

## 第四讲-不等式证明（一）练习题

### 一、构造放缩式证明数列型不等式

1. 已知函数  $f(x) = x^2 + a \ln x (a \neq 0)$  .

(1) 若对任意的  $x \in [1, +\infty)$  , 不等式  $f(x) \geq (a+2)x$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围 .

(2) 证明: 对  $n \in \mathbf{N}^*$  ,  $\frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \cdots + \frac{1}{\ln(n+2013)} > \frac{2013}{n(n+2013)}$  .

**【答案】** (1)  $a \leq -1$  .

(2) 证明见解析 .

**【解析】** (1) 由题意知,  $f(x) - (a+2)x \geq 0$  对任意  $x \in [1, +\infty)$  恒成立,

$$\text{令 } h(x) = f(x) - (a+2)x = x^2 + a \ln x - (a+2)x ,$$

$$h'(x) = 2x - (a+2) + \frac{a}{x} = \frac{(x-1)(2x-a)}{x} ,$$

$\therefore h(x) = f(x) - (a+2)x \geq 0$  对任意  $x \in [1, +\infty)$  恒成立,

$$\therefore 2x - a \geq 0 \text{ 且 } h(1) \geq 0 ,$$

$$\therefore a \leq -1 .$$

(2) 令  $a = -1$  ,  $x \in [1, +\infty)$  ,

$$\therefore x^2 - \ln x \geq x ,$$

$$\therefore \ln x \leq x(x-1) ,$$

$$\therefore \frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} ,$$

$$\therefore \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} ,$$

$$\frac{1}{\ln(n+2)} > \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} ,$$

...

$$\frac{1}{\ln(n+2013)} > \frac{1}{n+2012} - \frac{1}{n+2013} ,$$

累加即可得到结论 .

**【标注】**【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题；通过构造函数证明不等式

2. 已知函数  $f(x) = x \ln x + ax + 1$  ,  $a \in \mathbf{R}$  .

(1) 当  $x > 0$  时, 若关于  $x$  的不等式  $f(x) \geq 0$  恒成立, 求  $a$  的取值范围 .

(2) 当  $n \in \mathbf{N}^*$  时, 证明:  $\frac{n}{2n+4} < \ln^2 2 + \ln^2 \frac{3}{2} + \cdots + \ln^2 \frac{n+1}{n} < \frac{n}{n+1}$  .

【答案】(1)  $[-1, +\infty)$ .

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 由  $f(x) \geq 0$ , 得  $x \ln x + ax + 1 \geq 0 (x > 0)$ ,

整理, 得  $-a \leq \ln x + \frac{1}{x}$  恒成立,

即  $-a \leq \left( \ln x + \frac{1}{x} \right)_{\min}$ ,

令  $F(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ ,

则  $F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ ,

$\therefore$  函数  $F(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

$\therefore$  函数  $F(x) = \ln x + \frac{1}{x}$  的最小值为  $F(1) = 1$ ,

$\therefore -a \leq 1$ , 即  $a \geq -1$ ,

$\therefore a$  的取值范围是  $[-1, +\infty)$ .

(2)  $\frac{n}{2n+4}$  为数列  $\left\{ \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$  的前  $n$  项和,

$\frac{n}{n+1}$  为数列  $\left\{ \frac{1}{n(n+1)} \right\}$  的前  $n$  项和,

$\therefore$  只需证明  $\frac{1}{(n+1)(n+2)} < \ln^2 \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n(n+1)}$  即可,

由 (1), 当  $a = -1$  时, 有  $x \ln x - x + 1 \geq 0$ , 即  $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ ,

令  $x = \frac{n+1}{n} > 1$ , 即得  $\ln \frac{n+1}{n} > 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ ,

$\therefore \ln^2 \frac{n+1}{n} > \left( \frac{1}{n+1} \right)^2 > \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ ,

现证明  $\ln^2 \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n(n+1)}$ ,

即  $2 \ln \sqrt{\frac{n+1}{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$   
 $= \frac{n+1-n}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} - \sqrt{\frac{n}{n+1}}, (*)$

现证明  $2 \ln x < x - \frac{1}{x} (x > 1)$ ,

构造函数  $G(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x (x \geq 1)$ ,

则  $G'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} \geq 0$ ,

$\therefore$  函数  $G(x)$  在  $[1, +\infty)$  上是增函数, 即  $G(x) \geq G(1) = 0$ ,

$\therefore$  当  $x > 1$  时, 有  $G(x) > 0$ , 即  $2 \ln x < x - \frac{1}{x}$  成立,

令  $x = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ , 则  $(*)$  式成立,

综上, 得  $\frac{1}{(n+1)(n+2)} < \ln^2 \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n(n+1)}$ ,

对数列  $\left\{ \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}, \left\{ \ln^2 \frac{n+1}{n} \right\}$ ,

$$\left\{ \frac{1}{n(n+1)} \right\} \text{ 分别求前 } n \text{ 项和,}$$

$$\text{得 } \frac{n}{2n+4} < \ln^2 2 + \ln^2 3 + \cdots + \ln^2 \frac{n+1}{n} < \frac{n}{n+1}.$$

**【标注】**【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题；通过构造函数证明不等式；裂项相消法求和

3. 已知函数  $f(x) = x^2 - 2x \ln x$ ，函数  $g(x) = x + \frac{a}{x} - (\ln x)^2$ ，其中  $a \in \mathbf{R}$ ， $x_0$  是  $g(x)$  的一个极值点，且  $g(x_0) = 2$ 。

(1) 求实数  $x_0$  和  $a$  的值。

(2) 证明  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4k^2 - 1}} > \frac{1}{2} \ln(2n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

**【答案】** (1)  $x_0 = 1, a = 1$ 。

(2) 证明见解析。

**【解析】** (1) 由已知可得函数  $g(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ，

$$\text{且 } g'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x}.$$

由已知，得  $g'(x_0) = 0$ ，

$$\text{即 } x_0^2 - 2x_0 \ln x_0 - a = 0. \quad ①$$

$$\text{由 } g(x_0) = 2 \text{ 可得 } x_0^2 - x_0 (\ln x_0)^2 - 2x_0 + a = 0, \quad ②$$

联立①，②，消去  $a$ ，

$$\text{可得 } 2x_0 - (\ln x_0)^2 - 2 \ln x_0 - 2 = 0. \quad ③$$

$$\text{令 } t(x) = 2x - (\ln x)^2 - 2 \ln x - 2,$$

$$\text{则 } t'(x) = 2 - \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2(x - \ln x - 1)}{x}.$$

由(1)知  $x - \ln x - 1 \geq 0$ ，

故  $t'(x) \geq 0$ ，

所以  $t(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增。

注意到  $t(1) = 0$ ，

所以方程③有唯一解  $x_0 = 1$ ，

代入①，可得  $a = 1$ ，

所以， $x_0 = 1, a = 1$ 。

(2) 由(1)知  $f(x) = x^2 - 2x \ln x$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增，

故当  $x \in (1, +\infty)$  时， $f(x) > f(1) = 1$ ，

$$\text{所以 } g'(x) = \frac{x^2 - 2x \ln x - 1}{x^2} = \frac{f(x) - 1}{x^2} > 0,$$

可得  $g(x)$  在区间  $(1, +\infty)$  上单调递增。

因此, 当  $x > 1$  时,  $g(x) > g(1) = 2$ ,  
 即  $x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 > 2$ ,  
 亦即  $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 > (\ln x)^2$ .  
 这时  $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ ,  $\ln x > 0$ ,  
 故可得  $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} > \ln x$ .  
 取  $x = \frac{2k+1}{2k-1}$ ,  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  
 可得:  $\sqrt{\frac{2k+1}{2k-1}} - \sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}} > \ln(2k+1) - \ln(2k-1)$ ,  
 而  $\sqrt{\frac{2k+1}{2k-1}} - \sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}} = \frac{2}{\sqrt{4k^2-1}}$ ,  
 故  $\sum_{k=1}^n \frac{2}{\sqrt{4k^2-1}} > \sum_{k=1}^n (\ln(2k+1) - \ln(2k-1)) = \ln(2n+1)$ ,  
 所以,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4k^2-1}} > \frac{1}{2} \ln(2n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$ .

**【标注】**【知识点】已知极值情况求参数值；直接求函数的单调性（不含参）；通过构造函数证明不等式

4. 已知函数  $f(x) = \frac{a \ln x + a - 1}{x}$ .

当  $a = 1$  时, 证明:

①  $xf(x) \leq x - 1$ .

② 证明:  $\frac{f(2)}{2} + \frac{f(3)}{3} + \cdots + \frac{f(n)}{n} < \frac{n}{2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{3}{4}$ .

**【答案】** (1) ① 证明见解析.

② 证明见解析.

**【解析】** (1) ①  $a = 1$  时,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,

所以  $xf(x) = \ln x$ ,

令  $h(x) = \ln x - x + 1$ ,

则  $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} (x > 0)$ ,

$x \in (0, 1)$  时,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  单调递增;

$x \in (1, +\infty)$  时,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  单调递减;

$h(x)_{\max} = h(1) = \ln 1 = 0$ ,

即  $\ln x \leq x - 1$ ,

即  $xf(x) \leq x - 1$ .

$$\textcircled{2} \quad a=1 \text{ 时, } f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad \frac{f(n)}{n} = \frac{\ln n}{n^2},$$

由 (i) 知:  $\ln x \leq x - 1$ ,

$$\text{即 } \frac{\ln x}{x} \leq 1 - \frac{1}{x}.$$

$$\text{令 } x = n^2 \text{ 得 } \frac{\ln n^2}{n^2} \leq 1 - \frac{1}{n^2},$$

$$\text{即 } \frac{2 \ln n}{n^2} \leq 1 - \frac{1}{n^2},$$

$$\text{所以 } \frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

$$\text{所以 } \frac{f(2)}{2} + \frac{f(3)}{3} + \cdots + \frac{f(n)}{n}$$

$$= \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \cdots + \frac{\ln n}{n^2}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + \cdots + 1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ (n-1) - \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) \right]$$

$$< \frac{1}{2} \left[ (n-1) - \left( \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ (n-1) - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) \right]$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{4}.$$

**【标注】**【知识点】利用导数求函数的最值；利用导数求函数的单调性、单调区间；通过构造函数证明不等式

5. 已知函数  $f(x) = x + \frac{1}{x} - a \cdot (\ln x)^2 \cdot (a \in \mathbf{R})$ .

(1) 若  $f(x) \geq 2$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

(2) 证明不等式  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(2^k+1)(2^k+2)}} > \ln \frac{2^{n+1}}{2^n+1} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$ .

**【答案】** (1)  $a \leq 1$ .

(2) 证明见解析.

**【解析】** (1)  $\because f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2a \ln x}{x} = \frac{1}{x} \left( x - \frac{1}{x} - 2a \ln x \right) \quad (x > 0)$ ,

令  $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2a \ln x$ , 则  $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2a}{x} = \frac{x^2 - 2ax + 1}{x^2}$ , 注意到

$g(1) = 0$ ,

当  $a \leq 0$  时,  $f(x) \geq x + \frac{1}{x} \geq 2$  (当且仅当  $x = 1$  取等),

当  $a > 0$  时, 令  $u(x) = x^2 - 2ax + 1$ , 则  $u(x)$  的  $\Delta = 4(a^2 - 1)$ , 且

$u(1) = 2(1 - a)$ ,

①当  $0 < a \leq 1$  时,  $\Delta \leq 0$ , 则  $u(x) \geq 0$ , 即有  $g'(x) \geq 0$ , 从而  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又  $g(1) = 0$ ,

$\therefore g(x) < 0$  的解集为  $(0, 1)$ ,  $g(x) > 0$  的解集为  $(1, +\infty)$ ,

$\therefore f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

$\therefore f(x) \geq f(1) = 2$ , 满足题意.

②当  $a > 1$  时,  $\Delta > 0$ , 令  $u(x) = 0$ , 必有两根, 不妨设为  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ ,

$\therefore u(0) = 1$  且  $x_{\text{对称轴}} = a > 1$ ,  $u(1) = 2(1 - a) < 0$ ,

$\therefore 0 < x_1 < 1 < x_2$ ,

$\therefore$  当  $x \in (x_1, 1)$  时,  $u(x) < 0$ , 即有  $g'(x) < 0$ , 从而  $g(x) > g(1) = 0$ ,

$\therefore f'(x) > 0$  在区间  $(x_1, 1)$  上恒成立, 即有  $f(x)$  在区间  $(x_1, 1)$  上单调递增, 从而  $f(x) < f(1) = 2$ , 与  $f(x) \geq 2$  在定义域上恒成立矛盾,

综上,  $a \leq 1$ .

(2) 由 (1) 知, 当  $a = 1$  时,  $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 \geq 2$ ,

则  $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq (\ln x)^2$ ,

$\therefore$  当  $x > 1$  时,  $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \ln x$ , 令  $x = 1 + \frac{1}{2^n + 1}$ ,

则  $\ln\left(1 + \frac{1}{2^n + 1}\right) = \ln\left(\frac{2^{n+1}}{2^n + 1} \times \frac{2^{n-1} + 1}{2^n}\right) < \sqrt{1 + \frac{1}{2^n + 1}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2^{n+1}}}} = \frac{1}{\sqrt{(2^n + 1)(2^n + 2)}}$ ,

$\therefore$

$\ln \frac{2^{n+1}}{2^n + 1} = \ln \left[ \left( \frac{2^2}{2^1 + 1} \times \frac{2^1 + 1}{2^2} \right) \cdot \left( \frac{2^3}{2^2 + 1} \times \frac{2^2 + 1}{2^3} \right) \cdots \left( \frac{2^{n+1}}{2^n + 1} \times \frac{2^{n-1} + 1}{2^n} \right) \right]$   
 $< \frac{1}{\sqrt{(2^1 + 1)(2^1 + 2)}} + \frac{1}{\sqrt{(2^2 + 1)(2^2 + 2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2^n + 1)(2^n + 2)}}$   
 $= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(2^k + 1)(2^k + 2)}}.$

$\therefore$  原不等式成立.

**【标注】【知识点】** 导数与最值; 利用导数证明不等式恒成立问题; 通过构造函数证明不等式

## 二、极值点偏移

6. 已知函数  $f(x) = a \ln x - bx - 3$  ( $a \in \mathbf{R}$  且  $a \neq 0$ ).

当  $a = 1$  时, 设  $g(x) = f(x) + 3$ , 若  $g(x)$  有两个相异零点  $x_1, x_2$ ,

求证:  $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$ .

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1)  $g(x) = \ln x - bx$ , 设  $g(x)$  的两个相异零点为  $x_1, x_2$ .

$$\text{设 } x_1 > x_2 > 0,$$

$$\therefore g(x_1) = 0, g(x_2) = 0,$$

$$\therefore \ln x_1 - bx_1 = 0, \ln x_2 - bx_2 = 0.$$

$$\therefore \ln x_1 - \ln x_2 = b(x_1 - x_2), \ln x_1 + \ln x_2 = b(x_1 + x_2).$$

$$\text{要证 } \ln x_1 + \ln x_2 > 2, \text{ 即证 } b(x_1 + x_2) > 2,$$

$$\text{即 } \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > \frac{2}{x_1 + x_2}.$$

$$\text{即 } \ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2}.$$

$$\text{设 } t = \frac{x_1}{x_2} > 1 \text{ 上式转化为 } \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}, t > 1.$$

$$\text{设 } g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1},$$

$$\therefore g'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0.$$

$$\therefore g(t) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单调递增.}$$

$$\therefore g(t) > g(1) = 0.$$

$$\therefore \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}.$$

$$\therefore \ln x_1 + \ln x_2 > 2.$$

【标注】【知识点】求函数单调区间(含参一次型导函数);通过构造函数证明不等式;双变量问题

7. 已知  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = x - ae^x + 1$  有两个零点  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ .

证明:  $e^{x_1} + e^{x_2} > 2$ .

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) 令  $f(x) = 0 \Rightarrow a = \frac{x+1}{e^x}$ ,

令  $g(x) = \frac{x+1}{e^x}$ ,  $g'(x) = -xe^{-x}$ , 则  $g(x)$  在  $(-\infty, 0)$  单调递增, 在  $(0, +\infty)$  单调递减.

由(1)知  $0 < a < 1$ , 故有  $-1 < x_1 < 0 < x_2$ .

令  $h(x) = g(-x) - g(x)$ ,  $(-1 < x < 0)$ .

$$h(x) = (1-x)e^x - (1+x)e^{-x}, (-1 < x < 0),$$

$$h'(x) = -xe^x + xe^{-x} = x(e^{-x} - e^x) < 0,$$

所以,  $h(x)$  在  $(-1, 0)$  单调递减, 故  $h(x) > h(0) = 0$ .

故当  $-1 < x < 0$  时,  $g(-x) - g(x) > 0$ .

所以  $g(-x_1) > g(x_1)$ , 而  $g(x_1) = g(x_2) = a$ , 故  $g(-x_1) > g(x_2)$ ,

又  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递减,  $-x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ .

所以,  $-x_1 < x_2$ , 即  $x_1 + x_2 > 0$ ,

故  $e^{x_1} + e^{x_2} \geq 2\sqrt{e^{x_1+x_2}} = 2e^{\frac{x_1+x_2}{2}} > 2$ .

**【标注】**【知识点】已知零点或根情况求参数范围; 极值点偏移问题; 通过构造函数证明不等式;  
函数零点的概念

8. 已知函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2}ax - b$ ,  $g(x) = ax^2 + bx$ .

若函数  $y = f(x)$  的两个零点分别为  $x_1, x_2$  且  $x_1 \neq x_2$ , 求证:  $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > 1$ .

**【答案】** (1) 证明见解析.

**【解析】** (1)  $x_1, x_2$  是  $f(x)$  的两个零点, 不妨设  $x_1 < x_2$ ,

$$\therefore f(x_1) = f(x_2) = 0,$$

$$\frac{\ln x_1}{x_1} - \frac{1}{2}ax_1 - b = 0, \quad \frac{\ln x_2}{x_2} - \frac{1}{2}ax_2 - b = 0,$$

$$\therefore \ln x_1 - \frac{1}{2}ax_1^2 - bx_1 = 0, \quad \ln x_2 - \frac{1}{2}ax_2^2 - bx_2 = 0,$$

$$\text{相减得: } \ln x_1 - \ln x_2 - \frac{1}{2}a(x_1^2 - x_2^2) - b(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} - \frac{1}{2}a(x_1 + x_2) - b = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x_1 + x_2) \ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} - \frac{1}{2}a(x_1 + x_2)^2 - b(x_1 + x_2) = 0,$$

$$\frac{(x_1 + x_2) \ln \frac{x_1}{x_2}}{2(x_1 - x_2)} - a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - b\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 0,$$

$$\therefore \frac{(x_1 + x_2) \ln \frac{x_1}{x_2}}{2(x_1 - x_2)} = g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{(x_1 + x_2) \ln \frac{x_1}{x_2}}{2(x_1 - x_2)} = \frac{\left(\frac{x_1}{x_2} + 1\right) \ln \frac{x_1}{x_2}}{2\left(\frac{x_1}{x_2} - 1\right)},$$

$$\text{令 } t = \frac{x_1}{x_2}, \text{ 即证 } 0 < t < 1, \quad \frac{(t+1) \ln t}{2(t-1)} > 1,$$

$$\frac{(t+1) \ln t}{2(t-1)} > 1 \Leftrightarrow \ln t < \frac{2(t-1)}{t+1} \Leftrightarrow \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} < 0,$$



$$\text{令 } m(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}, t \in (0, 1), m'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$$

$$m(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上是增函数, 又 } m(1) = 0,$$

$\therefore t \in (0, 1), m(t) < 0$ , 命题得证.

**【标注】**【知识点】双变量问题；通过构造函数证明不等式；利用导数求函数的最值

9. 已知函数  $f(x) = ax^2 + (1-2a)x - \ln x (a \in \mathbf{R})$ .

对于曲线  $y = f(x)$  上的两个不同的点  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 记直线  $MN$  的斜率为  $k$ , 若

$y = f(x)$  的导函数为  $y = f'(x)$ , 证明:  $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > k$ .

**【答案】** (1) 证明见解析.

**【解析】** (1) 由 (1) 得  $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = a(x_1+x_2) + 1 - 2a - \frac{2}{x_1+x_2}$ ,

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1^2 + (1-2a)x_1 - \ln x_1 - [ax_2^2 + (1-2a)x_2 - \ln x_2]}{(x_1 - x_2)}$$

$$= \frac{a(x_1+x_2)(x_1-x_2) + (1-2a)(x_1-x_2) + \ln \frac{x_2}{x_1}}{x_1 - x_2}$$

$$= a(x_1+x_2) + (1-2a) + \frac{\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_1 - x_2},$$

$$\therefore f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - k = -\frac{2}{x_1+x_2} - \frac{\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} - \frac{2}{x_1 + x_2},$$

不妨设  $0 < x_1 < x_2$ , 令  $\frac{x_2}{x_1} = t > 1$ ,

$$\text{由 } \ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{2(x_2-x_1)}{x_2+x_1}$$

$$= \ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{2\left(\frac{x_2}{x_1} - 1\right)}{\frac{x_2}{x_1} + 1}$$

$$= \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}, t > 1,$$

$$\text{令 } g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}, t > 0,$$

$$\therefore g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0,$$

$\therefore$  函数  $g(x)$  在  $(1, +\infty)$  单调递增,

$$\therefore g(t) > g(1) = 0,$$

$$\therefore \ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{2(x_2 - x_1)}{x_2 + x_1} > 0, \text{ 即 } \frac{\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} - \frac{2}{x_1 + x_2} > 0,$$

$$\therefore f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > k.$$

**【标注】**【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间；通过构造函数证明不等式；双变量问题

10. 已知函数  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = ax^2 + bx (a \neq 0, b \in \mathbf{R})$ .

若函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的图象有两个不同的交点  $(x_1, f(x_1))$ ,  $(x_2, f(x_2))$ , 记  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ , 记  $f'(x)$ ,  $g'(x)$  分别是  $f(x)$ ,  $g(x)$  的导函数, 证明:  $f'(x_0) < g'(x_0)$ .

**【答案】** (1) 证明见解析.

**【解析】** (1)  $f'(x_0) - g'(x_0) = \frac{1}{x_0} - 2(ax_0 + b) = \frac{1 - 2ax_0^2 - bx_0}{x_0},$

$$1 - 2ax_0^2 - bx_0 = 1 - 2a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - b\frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$= \frac{2 - a(x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2)}{2},$$

$$ax_1^2 + bx_1 = \ln x_1, ax_2^2 + bx_2 = \ln x_2,$$

$$a(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + b(x_1 - x_2) = \ln \frac{x_1}{x_2},$$

$$\text{即 } a(x_1 + x_2) + b = \frac{1}{x_1 - x_2} \ln \frac{x_1}{x_2},$$

$$a(x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{\frac{x_1}{x_2} + 1}{\frac{x_1}{x_2} - 1} \cdot \ln \frac{x_1}{x_2},$$

$$\text{不妨设 } x_1 > x_2, \text{ 令 } h(x) = \frac{x+1}{x-1} \ln x (x > 1),$$

$$\text{下证 } h(x) = \frac{x+1}{x-1} \ln x > 2, \text{ 即 } \ln x > \frac{2(x-1)}{x+1} = 2 - \frac{4}{x+1},$$

$$\text{即 } \ln x + \frac{4}{x+1} > 2, u(x) = \ln x + \frac{4}{x+1},$$

$$u'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2},$$

$$\text{所以 } u(x) > u(1) = 2,$$

$$\therefore a(x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) > 2, f'(x_0) < g'(x_0).$$

**【标注】**【知识点】导数与最值；双变量问题；利用导数证明不等式恒成立问题；利用导数求函数的单调性、单调区间

### 三、凹凸函数性质

11. 设函数  $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x}$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

当  $a < 0$  时, 设  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ , 试比较  $f(\frac{x_1 + x_2}{2})$  与  $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$  的大小并说明理由.

**【答案】** (1) 当  $x_1 = x_2$  时,  $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ ;  
当  $x_1 \neq x_2$  时,  $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ .

**【解析】** (1) 因为  $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) = a \ln \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{2}{x_1 + x_2}$ ,  
 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{1}{2}(a \ln x_1 + \frac{1}{x_1} + a \ln x_2 + \frac{1}{x_2})$ .  
 $= \frac{1}{2}[a \ln(x_1 x_2) + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}] = a \ln \sqrt{x_1 x_2} + \frac{x_1 + x_2}{2x_1 x_2}$ .

所以

$$f(\frac{x_1 + x_2}{2}) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = a \ln \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{2}{x_1 + x_2} - a \ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{x_1 + x_2}{2x_1 x_2}$$

$$= a \ln \frac{x_1 + x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}} - \frac{(x_1 - x_2)^2}{2x_1 x_2(x_1 + x_2)}.$$

(1) 显然, 当  $x_1 = x_2$  时,  $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ .

(2) 当  $x_1 \neq x_2$  时, 因为  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$  且  $a < 0$ ,

所以  $x_1 + x_2 > 2\sqrt{x_1 x_2}$ , 所以  $\frac{x_1 + x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}} > 1$ ,  $a \ln \frac{x_1 + x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}} < 0$ .

又  $-\frac{(x_1 - x_2)^2}{2x_1 x_2(x_1 + x_2)} < 0$ , 所以  $a \ln \frac{x_1 + x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}} - \frac{(x_1 - x_2)^2}{2x_1 x_2(x_1 + x_2)} < 0$

所以  $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < 0$ ,

即  $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ .

综上所述, 当  $x_1 = x_2$  时,  $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ ;

当  $x_1 \neq x_2$  时,  $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ .

**【标注】**【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

12. 已知函数  $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} + a \ln x$  ( $x > 0$ ),  $f(x)$  的导函数是  $f'(x)$ , 对任意两个不相等的正数  $x_1, x_2$ , 证明:

当  $a \leq 0$  时,  $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f(\frac{x_1 + x_2}{2})$ .

**【答案】** (1) 证明见解析.

**【解析】** (1) 不妨设  $x_1 < x_2$ , 即证  $f(x_2) - f(\frac{x_1 + x_2}{2}) > f(\frac{x_1 + x_2}{2}) - f(x_1)$ .

由拉格朗日中值定理知, 存在  $\xi_1 \in (x_1, \frac{x_1 + x_2}{2})$ ,  $\xi_2 \in (\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2)$ ,

$$\begin{aligned}
 &\text{则 } \xi_1 < \xi_2 \text{ 且 } f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = f'(\xi_2) \cdot \frac{x_2-x_1}{2}, \\
 &f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1) = f'(\xi_1) \cdot \frac{x_2-x_1}{2} \text{ 又 } f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} + \frac{a}{x}, \\
 &f''(x) = 2 + \frac{4}{x^3} - \frac{a}{x^2}. \\
 &\text{当 } a \leq 0 \text{ 时, } f''(x) \geq 0. \\
 &\text{所以 } f'(x) \text{ 是一个单调递减函数,} \\
 &\text{故 } f'(\xi_1) < f'(\xi_2), \\
 &\text{从而 } f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1) \text{ 成立, 因此命题获证.}
 \end{aligned}$$

**【标注】**【知识点】二阶导问题；双变量问题；利用导数求单调性证不等式；导数与最值；导数与单调性

13. 已知函数  $f(x) = kx(1 - \ln x)$ ，其中  $k$  为非零实数。

当  $k > 0$  时，设  $x, y \in (0, +\infty)$ ，证明：
$$f(x) + f(y) \leq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

**【答案】**（1）证明见解析。

**【解析】**（1）根据对称性，不妨设  $x_2 > x_1 > 0$ ，

$$\begin{aligned}
 &\text{证明：} f(x_2) + f(x_1) \leq 2f\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right), \\
 &\text{令 } \varphi(x) = \frac{f(x) + f(x_1)}{2} - f\left(\frac{x+x_1}{2}\right), \quad x > x_1 > 0, \\
 &\varphi'(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2}f'\left(\frac{x+x_1}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left[f'(x) - f'\left(\frac{x+x_1}{2}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{2}\left[-k\ln x + k\ln\left(\frac{x+x_1}{2}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{2}k\left(\ln\frac{x+x_1}{2x}\right) \\
 &x > x_1 \\
 &\Rightarrow 2x > x_1 + x \\
 &\Rightarrow \frac{x_1+x}{2x} < 1, \\
 &\Rightarrow \varphi'(x) < 0, \varphi(x) \text{ 单调递减}, \\
 &\text{又 } \because x_2 > x_1, \\
 &\Rightarrow \varphi(x_2) < \varphi(x_1) = 0, \\
 &\text{当 } x_1 > x_2 > 0 \text{ 时, 同理可证原不等式恒成立,} \\
 &\text{证毕.}
 \end{aligned}$$

**【标注】**【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题

14. 已知函数  $f(x) = x \ln x$ .

设  $A(x_1, f(x_1))$ ,  $B(x_2, f(x_2))$ , 且  $x_1 \neq x_2$ , 证明:  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ .

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) 不妨设  $x_1 < x_2$ ,

$$k_{AB} < f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1}{x_2 - x_1} < \ln \frac{x_1 + x_2}{2} + 1,$$

$$x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1 < x_2 \ln \frac{x_1 + x_2}{2} - x_1 \ln \frac{x_1 + x_2}{2} + x_2 - x_1,$$

$$x_2 \ln \frac{2x_2}{x_1 + x_2} < x_1 \ln \frac{2x_1}{x_1 + x_2} + x_2 - x_1 \quad (\text{观察两边同除以 } x_1, \text{ 可构造出关于 } \frac{x_2}{x_1} \text{ 的不等式}),$$

$$\text{两边同除以 } x_1 \text{ 得, } \frac{x_2}{x_1} \ln \frac{2 \cdot \frac{x_2}{x_1}}{1 + \frac{x_2}{x_1}} < \ln \frac{2}{1 + \frac{x_2}{x_1}} + \frac{x_2}{x_1} - 1, \text{ 令 } \frac{x_2}{x_1} = t, \text{ 则 } t > 1$$

$$\text{即证: } t \ln \frac{2t}{1+t} < \ln \frac{2}{1+t} + t - 1,$$

$$\text{令 } g(t) = t \ln \frac{2t}{1+t} - \ln \frac{2}{1+t} - t + 1,$$

$$g'(t) = \ln \frac{2t}{1+t} + t \cdot \frac{1+t}{2t} \cdot \frac{2}{(1+t)^2} + \frac{1+t}{2} \cdot \frac{2}{(1+t)^2} - 1 = \ln \left( \frac{2t}{t+1} \right) + \frac{2}{t+1} - 1$$

$$\text{令 } \frac{2t}{t+1} = m (m > 1), h(m) = \ln m + 1 - m \quad (\text{再次利用整体换元}),$$

$$h(m) = \frac{1}{m} - 1 < 0, h(m) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单调递减, 所以 } h(m) < h(1) = 0,$$

$$\text{即 } \ln m < m - 1, \text{ 即 } g'(t) = \ln \left( \frac{2t}{t+1} \right) + \frac{2}{t+1} - 1 \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore g(t) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上是减函数, 所以 } g(t) < g(1) = 0,$$

$$\text{所以 } t \ln \frac{2t}{1+t} < \ln \frac{2}{1+t} + t - 1 \text{ 得证,}$$

$$\text{所以 } k_{AB} < f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \text{ 成立.}$$

【标注】【思想】转化化归思想

【素养】数学运算

【素养】数学抽象

【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

【知识点】双变量问题

【知识点】利用公式和四则运算法则求导

【方法】构造法

【方法】换元法

15. 已知函数  $f(x) = x - m \ln x$ ,  $m \in \mathbf{R}$ ,  $f'(x)$  是  $f(x)$  的导函数.

若  $m > 0$ ,  $0 < x_1 < x_2$ , 若存在  $x_0$ , 使得  $f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ , 试比较  $x_1 + x_2$  与  $2x_0$  的大小.

【答案】(1)  $x_1 + x_2 > 2x_0$ .

【解析】(1)  $f'(x) = 1 - \frac{m}{x}$ ,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{x_1 - m \ln x_1 - (x_2 - m \ln x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{x_1 - x_2 + m \ln \frac{x_2}{x_1}}{x_1 - x_2} \\ &= 1 + \frac{m \ln \frac{x_2}{x_1}}{x_1 - x_2}, \end{aligned}$$

$$f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 1 - \frac{m}{\frac{x_1 + x_2}{2}} = 1 - \frac{2m}{x_1 + x_2},$$

$$\text{故 } f'(x_0) - f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 1 + \frac{m \ln \frac{x_2}{x_1}}{x_1 - x_2} - \left(1 - \frac{2m}{x_1 + x_2}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{m \ln \frac{x_2}{x_1}}{x_1 - x_2} + \frac{2m}{x_1 + x_2} \\ &= \frac{m}{x_1 - x_2} \left[ \ln \frac{x_2}{x_1} + \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{令 } t = \frac{x_2}{x_1} (t > 1), h(t) = \ln t + \frac{2(1-t)}{1+t},$$

$$\text{则 } h'(t) = \frac{1}{t} + \frac{-4}{(1+t)^2} + \frac{(t-1)^2}{t(1+t)^2} > 0.$$

$\therefore h(t)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 则  $h(t) > h(1) = 0$ .

$$\therefore f'(x_0) - f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{m \ln \frac{x_2}{x_1}}{x_1 - x_2} - \left(1 - \frac{2m}{x_1 + x_2}\right) = \frac{m}{x_1 - x_2} \left[ \ln \frac{x_2}{x_1} + \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} \right] \\ &< 0. \end{aligned}$$

$\therefore f'(x_0) < f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ , 又  $\because f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

$\therefore x_0 < \frac{x_1 + x_2}{2}$ , 即  $x_1 + x_2 > 2x_0$ .

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式; 求解函数极值