算及运算规则；平面向量数量积运算（非坐标）