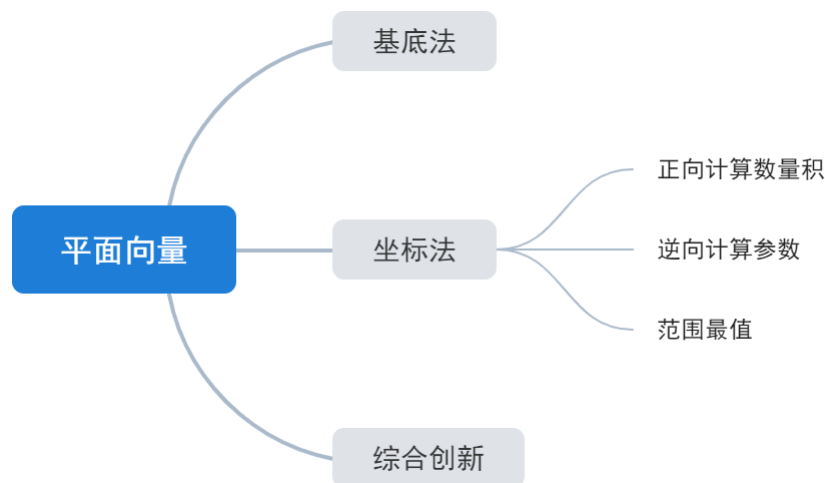


第二讲-平面向量

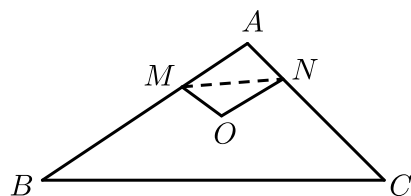
1. 知识梳理



一、 基底法

1. 真题分析

1. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为1的等边三角形，点 D 、 E 分别是边 AB 、 BC 的中点，连接 DE 并延长到点 F ，使得 $DE = 2EF$ ，则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为（ ）。
- A. $-\frac{5}{8}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{11}{8}$
2. 在如图的平面图形中，已知 $OM = 1$ ， $ON = 2$ ， $\angle MON = 120^\circ$ ， $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MA}$ ， $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA}$ ，则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OM}$ 的值为（ ）。



- A. -15 B. -9 C. -6 D. 0

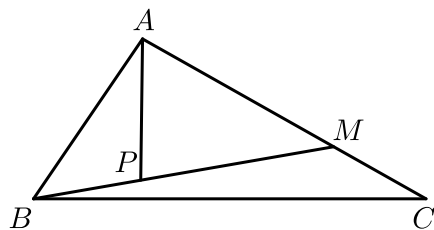
2. 思路总结

题型总结：

基底法一般适用于所给图形是非特殊图形的情况（这样不太好建立直角坐标系或者点的坐标不太好写），而且题目所给的条件可以找到一组基底（即模长和夹角已知或者可求），处理这类问题首先要做的寻找基底，然后用基底表示所求向量，最后进行数量积运算，在用基底表示的过程中要多构造平行四边形或者找合适三角形辅助线性运算。

3. 模拟演练

3. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，点 M 在线段 AC 上，点 P 在线段 BM 上，且满足 $\frac{AM}{MC} = \frac{MP}{PB} = 2$ ，若 $AB = 2$ ， $AC = 3$ ， $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$ ，则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为_____。



4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$ ， $|\overrightarrow{BC}| = 3$ ， M, N 分别是 BC 边上的三等分点，则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的值是（ ）。
- A. 5 B. $\frac{21}{4}$ C. 6 D. 8

二、坐标法

1. 真题分析

正向求数量积

5. 在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = 2\sqrt{3}$ ， $AD = 5$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，点 E 在线段 CB 的延长线上，且 $AE = BE$ ，则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} =$ _____。
6. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB \parallel DC$ ， $AB = 2$ ， $BC = 1$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，点 E 和点 F 分别在线段 BC 和 CD 上，且 $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的值为_____。

逆向求参数

7. 在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD = 1$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ ， E 为 CD 的中点。若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} = 1$ ，则 AB 的长为_____。
- 8.

已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形, $AB = 2$, 设点 P, Q 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = (1 - \lambda) \overrightarrow{AC}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, 若 $\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = -\frac{3}{2}$, 则 $\lambda = ()$.

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}$

D. $\frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

9. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为2, $\angle BAD = 120^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, DC 上, $BE = \lambda BC$,

$DF = \mu DC$. 若 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1$, $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF} = -\frac{2}{3}$, 则 $\lambda + \mu = ()$.

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

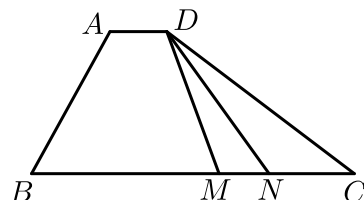
C. $\frac{5}{6}$

D. $\frac{7}{12}$

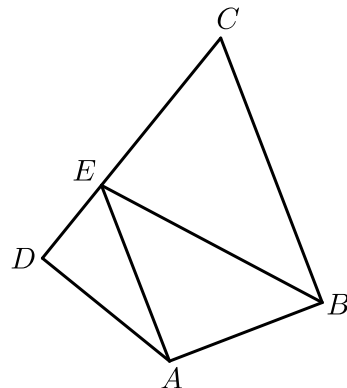
范围最值

10. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AB \parallel DC$, $AB = 2$, $BC = 1$, $\angle ABC = 60^\circ$, 动点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上, 且 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{9\lambda} \overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值为 _____.

11. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = 60^\circ$, $AB = 3$, $BC = 6$, 且 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}$, 则实数 λ 的值为 _____, 若 M, N 是线段 BC 上的动点, 且 $|\overrightarrow{MN}| = 1$, 则 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}$ 的最小值为 _____.



12. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp BC$, $AD \perp CD$, $\angle BAD = 120^\circ$, $AB = AD = 1$, 若点 E 为边 CD 上的动点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为 ().



A. $\frac{21}{16}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{25}{16}$

D. 3

13. 已知直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$, $AD = 2$, $BC = 1$, P 是腰 DC 上的动点, 则 $|\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}|$ 的最小值为 _____.

2. 思路总结

坐标法计算数量积解题步骤：

- 1、建立平面直角坐标系；
- 2、写出相关点的坐标；
- 3、计算相关向量的坐标；
- 4、列式计算数量积或者最值、或者列方程求解参数；

3. 模拟演练

🔔 正向求数量积

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 2AC$, M 是 BC 的中点, 点 N 在线段 AB 上, $\overrightarrow{NB} = 2\overrightarrow{AN}$, CN 与 AM 交于点 P , $AC = 1$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$.
15. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $|\overrightarrow{AD}| = 2$, $|\overrightarrow{CD}| = 4$, $\angle ABC = 60^\circ$, E, F 分别是 BC, CD 的中点, DE 与 AF 交于 H , 则 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE}$ 的值().
- A. 12 B. 16 C. $\frac{12}{5}$ D. $\frac{16}{5}$

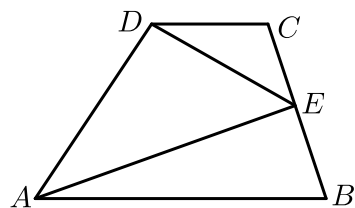
🔔 逆向求参数

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 1$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{4}$, 则 $\angle ABC = (\quad)$.
- A. $\frac{5\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$
17. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 P 满足 $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{PB} (\lambda > 1)$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} = -\frac{5}{3}$, 若 $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{AD}| = 1$, 且 $\angle BAD = 60^\circ$, 则实数 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.
18. 直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = 2$, $AD = 1$, 对角线 AC 与 BD 交于点 M , 点 E 和 F 分别在线段 AM 和 BM 上, 且 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BF} = (1 - \lambda) \overrightarrow{BM}$, 若 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CF} = \frac{3}{4}$, 则 $\lambda = (\quad)$.
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

🔔 范围最值

19.

如图梯形 $ABCD$, $AB \parallel CD$ 且 $AB = 5$, $AD = 2DC = 4$, E 在线段 BC 上, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE}$ 的最小值为 ().



- A. $\frac{15}{13}$ B. $\frac{95}{13}$ C. 15 D. $-\frac{15}{13}$

20. 在等腰梯形 $ABCD$ 中已知 $AB \parallel DC$, $AB = 2$, $BC = 1$, $\angle ABC = 60^\circ$, 动点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上, 且 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{8\lambda} \overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值为 _____.

21. 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $DC = 1$, $AD = 2$, $\angle DAB = 60^\circ$, 点 E 在直线 BD 上, 点 F 在直线 AC 上, 且 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CF} = \mu \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = 4$, 则 $\lambda + \mu$ 的最小值为 ().

- A. $\frac{11 + 4\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{11}{3}$
C. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{11 - 4\sqrt{6}}{3}$

22. 在梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AB \parallel CD$, $AB = 2CD = 2$, $\frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{2}$, 动点 E , F 分别在线段 CD 和 BC 上, 且 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最大值为 $\frac{7}{2}$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的取值范围是 _____.

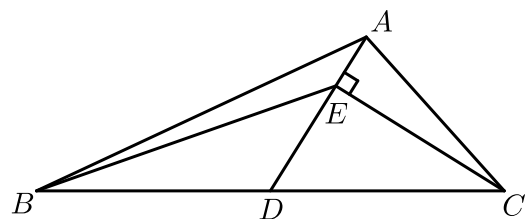
三、综合创新

23. D 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上一点, $\overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB}$, 过 D 点的直线分别交直线 AB 、 AC 于 E 、 F , 若 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \mu \overrightarrow{AC}$, 其中 $\lambda > 0$, $\mu > 0$, 则 $\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\mu} =$ _____.

24. 在平面内, 定点 A, B, C, D 满足 $|\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DC}|$, $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = -2$, 动点 P, M 满足 $|\overrightarrow{AP}| = 1$, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MC}$, 则 $|\overrightarrow{BM}|^2$ 的最大值是 ().

- A. $\frac{43}{4}$ B. $\frac{49}{4}$
C. $\frac{37 + 6\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{37 + 2\sqrt{33}}{4}$

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 3$, $AC = 2$, $\angle BAC = 120^\circ$, D 为边 BC 的中点, 若 $CE \perp AD$, 垂足为 E , 则 $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC}$ 的值为 _____.



26. 在平面内, 若有 $|\vec{a}| = \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (2\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}) = 0$, 则 $|\vec{c}|$ 的最大值为 _____ .

27. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, $AB = 6$, $AC = 10$, 若 $\vec{AO} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$, 且 $2x + 10y = 5 (x \neq 0)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 () .

A. 24

B. $\frac{20\sqrt{2}}{3}$

C. 18

D. $20\sqrt{2}$