

第五讲-不等式证明（二）练习题

一、利用切线进行放缩

1. 已知函数 $f(x) = xe^x - ae^{x-1}$, 且 $f'(1) = e$.

若关于 x 的方程 $f(x) = kx^2 - 2 (k > 2)$ 存在两不相等的正实数根 x_1, x_2 , 证明 :
 $|x_1 - x_2| > \ln \frac{4}{e}$.

【答案】 (1) 证明见解析 ;

【解析】 (1) 方程 $f(x) = kx^2 - 2$, 即为 $(x-1)e^x - kx^2 + 2 = 0$.

设函数 $g(x) = (x-1)e^x - kx^2 + 2$.

求导 , 得 $g'(x) = xe^x - 2kx = x(e^x - 2k)$.

由 $g'(x) = 0$, 解得 $x = 0$, 或 $x = \ln(2k)$.

所以当 $x \in (0, +\infty)$ 变化时 , $g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下表所示 :

x	$(0, \ln(2k))$	$\ln(2k)$	$(\ln(2k), +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以函数 $g(x)$ 在 $(0, \ln(2k))$ 单调递减 , 在 $(\ln(2k), +\infty)$ 上单调递增 .

由 $k > 2$, 得 $\ln(2k) > \ln 4 > 1$.

又因为 $g(1) = -k + 2 < 0$,

所以 $g(\ln(2k)) < 0$.

不妨设 $x_1 < x_2$ (其中 x_1, x_2 为 $f(x) = kx^2 - 2$ 的两个正实数根) .

因为函数 $g(x)$ 在 $(0, \ln(2k))$ 单调递减 , 且 $g(0) = 1 > 0$, $g(1) = -k + 2 < 0$,

所以 $0 < x_1 < 1$.

同理根据函数 $g(x)$ 在 $(\ln 2k, +\infty)$ 上单调递增 , 且 $g(\ln(2k)) < 0$.

可得 $x_2 > \ln(2k) > \ln 4$,

所以 $|x_1 - x_2| = x_2 - x_1 > \ln 4 - 1 = \ln \frac{4}{e}$,

即 $|x_1 - x_2| > \ln \frac{4}{e}$.

【标注】 【知识点】 利用导数求单调性证不等式 ; 双变量问题

2. 已知函数 $f(x) = (x+1)(e^x - 1)$.

(1) 若 $a \leq e-1$, 证明: $f(x) \geq a \ln x + 2ex - 2$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上恒成立.

(2) 若方程 $f(x) = b$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明: $x_2 - x_1 \leq 1 + \frac{b+e+1}{3e-1} + \frac{eb}{e-1}$.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $\ln x \geq 0$,

所以 $a \ln x + 2ex - 2 \leq (e-1) \ln x + 2ex - 2$,

下先证: $(e-1) \ln x + 2ex - 2 \leq f(x) = (x+1)(e^x - 1)$,

即证: $g(x) = (x+1)(e^x - 1) - (e-1) \ln x - 2ex + 2$,

$$g'(x) = (x+2)e^x - 1 - \frac{e-1}{x} - 2e,$$

又 $g'(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g'(1) = 0$ 知 $g(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上单调递增,

故 $g(x) \geq g(1) = 0$,

因此 $(x+1)(e^x - 1) \geq (e-1) \ln x + 2ex - 2 \geq a \ln x + 2ex - 2$, 得证.

(2) 由 (1) 知 $f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $y = \frac{1-e}{e}(x+1)$,

$$\text{构造 } F(x) = f(x) - \frac{1-e}{e}(x+1)\left(e^x - \frac{1}{e}\right),$$

$$F'(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{e}, \quad F''(x) = (x+3)e^x,$$

所以 $F'(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 上单调递减,

在 $(-3, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又 } F'(-3) = -\frac{1}{e^3} - \frac{1}{e} < 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F'(x) = -\frac{1}{e}, \quad F'(-1) = 0,$$

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减,

在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $F(x) \geq F(-1) = 0$

$$\Rightarrow f(x) \geq s(x) = \frac{1-e}{e}(x+1),$$

设方程 $s(x) = \frac{1-e}{e}(x+1) = b$ 的根

$$x_1 = \frac{eb}{1-e} - 1,$$

$$\text{又 } b = s(x_1') = f(x_1) \geq s(x_1),$$

由 $s(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,

所以 $x_1' \leq x_1$,

另一方面, $f(x)$ 在点 $(1, 2e-2)$ 处的切线方程为 $t(x) = (3e-1)x - e - 1$,

构造 $G(x) = f(x) - t(x) = (x+1)(e^x - 1) - (3e-1)x + e + 1$
 $= (x+1)e^x - 3ex + e$,
 $G'(x) = (x+2)e^x - 3e$, $G'(x) = (x+3)e^x$,
 所以 $G'(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 上单调递减 ,
 在 $(-3, +\infty)$ 上单调递增 ,
 又 $G'(-3) = -\frac{1}{e^3} - 3e < 0$,
 $\lim_{x \rightarrow \infty} G'(x) = -3e$, $G'(1) = 0$,
 所以 $G(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减 , 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增 , 所以
 $G(x) \geq G(1) = 0 \Rightarrow f(x) \geq t(x)$
 $= (3e-1)x - e - 1$,
 设方程 $t(x) = (3e-1)x - e - 1$ 的根 $x_2' = \frac{e+1+b}{3e-1}$,
 又 $b = t(x_2') = f(x_2) \geq t(x_2)$,
 由 $t(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增 ,
 所以 $x_2 \leq x_2'$,
 所以 $x_2 - x_1 \leq x_2' - x_1'$
 $= 1 + \frac{b+e+1}{3e-1} + \frac{eb}{e-1}$,
 得证 .

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式；双变量问题；二阶导问题

3. 已知函数 $f(x) = (x+1)(e^x - 1)$.

(1) 已知 $f(x) \geq ax$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立 , 求 a 的值 .

(2) 若方程 $f(x) = b$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明 : $x_2 - x_1 \leq b + 1 + \frac{eb}{e-1}$.

【答案】 (1) $a = 1$.

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) $h(x) = f(x) - ax = (x+1)e^x - x - 1 - ax$,

$$h'(x) = (x+2)e^x - 1 - a = 0 ,$$

$$m(x) = (x+2)e^x ,$$

$$m'(x) = (x+3)e^x ,$$

所以 $m(x) = (x+2)e^x$ 在 $(-\infty, -3)$ 单调递减 , $(-3, +\infty)$ 单调递增 ,

$$\text{又 } m(0) = 2 ,$$

$$\text{又因为 } h(0) = 0 ,$$

所以为了保证 $h(x)$ 在0处取得最小值, 只有 $a = 1$,
 若 $a > 1$, $m(x) = (x+2)e^x = a+1$ 有解 $x_a > 0$,
 $h(x)$ 在 $(0, x_a)$ 上单调递减, 与 $h(x) \geq h(0)$ 矛盾,
 若 $a < 1$, $m(x) = (x+2)e^x = a+1$ 有解 $-3 < x_0 < 0$,
 $h(x)$ 在 $(x_0, 0)$ 上单调递减, 与 $h(x) \geq h(0)$ 矛盾.

(2) 设 $f'(x) = 0$ 的解为 t ,
 $\because f'(-1)f'(0) < 0$,
 $\therefore t \in (-1, 0)$,
 $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, t)$ 递减, 在 $(t, +\infty)$ 递增, $b > f(t)$,
 结合(1)(2)可以得到 $f(x) \leq \frac{1-e}{e}(x+1)$,
 $f(x) \geq x$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立.
 设 $b = \frac{1-e}{e}(x+1)$ 的解为 x_3 ,
 则 $x_3 < x_1$, 设 $b = x$ 的解为 x_4 ,
 则 $x_4 > x_2$, $x_3 = \frac{eb}{1-e} - 1$, $x_4 = b$,
 所以 $x_2 - x_1 \leq x_4 - x_3 = 1 + b + \frac{eb}{e-1}$, 得证.

【标注】【知识点】函数零点的概念; 导数的几何意义; 求在某点处的切线方程; 利用导数证明不等式恒成立问题; 双变量问题

4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x \ln x - 4x + \frac{5}{2}$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程 $y = h(x)$, 并证明: $f(x) \geq h(x)$.

(2) 当 $-1 < a < \frac{5}{2}$ 时, 方程 $f(x) = a$ 有两个不同的实数根 x_1, x_2 , 证明: $|x_2 - x_1| < 2a + 3$.

【答案】(1) $y = -x$, 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) $f'(x) = x + 2 \ln x - 2$,

所以 $f'(1) = -1$, $f(1) = -1$, 即切线方程: $y = -x$,

下证: $\frac{1}{2}x^2 + 2x \ln x - 4x + \frac{5}{2} \geq -x$, 令 $\varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x \ln x - 3x + \frac{5}{2}$,

因为: $\varphi'(x) = x + 2 \ln x - 1$, 显然 $\varphi'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, $\varphi'(1) = 0$,

所以易得 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 递减, $(1, +\infty)$ 递增,

所以 $[\varphi(x)]_{\min} = \varphi(1) = 0$,

所以 $f(x) \geq h(x)$.

(2)

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x \ln x - 4x + \frac{5}{2}$, 则 x_1, x_2 为方程 $f(x) = a$ 的两根, 不妨设

$x_1 < x_2$,

显然 $f'(x) = x + 2 \ln x - 2$ 在 $x > 0$ 时单调递增,

$f'(1) < 0, f'(2) > 0$, 所以存在 $1 < x_0 < 2$, 使 $f'(x_0) = 0$,

当 $x \in (0, x_0)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减, $x \in (x_0, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增,

由 (1) 得: $f(x) \geq h(x)$, $\begin{cases} y = -x \\ y = a \end{cases} \Rightarrow x = -a$,

所以: $x_1 > -a$,

$\therefore x_2 - x_1 < x_2 + a$,

要证: $|x_2 - x_1| < 2a + 3$, 需证: $x_2 + a < 2a + 3$, 即证: $x_2 < a + 3$,

因为: $-1 < a < \frac{5}{2}$,

所以 $a + 3 > x_0$, 即证: $f(a + 3) > f(x_2)$,

即: $\frac{1}{2}(a + 3)^2 + 2(a + 3) \ln(a + 3) - 4(a + 3) + \frac{5}{2} > a$,

令

$F(a) = \frac{1}{2}(a + 3)^2 + 2(a + 3) \ln(a + 3) - 4(a + 3) + \frac{5}{2} - a = \frac{1}{2}a^2 - 2a + 2(a + 3) \ln(a + 3) - 5$

$F'(a) = a + 2 \ln(a + 3)$, 显然 $F'(a)$ 在 $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ 单调递增, 且

$F'(-1) = -1 + 2 \ln 2 > 0$,

因为 $F(a)$ 在 $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ 单调递增,

所以 $F(a) > F(-1) = 4 \ln 2 - \frac{5}{2} > 0$ 所以不等式成立.

【标注】【知识点】导数的几何意义; 利用导数求函数的最值; 通过构造函数证明不等式; 双变量问题; 函数零点的概念

二、利用题目所给条件进行放缩

5. 已知函数 $f(x) = ae^{-x} + \cos x (a \in \mathbf{R})$.

当 $a = -1$ 时, x_0 为函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的零点, 求证: $\frac{\pi}{2} - x_0 < \frac{1}{e^{x_0}(\sin x_0 - \cos x_0)}$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $f(x) = -e^{-x} + \cos x < 0$, 故 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$f'(x) = e^{-x} - \sin x$, 由于 $y = -e^{-x}$ 和 $y = -\cos x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

$\therefore f''(x) = -e^{-x} - \cos x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增,
 $\therefore f''(x) < f''(\frac{\pi}{2}) = -e^{-\frac{\pi}{2}} < 0$, 故 $f'(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减.
 又 $f'(0) = 1 > 0$, $f'(\frac{\pi}{4}) = e^{-\frac{\pi}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$,
 $\therefore$ 存在唯一的 $x_1 \in (0, \frac{\pi}{4})$, 使得 $f'(x_1) = 0$,
 $\therefore f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 单调递增, 在 $(x_1, \frac{\pi}{2})$ 单调递减.
 又 $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{4}) = -e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = -e^{-\frac{\pi}{2}} < 0$,
 $\therefore$ 函数 $f(x) = -e^{-x} + \cos x$ 在 $(0, \pi)$ 上的零点 $x_0 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$,
 即 $\cos x_0 = \frac{1}{e^{x_0}}$.
 要证 $\frac{\pi}{2} - x_0 < \frac{1}{e^{x_0}(\sin x_0 - \cos x_0)}$, 即证
 $(\sin x_0 - \cos x_0)(\frac{\pi}{2} - x_0) - \cos x_0 < 0$.
 设 $h(x) = (\sin x - \cos x)(\frac{\pi}{2} - x) - \cos x$, $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$,
 则
 $h'(x) = (\cos x + \sin x)(\frac{\pi}{2} - x) - (\sin x - \cos x) + \sin x = (\cos x + \sin x)(\frac{\pi}{2} - x) + \cos x$.
 显然 $h'(x) > 0$ 在 $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增.
 $\therefore h(x) < h(\frac{\pi}{2}) = 0$, 故原不等式得证.

【标注】【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题；导数与最值；已知单调性求参数的取值范围

6. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax - ae^x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.
 求证：当 $x > 0$ 时, $xe^x - e \ln x > \frac{1}{2}x^3 + x^2$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 由 (2) 可知, 若 $a = 1$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) < -1$, 即 $\frac{1}{2}x^2 + x - e^x < -1$,
 $\therefore \frac{1}{2}x^3 + x^2 - xe^x < -x$,
 $\therefore \frac{1}{2}x^3 + x^2 - xe^x + e \ln x < e \ln x - x$,
 令 $F(x) = e \ln x - x$, $F'(x) = \frac{e}{x} - 1 = \frac{e-x}{x}$,
 当 $0 < x < e$ 时, $F'(x) > 0$; 当 $x > e$ 时, $F'(x) < 0$,
 $\therefore F(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,
 $\therefore F(x) \leq F(e) = 0$, 即 $e \ln x - x \leq 0$, $\frac{1}{2}x^3 + x^2 - xe^x + e \ln x < 0$.
 $\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $xe^x - e \ln x > \frac{1}{2}x^3 + x^2$.

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式

7. 已知函数 $f(x) = e^x - x^2$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处切线方程

(2) 求证: $\frac{e^x + (2-e)x - 1}{x} \geq \ln x + 1$.

【答案】 (1) $y = (e-2)x + 1$.

(2) 证明解析.

【解析】 (1)

$$\begin{aligned} (2) \quad e^x + (1-e)x - x \ln x - 1 \geq 0 &\Leftrightarrow x \ln x \leq e^x + (1-e)x - 1 \\ &\Rightarrow x(x-1) \leq e^x + (1-e)x - 1 \Rightarrow e^x - x^2 + (2-e)x - 1 \geq 0 \\ &\Rightarrow e(e^{x-1} - x) - (x-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{令 } t = x - 1, (t > -1), \text{ 令 } f(t) = e(e^t - t - 1) - t^2.$$

注意到 $f(0) = 0$, 及验证 $f(0)$ 为 $f(t)$ 极大值即可.

$$\begin{aligned} f'(t) &= e(e^t - 1) - 2t, f'(0) = 0, f''(t) = e^{t+1} - 2, \text{ 令 } f''(t) = 0, \text{ 得} \\ t &= \ln 2 - 1 \text{ 所以 } f'(t) \text{ 在 } (-1, \ln 2 - 1) \text{ 单调减, 在 } (\ln 2 - 1, +\infty) \text{ 单调增.} \end{aligned}$$

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式; 导数与最值

8. 设函数 $f(x) = \ln x - ax (a \in \mathbf{R})$ ($e = 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数).

(1) 当 $f(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立时, 求 a 的取值范围;

(2) 证明: 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\frac{x+1}{e^x}(1+x)^{\frac{1}{x}} < e$.

【答案】 (1) $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

(2) 证明 见解析.

【解析】 (1) 当 $f(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $a > \frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立. 设

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\ln x}{x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}. \text{ 当 } x \in (0, e) \text{ 时, } g'(x) > 0, g(x) \text{ 为增函数;} \\ \text{当 } x \in (e, +\infty) \text{ 时, } g'(x) < 0, g(x) \text{ 为减函数, 故当 } x = e \text{ 时, } g(x) \text{ 取得最大值 } \frac{1}{e}. \\ \text{所以 } a \text{ 取值范围为 } \left(\frac{1}{e}, +\infty\right). \end{aligned}$$

(2) 要证当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\frac{x+1}{e^x}(1+x)^{\frac{1}{x}} < e$, 设 $t = 1 + x, t \in (1, +\infty)$ 只要证 $t^{1+\frac{1}{t-1}} < e^t$, 两边取以 e 为底数的对数即 $\ln t < t - 1$. 由 (I) 知当 $a = 1$ 时, $f(x) = \ln x - x$ 的最大值为 -1 , 此时 $x = 1$, 所以当 $t \in (1, +\infty)$ 时, $\ln t < t - 1$, 即得 $\ln t < t - 1$, 所以原不等式成立

【标注】【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题；导数与最值；利用导数求函数的单调性、单调区间

9. 已知函数 $f(x) = ae^x - x - 1, a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(2) 求证: 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\ln \frac{e^x - 1}{x} > \frac{x}{2}$.

【答案】 (1) $[1, +\infty)$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) $\because e^x > 0$,

$\therefore f(x) > 0$ 恒成立等价于 $a > \frac{x+1}{e^x}$ 恒成立,

设 $g(x) = \frac{x+1}{e^x}$, 其中 $x \in (0, +\infty)$, 则 $g'(x) = -\frac{x}{e^x}$,

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore$ 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g(x) < g(0) = 1$,

$\therefore a \geq 1$, 即实数 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

(2) 证明: $\ln \frac{e^x - 1}{x} > \frac{x}{2}$ 等价于 $e^x - xe^{\frac{x}{2}} - 1 > 0$,

设 $h(x) = e^x - xe^{\frac{x}{2}} - 1, x \in (0, +\infty)$, 则 $h'(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} - 1 \right)$,

由 (2) 知 $x \in (0, +\infty)$ 时, $e^x - x - 1 > 0$ 恒成立, 所以 $e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} - 1 > 0$,

$\therefore h'(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} - 1 \right) > 0$ 恒成立,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore h(x) > h(0) = 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 有 $\ln \frac{e^x - 1}{x} > \frac{x}{2}$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题；通过构造函数证明不等式

三、综合创新

10. 已知函数 $f(x) = \lambda \ln x - e^{-x} (\lambda \in \mathbf{R})$.

求证: 当 $0 > x_1 > x_2$ 时, 都有 $e^{1-x_2} - e^{1-x_1} > 1 - \frac{x_2}{x_1}$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】(1) 由(1)可得： $\lambda = -\frac{1}{e}$ 时， $f(x) = -\frac{\ln x}{e} - e^{-x}$ 递减，

$$\therefore f(x_1) > f(x_2),$$

$$\text{即} -\frac{\ln x_1}{e} - e^{-x_1} > -\frac{\ln x_2}{e} - e^{-x_2},$$

$$e^{-x_2} - e^{-x_1} > \frac{\ln x_1}{e} - \frac{\ln x_2}{e},$$

$$e^{1-x_2} - e^{1-x_1} > \ln x_1 - \ln x_2 = -\ln \frac{x_2}{x_1},$$

故只需证明 $-\ln \frac{x_2}{x_1} > 1 - \frac{x_2}{x_1}$ 对 $0 < x_1 < x_2$ 恒成立即可，

$$\text{令 } t = \frac{x_2}{x_1} > 1,$$

$$\therefore -\ln t > 1 - t,$$

即证 $t - \ln t - 1 > 0$ 对 $t > 1$ 恒成立，

$$\text{令 } h(t) = t - \ln t - 1, h'(t) = 1 - \frac{1}{t} > 0,$$

$\therefore h(t)$ 递增，

$$\therefore h(t) > h(1) = 0,$$

$$\therefore t - \ln t - 1 > 0, \text{ 得证.}$$

【标注】【知识点】双变量问题；通过构造函数证明不等式；区间上恒单调

11. 已知函数 $f(x) = ax + x \ln x$ 的图象在点 $x = e$ (e 为自然对数的底数)处的切线与直线 $3x - y - 1 = 0$ 平行；

(1) 若 $k \in \mathbf{Z}$ ， $k < \frac{f(x)}{(x-1)}$ 对任意 $x > 1$ 恒成立，求 k 的最大值；

(2) 当 $n > m \geq 4$ 时，证明： $(mn^n)^m > (nm^m)^n$.

【答案】(1) k 的最大值是3；

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 由(1)知， $f(x) = x + x \ln x$ ，所以 $k < \frac{f(x)}{x-1}$ 对任意 $x > 1$ 恒成立，即

$$k < \frac{x + x \ln x}{x-1} \text{ 对任意 } x > 1 \text{ 恒成立.}$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{x + x \ln x}{x-1}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{x - \ln x - 2}{(x-1)^2}.$$

$$\text{令 } h(x) = x - \ln x - 2 (x > 1), \text{ 则 } h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0,$$

所以函数 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{因为 } h(3) = 1 - \ln 3 < 0, h(4) = 2 - 2 \ln 2 > 0,$$

所以方程 $h(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上存在唯一实根 x_0 ，且满足 $x_0 \in (3, 4)$.

当 $1 < x < x_0$ 时， $h(x) < 0$ ，即 $g'(x) < 0$ ，当 $x > x_0$ 时， $h(x) > 0$ ，即 $g'(x) > 0$

，所以函数 $g(x) = \frac{x + x \ln x}{x-1}$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{所以}[g(x)]_{\min} = g(x_0) = \frac{x_0(1 + \ln x_0)}{x_0 - 1} = \frac{x_0(1 + x_0 - 2)}{x_0 - 1} = x_0 \in (3, 4).$$

所以 $k < [g(x)]_{\min} = x_0 \in (3, 4)$. 故整数 k 的最大值是 3.

(2) 方法一: 由(2)知, $g(x) = \frac{x + x \ln x}{x - 1}$ 是 $[4, +\infty)$ 上的增函数,

$$\text{所以, 当 } n > m \geq 4 \text{ 时, } \frac{n + n \ln n}{n - 1} > \frac{m + m \ln m}{m - 1}.$$

$$\text{即 } n(m - 1)(1 + \ln n) > m(n - 1)(1 + \ln m).$$

$$\text{整理, 得 } mn \ln n + m \ln m > mn \ln m + n \ln n + (n - m).$$

$$\text{因为 } n > m, \text{ 所以 } mn \ln n + m \ln m > mn \ln m + n \ln n.$$

$$\text{即 } \ln n^{mn} + \ln m^m > \ln m^{mn} + \ln n^n, \text{ 即 } \ln(n^{mn} m^m) > \ln(m^{mn} n^n).$$

$$\text{所以 } (mn^n)^m > (nm^m)^n.$$

方法二: 构造函数 $f(x) = mx \ln x + m \ln m - mx \ln m - x \ln x$, 则

$$f'(x) = (m - 1) \ln x + m - 1 - m \ln m.$$

因为 $x > m \geq 4$, 所以

$$f'(x) > (m - 1) \ln m + m - 1 - m \ln m = m - 1 - \ln m > 0.$$

所以函数 $f(x)$ 在 $[m, +\infty)$ 上单调递增. 因为 $n > m$, 所以 $f(n) > f(m)$.

所以

$$mn \ln n + m \ln m - mn \ln m - n \ln n > m^2 \ln m + m \ln m - m^2 \ln m - m \ln m = 0$$

$$\text{即 } mn \ln n + m \ln m > mn \ln m + n \ln n.$$

$$\ln n^{mn} + \ln m^m > \ln m^{mn} + \ln n^n, \text{ 即 } \ln(n^{mn} m^m) > \ln(m^{mn} n^n).$$

$$\text{所以 } (mn^n)^m > (nm^m)^n.$$

方法三: 要证 $(mn^n)^m > (nm^m)^n$, 即证 $\ln(n^{mn} m^m) > \ln(m^{mn} n^n)$, 即证

$$\frac{n \ln n}{n - 1} < \frac{m \ln m}{m - 1}.$$

构造函数 $f(x) = \frac{x \ln x}{x - 1}$, 则

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x - 1) - x \ln x}{(x - 1)^2} = \frac{x - \ln x - 1}{(x - 1)^2} > 0 \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上恒成立.}$$

所以, $f(x) = \frac{x \ln x}{x - 1}$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增.

$$\text{因此, 当 } n > m \geq 4 \text{ 时, } f(n) < f(m), \text{ 即 } (mn^n)^m > (nm^m)^n.$$

【标注】【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题; 利用导数求函数的最值; 利用导数求函数的单调性、单调区间; 已知切线方程求参数; 导数的几何意义

12. 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.

(1) 若 $a = 1$, 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$.

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点, 求 a 的值.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $\frac{e^2}{4}$.

【解析】(1) 方法一: 当 $a = 1$ 时, $f(x) \geq 1$ 等价于 $(x^2 + 1)e^{-x} - 1 \leq 0$.

设函数 $g(x) = (x^2 + 1)e^{-x} - 1$,

则 $g'(x) = -(x^2 - 2x + 1)e^{-x} = -(x - 1)^2 e^{-x} \leq 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 而 $g(0) = 0$,

故当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \leq 0$, 即 $f(x) \geq 1$.

方法二: 当 $a = 1$ 时,

$f(x) = e^x - x^2$, $f'(x) = e^x - 2x$.

设函数 $g(x) = f'(x) = e^x - 2x$,

则 $g'(x) = e^x - 2$.

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = \ln 2$.

当 $x < \ln 2$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x > \ln 2$ 时, $g'(x) > 0$. 故 $x = \ln 2$ 是 $g(x)$ 的极小值点, 也是最小值点, 所以 $g(x) \geq g(\ln 2) = 2(1 - \ln 2) > 0$,

从而 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 是单调递增函数.

又 $f(0) = 1$, 故当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$.

方法三: 当 $a = 1$ 时, $f(x) \geq 1$ 等价于 $\frac{e^x}{x^2 + 1} \geq 1$.

设函数 $g(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1} - 1$, 则 $g'(x) = \frac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$.

所以 $g'(x) \geq 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时等号成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 而 $g(0) = 0$, 故当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \geq 0$, 即 $f(x) \geq 1$.

方法四: 设 $g(x) = e^x - x - 1$, 则 $g'(x) = e^x - 1$.

所以当 $x > 0$ 时 $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 而 $g(0) = 0$, 故当 $x > 0$ 时 $g(x) > 0$, 即当 $x > 0$ 时 $e^x > x + 1$.

若 $a = 1$, 则 $f(x) = e^x - x^2$, $f'(x) = e^x - 2x$.

当 $0 < x \leq 1$ 时, $f'(x) > x + 1 - 2x = 1 - x \geq 0$.

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 2e^{x-1} - 2x > 2(x - 1 + 1) - 2x = 0$.

因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 而 $f(0) = 1$, 所以 $f(x) \geq 1$.

(2) 方法一: 设函数 $h(x) = 1 - ax^2e^{-x}$.

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点, 即 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点.

(i) 当 $a \leq 0$ 时, $h(x) > 0$, $h(x)$ 没有零点.

(ii) 当 $a > 0$ 时, $h'(x) = ax(x - 2)e^{-x}$.

当 $x \in (0, 2)$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增.

故 $h(2) = 1 - \frac{4a}{e^2}$ 是 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值.

①若 $h(2) > 0$, 即 $a < \frac{e^2}{4}$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有零点.

②若 $h(2) = 0$, 即 $a = \frac{e^2}{4}$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点.

③若 $h(2) < 0$, 即 $a > \frac{e^2}{4}$, 又 $h(0) = 1$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有一个零点.

由(1)知, 当 $x > 0$ 时, $e^x > x^2$, 所以

$$h(4a) = 1 - \frac{16a^3}{e^{4a}} = 1 - \frac{16a^3}{(e^{2a})^2} > 1 - \frac{16a^3}{(2a)^4} = 1 - \frac{1}{a} > 0,$$

故 $h(x)$ 在 $(2, 4a)$ 上有一个零点. 因此 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点.

综上, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点时, $a = \frac{e^2}{4}$.

方法二: 当 $a \leq 0$ 时, $f(x) > 0$, $f(x)$ 没有零点, 故 $a > 0$.

由于当 $x_1 \geq 3 \ln(9a)$ 且 $x_1 > 0$ 时,

$$e^{\frac{x_1}{3}} \geq 9a, e^{\frac{2x_1}{3}} > \frac{4x_1^2}{9},$$

$$\text{故 } f(x_1) = e^{\frac{x_1}{3}} \cdot e^{\frac{2x_1}{3}} - ax_1^2 > 9a \cdot \frac{4x_1^2}{9} - ax_1^2 > 0.$$

又 $f(0) > 0$, 从而不存在 x_0 , 使得 $f(x_0) < 0$. 否则在 $(0, x_0)$ 内 $f(x)$ 有零点, 在 $(x_0, +\infty)$ 内 $f(x)$ 有零点, 与 $f(x)$ 有唯一零点矛盾.

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的唯一零点是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的极小值点, 即若 $f(x_0) = 0$

$$\text{, 则 } f'(x_0) = 0, \text{ 从而由 } \begin{cases} e^{x_0} - ax_0^2 = 0 \\ e^{x_0} - 2ax_0 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x_0 = 2 \\ a = \frac{e^2}{4} \end{cases}.$$

综上, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点时, $a = \frac{e^2}{4}$.

方法三: 设函数 $h(x) = \frac{e^x}{x^2} - a$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点, 即 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点.

(i) 当 $a \leq 0$ 时, $h(x) > 0$, $h(x)$ 没有零点.

(ii) 当 $a > 0$ 时, $h'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$. 当 $x \in (0, 2)$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增.

故 $h(2) = \frac{e^2}{4} - a$ 是 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的最小值.

①若 $h(2) > 0$, 即 $a < \frac{e^2}{4}$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有零点.

②若 $h(2) = 0$, 即 $a = \frac{e^2}{4}$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点.

③若 $h(2) < 0$, 即 $a > \frac{e^2}{4}$, 又当 $0 < x < 2$, 且 $x < \frac{1}{\sqrt{a}}$ 时, $h(x) > \frac{1}{x^2} - a > 0$

所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有一个零点.

由(1)知, 当 $x > 0$ 时, $e^x > x^2$, 所以

$$h(4a) = \frac{e^{4a}}{16a^2} - a = \frac{(e^{2a})^2}{16a^2} - a > \frac{(2a)^4}{16a^2} - a > 0,$$

故 $h(x)$ 在 $(2, 4a)$ 上有一个零点. 因此 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点.

综上, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点时, $a = \frac{e^2}{4}$.

方法四: 由于当 $a \leq 0$ 时, $f(x) = e^x - ax^2 > 0$, $f(x)$ 没有零点, 故 $a > 0$,

$$f(x) = e^x - ax^2 = (e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{ax})(e^{\frac{x}{2}} + \sqrt{ax}).$$

又当 $x > 0$ 时, $e^{\frac{x}{2}} + \sqrt{ax} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点, 等价于

$y = e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{ax}$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点, 即 $y = 1 - \sqrt{axe}^{-\frac{x}{2}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点.

$$\text{设函数 } h(x) = 1 - \sqrt{axe}^{-\frac{x}{2}}, \text{ 则 } h'(x) = \frac{\sqrt{a}}{2}(x-2)e^{-\frac{x}{2}}.$$

当 $x \in (0, 2)$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$. 所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 故 $h(2) = 1 - \frac{2\sqrt{a}}{e}$ 是 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值.

①若 $h(2) > 0$, 即 $a < \frac{e^2}{4}$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有零点.

②若 $h(2) = 0$, 即 $a = \frac{e^2}{4}$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点.

③若 $h(2) < 0$, 即 $a > \frac{e^2}{4}$, 又 $h(0) = 1$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有一个零点.

由(1)知, 当 $x > 0$ 时, $e^x > x^2$, 所以

$h(x) > 1 - \frac{4\sqrt{a}}{x}$, 故当 $x > 4\sqrt{a}$ 时, $h(x) > 0$, 则 $h(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上有一个零点. 因此 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点.

综上, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点时, $a = \frac{e^2}{4}$.

方法五: 设 $x_0 > 0$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的唯一零点, 则 $a = \frac{e^{x_0}}{x_0^2}$, 由(1)知 $a > 1$.

由于 $f(0) > 0$, $x_0(x_0 > 0)$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的唯一零点, 故当 $0 < x < x_0$ 时, $f(x) > 0$, 所以 $f'(x_0) \leq 0$, 故 $f(x_0) - f'(x_0) \geq 0$, 可得 $x_0 \leq 2$.

取 $x_1 = 2 \ln(4a)$, 则 $x_1 > 2$, 从而 $x_0 < x_1$.

又由(1)得 $e^{\frac{x_1}{2}} > \frac{x_1^2}{4}$, 所以 $f(x_1) = e^{\frac{x_1}{2}} \cdot e^{\frac{x_1}{2}} - ax_1^2 > 4a \cdot \frac{x_1^2}{4} - ax_1^2 = 0$,

故当 $x_0 < x < x_1$ 时, $f(x) > 0$, 从而 $f'(x_0) \geq 0$.

于是可得 $f'(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} - 2ax_0 = 0$.

$$\text{由 } \begin{cases} e^{x_0} - ax_0^2 = 0 \\ e^{x_0} - 2ax_0 = 0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x_0 = 2 \\ a = \frac{e^2}{4} \end{cases}.$$

综上, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点时, $a = \frac{e^2}{4}$.

方法六: 由于当 $a \leq 0$ 时, $f(x) = e^x - ax^2 > 0$, $f(x)$ 没有零点, 故 $a > 0$,

所以 $f(x) = e^x - ax^2 = (e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{ax})(e^{\frac{x}{2}} + \sqrt{ax})$.

又当 $x > 0$ 时, $e^{\frac{x}{2}} + \sqrt{ax} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点, 等价于 $e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{ax}$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点.

设 $h(x) = e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{ax}$, 则 $h'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{a}$.

由 $h'(x) = 0$ 得 $x = 2\ln(2\sqrt{a})$.

(i) 若 $2\sqrt{a} \leq 1$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{4}$, 则 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 而 $h(0) = 1 > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有零点.

(ii) 若 $2\sqrt{a} > 1$, 即 $a > \frac{1}{4}$, 则当 $x \in (0, 2\ln(2\sqrt{a}))$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in (2\ln(2\sqrt{a}), +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$. 所以 $h(x)$ 在 $(0, 2\ln(2\sqrt{a}))$ 上单调递减, 在 $(2\ln(2\sqrt{a}), +\infty)$ 上单调递增.

故 $h(2\ln(2\sqrt{a})) = 2\sqrt{a}[1 - \ln(2\sqrt{a})]$ 是 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值.

① 若 $h(2\ln(2\sqrt{a})) > 0$, 即 $a < \frac{e^2}{4}$, $h(x)$ 没有零点.

② 若 $h(2\ln(2\sqrt{a})) = 0$, 即 $a = \frac{e^2}{4}$, $h(x)$ 只有一个零点.

③ 若 $h(2\ln(2\sqrt{a})) < 0$, 即 $a > \frac{e^2}{4}$, 由 (1) 知, 当 $x > 0$ 时, $e^x > x^2$, 所以 $h(x) > \frac{x^2}{4} - \sqrt{ax}$, 从而当 $x > 4\sqrt{a}$ 时, $h(x) > 0$. 又 $h(0) = 1$, 故 $h(x)$ 有两个零点.

综上, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点时, $a = \frac{e^2}{4}$.

方法七: $f(x) = e^x - ax^2$, 令 $f(x) = 0$, 可知 $e^x = ax^2$, $x \in (0, +\infty)$,

进一步有 $a = \frac{e^x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$,

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点等价于函数 $h(x) = \frac{e^x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$ 的图象与直线 $y = a$ 有且只有一个交点.

$$\begin{aligned} \because h(x) &= \frac{e^x}{x^2}, x \in (0, +\infty), \therefore h'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{e^x(x-2)}{x^3}, \end{aligned}$$

$\because e^x > 0, x^3 > 0$, $\therefore$ 当 $x \in (0, 2)$ 时, $h'(x) < 0$, $\therefore h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减.

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $\therefore h(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增.

故 $h(x)$ 的最小值为 $h(2) = \frac{e^2}{4}$, 又 $x \rightarrow 0, h(x) \rightarrow +\infty$ 且 $x \rightarrow +\infty, h(x) \rightarrow +\infty$.

要使直线 $y = a$ 与函数 $h(x) = \frac{e^x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$ 的图象有且只有一个交点, 故 $a = \frac{e^2}{4}$.

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式; 求参数范围 (含参指对型导函数)

