

第二讲-含参函数的分类讨论练习题

一、含参函数的单调性

1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + \ln x$.

令 $g(x) = f(x) - bx - \frac{1+a}{2}x^2$, $a \in \mathbf{R}$, 讨论函数 $g(x)$ 的单调区间.

【答案】 (1) ①若 $a \leq 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

②若 $a > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{\sqrt{a}})$ 单调递增, 在 $(\frac{1}{\sqrt{a}}, +\infty)$ 单调递减.

【解析】 (1) $g(x) = \ln x - \frac{a}{2}x^2$, $g'(x) = \frac{1}{x} - ax$,

①若 $a \leq 0$, $g'(x) \geq 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

②若 $a > 0$, 令 $g'(x) > 0$, $ax^2 - 1 < 0$, $x^2 < \frac{1}{a}$,

则 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{\sqrt{a}})$ 单调递增, 在 $(\frac{1}{\sqrt{a}}, +\infty)$ 单调递减.

【标注】【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题; 利用导数求函数的单调性、单调区间; 已知单调性求参数的取值范围

2. 已知函数 $f(x) = (ax^2 + x + a)e^{-x}$ ($a \in \mathbf{R}$).

若 $a \geq 0$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

【答案】 (1) ①当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递增, $(1, +\infty)$ 单调递减;

②当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(1 - \frac{1}{a}, 1)$ 单调递增,

在 $(-\infty, 1 - \frac{1}{a})$, $(1, +\infty)$ 单调递减.

【解析】 (1) 由题意, $f'(x) = (2ax + 1)e^{-x} - (ax^2 + x + a)e^{-x}$

$$= -e^{-x}[ax^2 + (1 - 2a)x + a - 1]$$

$$= -e^{-x}(x - 1)(ax + 1 - a).$$

①当 $a = 0$ 时, $f'(x) = -e^{-x}(x - 1)$

令 $f'(x) > 0$, 得 $x < 1$; $f'(x) < 0$, 得 $x > 1$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递增, $(1, +\infty)$ 单调递减;

②当 $a > 0$ 时, $1 - \frac{1}{a} < 1$,

令 $f'(x) > 0$, 得 $1 - \frac{1}{a} < x < 1$; $f'(x) < 0$,
 得 $x < 1 - \frac{1}{a}$ 或 $x > 1$,
 所以 $f(x)$ 在 $\left(1 - \frac{1}{a}, 1\right)$ 单调递增,
 在 $\left(-\infty, 1 - \frac{1}{a}\right), (1, +\infty)$ 单调递减.

【标注】【知识点】导数的几何意义；求在某点处的切线方程；利用导数证明不等式恒成立问题；
 利用导数求函数的单调性、单调区间

3. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+1)x + 2(a-1)\ln x$, $g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + (4-2a)\ln x$.
 若 $a > 1$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

【答案】 (1) 若 $a = 3$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增；

若 $a < 3$, $f(x)$ 在 $(a-1, 2)$ 上单调递减, 在 $(0, a-1)$ 及 $(2, +\infty)$ 单调递增；

若 $a > 3$, $f(x)$ 在 $(2, a-1)$ 上单调递减, 在 $(0, 2)$ 及 $(a-1, +\infty)$ 单调递增.

【解析】 (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = x - (a+1) + 2(a-1)\frac{1}{x} = \frac{x^2 - (a+1)x + 2(a-1)}{x} \\ = \frac{(x-2)[x-(a-1)]}{x},$$

① 若 $a-1 = 2$, 则 $a = 3$,

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2}{x} > 0, f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增};$$

② 若 $a-1 < 2$, 则 $a < 3$, 而 $a > 1$,

$$\therefore 1 < a < 3,$$

当 $x \in (a-1, 2)$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $x \in (0, a-1)$ 及 $(2, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(a-1, 2)$ 上单调递减, 在 $(0, a-1)$ 及 $(2, +\infty)$ 单调递增.

③ 若 $a-1 > 2$, 则 $a > 3$,

同理可得 $f(x)$ 在 $(2, a-1)$ 上单调递减, 在 $(0, 2)$ 及 $(a-1, +\infty)$ 单调递增.

【标注】【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题；通过构造函数证明不等式；双变量问题；利
 用导数求函数的单调性、单调区间；已知单调性求参数的取值范围；函数零点的概念

4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+2)x + 2a\ln x (a > 0)$.
 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

【答案】 (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$;

当 $0 < a < 2$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, a)$, $(2, +\infty)$, $f(x)$ 的单调减区间为 $(a, 2)$;

当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, 2)$, $(a, +\infty)$, $f(x)$ 的单调减区间为 $(2, a)$.

【解析】 (1) $f'(x) = \frac{x^2 - (a+2)x + 2a}{x} = \frac{(x-2)(x-a)}{x}$, $x > 0$,

当 $a = 2$ 时, $f'(x) \geq 0$, $\therefore f(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$;

当 $0 < a < 2$ 时,

由 $f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0, a) \cup (2, +\infty)$,

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为 $(0, a)$, $(2, +\infty)$,

由 $f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (a, 2)$, $\therefore f(x)$ 的单调减区间为 $(a, 2)$;

当 $a > 2$ 时,

由 $f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0, 2) \cup (a, +\infty)$,

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为 $(0, 2)$, $(a, +\infty)$,

由 $f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (2, a)$, $\therefore f(x)$ 的单调减区间为 $(2, a)$,

综上所述, 当 $a = 2$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$;

当 $0 < a < 2$ 时,

$f(x)$ 的单调增区间为 $(0, a)$, $(2, +\infty)$, $f(x)$ 的单调减区间为 $(a, 2)$;

当 $a > 2$ 时,

$f(x)$ 的单调增区间为 $(0, 2)$, $(a, +\infty)$, $f(x)$ 的单调减区间为 $(2, a)$.

【标注】 【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间; 利用导数证明不等式能成立问题; 已知切线方程求参数; 导数的几何意义

5. 已知函数 $f(x) = -2(x+a)\ln x + x^2 - 2ax - 2a^2 + a$, 其中 $a > 0$.

设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 讨论 $g(x)$ 的单调性;

【答案】 (1) ① 当 $a \geq \frac{1}{4}$ 时, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

② 当 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时, $g(x)$ 在 $(0, \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2})$, $(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2})$ 上单调递减.

【解析】 (1) $f(x) = -2(x+a)\ln x + x^2 - 2ax - 2a^2 + a$ ($a > 0$) ($x > 0$),

$f'(x) = -2(\ln x + 1 + \frac{a}{x}) + 2x - 2a = g(x)$,

$g'(x) = (f'(x))' = -2(\frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}) + 2 = \frac{2(x^2 - x + a)}{x^2}$,

①当 $a \geq \frac{1}{4}$ 时, $g'(x) \geq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

②当 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时, 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2})$, $(\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2})$ 上单调递减.

【标注】【知识点】利用导数求函数的零点及个数; 利用导数证明不等式恒成立问题; 利用导数求函数的单调性、单调区间

6. 已知函数 $f(x) = -x^2 + a \ln x (a \in \mathbf{R})$.

若函数 $g(x) = f(x) - 2x + 2x^2$, 讨论函数 $g(x)$ 的单调性.

【答案】 (1) $a \leq 0$, 单调递增区间是 $(\frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}, +\infty)$,
单调递减区间是 $(0, \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2})$;
 $0 < a < \frac{1}{2}$, 单调递增区间 $(0, \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2})$,
 $(\frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}, +\infty)$,
单调递减区间是 $(\frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2})$;
 $a \geq \frac{1}{2}$, 单调递增区间 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间.

【解析】 (1) $g'(x) = 2x - 2 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - 2x + a}{x}$,
 $a \leq 0$, 单调递增区间是 $(\frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}, +\infty)$, 单调递减区间是 $(0, \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2})$;
 $0 < a < \frac{1}{2}$, 单调递增区间 $(0, \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2})$,
 $(\frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}, +\infty)$,
单调递减区间是 $(\frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2})$;
 $a \geq \frac{1}{2}$, 单调递增区间 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间.

【标注】【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题; 利用导数求函数的单调性、单调区间; 求在某点处的切线方程; 导数的几何意义

7. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a \ln(1-x)$, a 为常数.

讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

【答案】 (1) 当 $a \geq \frac{1}{4}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减;

当 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}, 1\right)$ 上单调递减,

$\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 上单调递增;

当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 上单调递减, $\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, 1\right)$ 上单调递增.

【解析】 (1) 函数的定义域为 $(-\infty, 1)$,

$$\text{由题意, } f'(x) = x - \frac{a}{1-x} = \frac{-x^2 + x - a}{1-x},$$

(i) 若 $a \geq \frac{1}{4}$, 则 $-x^2 + x - a \leq 0$, 于是 $f'(x) \leq 0$,

当且仅当 $a = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递减.

(ii) 若 $0 < a < \frac{1}{4}$, 由 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$ 或 $x = \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$,

当 $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}, 1\right)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in \left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}, 1\right)$ 单调递减,

$\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 单调递增.

(iii) 若 $a \leq 0$, 则 $x = \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2} \geq 1$,

当 $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in \left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, 1\right)$ 时, $f'(x) > 0$;

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 单调递减, $\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, 1\right)$ 单调递增.

综上, 当 $a \geq \frac{1}{4}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减;

当 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right), \left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}, 1\right)$ 上单调递减,
 $\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 上单调递增;
 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 上单调递减, $\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, 1\right)$ 上单调递增.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间; 导数与最值; 利用导数证明不等式恒成立问题; 通过构造函数证明不等式; 双变量问题; 导数与极值

二、含参函数的最值

8. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{a} - e^x (a > 0)$.
 求函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值;

【答案】 (1) 当 $0 < a \leq \frac{1}{e^2}$ 时, $f(x)_{\max} = f(2) = \frac{2}{a} - e^2$;
 当 $\frac{1}{e^2} < a < \frac{1}{e}$ 时, $f(x)_{\max} = f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a}$;
 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{a} - e$.

【解析】 (1) 因为 $f(x) = \frac{x}{a} - e^x (a > 0)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{a} - e^x$,
 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \ln \frac{1}{a}$,
 当 $x < \ln \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > \ln \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$,
 故函数 $f(x)$ 的增区间为 $\left(-\infty, \ln \frac{1}{a}\right)$; 减区间为 $\left(\ln \frac{1}{a}, +\infty\right)$.
 当 $\ln \frac{1}{a} \geq 2$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{e^2}$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增, 则
 $f(x)_{\max} = f(2) = \frac{2}{a} - e^2$;
 当 $1 < \ln \frac{1}{a} < 2$ 时, 即 $\frac{1}{e^2} < a < \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在区间 $\left[1, \ln \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增, 在区间 $\left(\ln \frac{1}{a}, 2\right]$ 上单调递减, 则 $f(x)_{\max} = f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a}$;
 当 $\ln \frac{1}{a} \leq 1$, 即 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减, 则
 $f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{a} - e$.

【标注】【知识点】函数零点存在定理; 利用导数求函数的最值; 双变量问题

9. 已知：函数 $f(x) = (x+1)^2 + 2k \ln x$.

当 $k > 0$ 时，记函数 $g(x)$ 在 $(0, 2]$ 上的最小值 .

【答案】 (1) 当 $0 < k < 4$ 时， $g(x)_{\min} = 4\sqrt{k} + 2$;

当 $k \geq 4$ 时， $g(x)_{\min} = 6 + k$.

【解析】 (1) $k > 0$ 时， $g(x) = f'(x) = 2(x+1) + \frac{2k}{x}$

$$= \frac{2(x^2 + x + k)}{x} ,$$

$$g'(x) = 2 - \frac{2k}{x^2} = \frac{2(x^2 - k)}{x^2} = \frac{2}{x^2}(x + \sqrt{k})(x - \sqrt{k}) ,$$

当 $0 < k < 4$ 时， $(0, \sqrt{k})$ ， $g'(x) < 0$ ， $(\sqrt{k}, +\infty)$ ， $g'(x) > 0$ ，

故 $g(\sqrt{k}) = 2(1 + \sqrt{k}) + 2\sqrt{k} = 4\sqrt{k} + 2$ 为最小值，

当 $k \geq 4$ 时， $(0, \sqrt{k})$ 上 $g'(x) < 0$ ，

故在 $g(2) = 6 + k$ 时， $g(x)$ 最小 .

【标注】 【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间；利用导数求函数的最值

10. 已知函数 $f(x) = \frac{a(x-1)}{x^2}$ ，其中 $a > 0$.

设 $g(x) = x \ln x - x^2 f(x)$ ，求 $g(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最大值 . (其中 e 为自然对数的底数)

【答案】 (1) 当 $0 < a < \frac{e}{e-1}$ 时， $g(x)$ 的最大值为 $g(e) = e + a - ae$ ，

当 $a \geq \frac{e}{e-1}$ 时， $g(x)$ 的最大值为 $g(1) = 0$.

【解析】 (1) $g(x) = x \ln x - a(x-1)$ ，

$$\text{则 } g'(x) = \ln x + 1 - a ,$$

$$\text{令 } g'(x) = 0 ,$$

$$\text{得 } x = e^{a-1} ,$$

$\therefore$ 在区间 $(0, e^{a-1})$ 上， $g(x)$ 为减函数，

在区间 $(e^{a-1}, +\infty)$ 上， $g(x)$ 为增函数 .

$$\text{当 } e^{a-1} \leq 1 ,$$

即 $0 < a \leq 1$ 时，在区间 $[1, e]$ 上， $g(x)$ 为递增函数，

$\therefore g(x)$ 的最大值为 $g(e) = e + a - ae$ ，

$$\text{当 } e^{a-1} \geq e ,$$

即 $a \geq 2$ 时，在区间 $[1, e]$ 上， $g(x)$ 为减函数，

$\therefore g(x)$ 的最大值为 $g(1) = 0$ ，

$$\text{当 } 1 < e^{a-1} < e ,$$

即 $1 < a < 2$ 时, $g(x)$ 的最大值为 $g(e)$ 和 $g(1)$ 中较大者,

$$g(e) - g(1) = a + e - ae > 0,$$

$$\text{解得 } a < \frac{e}{e-1},$$

$\therefore 1 < a < \frac{e}{e-1}$ 时, $g(x)$ 的最大值为 $g(e) = e + a - ae$,

$$\frac{e}{e-1} \leq a < 2 \text{ 时, } g(x) \text{ 的最大值为 } g(1) = 0.$$

综上所述, 当 $0 < a < \frac{e}{e-1}$ 时, $g(x)$ 的最大值为 $g(e) = e + a - ae$,

$$\text{当 } a \geq \frac{e}{e-1} \text{ 时, } g(x) \text{ 的最大值为 } g(1) = 0.$$

【标注】【知识点】求函数最值(含参指对型导函数); 求函数单调区间(含参二次型导函数)

11. 已知 $a > 0, a \neq 1$, 函数 $f(x) = a^x - 1, g(x) = -x^2 + x \ln a$.

求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上最大值.

【答案】 (1) $a > 1$ 时, 最大值为 $h(1) = a - \ln a$,

$$0 < a < 1 \text{ 时, 最大值为 } h(-1) = \frac{1}{a} + \ln a.$$

【解析】 (1) 由 (1) 知, 当 $a > 1$ 时, 函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数,

同理当 $0 < a < 1$ 时, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调增函数, 在 $(-\infty, 0)$ 上是单调减函数,

即当 $a > 0$, 且 $a \neq 1$ 时, $h(x)$ 在区间 $[-1, 0]$ 上是减函数, 在 $[0, 1]$ 上是增函数,

当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $h(x)$ 的最大值为 $h(-1)$ 和 $h(1)$ 中的最大值,

$$\therefore h(1) - h(-1) = (a - \ln a) - \left(\frac{1}{a} + \ln a\right) = a - \frac{1}{a} - 2\ln a,$$

$$\therefore \text{令 } G(a) = a - \frac{1}{a} - 2\ln a, a > 0,$$

$$\text{则 } G'(a) = 1 + \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} = \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 \geq 0,$$

$$\therefore G(a) = a - \frac{1}{a} - 2\ln a, \text{ 在 } a > 0 \text{ 时为增函数},$$

$$\therefore G(1) = 1 - 1 - 2\ln 1 = 0,$$

$$\therefore a > 1 \text{ 时, } G(a) > 0, \text{ 即 } h(1) > h(-1), \text{ 最大值为 } h(1) = a - \ln a,$$

$$0 < a < 1 \text{ 时, } G(a) < 0, \text{ 即 } h(-1) > h(1), \text{ 最大值为 } h(-1) = \frac{1}{a} + \ln a.$$

【标注】【知识点】求过某点的切线方程; 已知切线方程求参数; 导数的几何意义; 利用导数求函数的单调性、单调区间; 利用导数求函数的最值

12. 已知函数 $f(x) = ax - \ln(x+1), a \in \mathbf{R}$.

求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, e-1]$ 上的最小值 .

【答案】 (1) 当 $a \leq \frac{1}{e}$ 时, $f(x)_{\min} = a(e-1) - 1$.

当 $\frac{1}{e} < a < 1$ 时, $f(x)_{\min} = 1 - a + \ln a$.

当 $a \geq 1$ 时, $f(x)_{\min} = 0$.

【解析】 (1) 由题意可得 $f'(x) = a - \frac{1}{x+1}$.

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上为减函数,

$\therefore$ 在区间 $[0, e-1]$ 上, $f(x)_{\min} = f(e-1) = a(e-1) - 1$.

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = a - \frac{1}{x+1} = 0$, 则 $x = \frac{1}{a} - 1 \geq -1$,

① 当 $\frac{1}{a} - 1 \leq 0$ 时, 即 $a \geq 1$ 时, 对于 $x \in (0, e-1)$, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, e-1)$ 上为增函数,

$\therefore f(x)_{\min} = f(0) = 0$.

② 当 $\frac{1}{a} - 1 \geq e-1$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{e}$ 时,

对于 $x \in (0, e-1)$, $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, e-1)$ 上为减函数,

$\therefore f(x)_{\min} = f(e-1) = a(e-1) - 1$.

③ 当 $0 < \frac{1}{a} - 1 < e-1$, 即 $\frac{1}{e} < a < 1$ 时,

当 x 变化时, $f(x)$, $f'(x)$ 的变化情况如下表:

x	0	$\left(0, \frac{1}{a} - 1\right)$	$\frac{1}{a} - 1$	$\left(\frac{1}{a} - 1, e-1\right)$	$e-1$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	极小值	$\nearrow$	

$\therefore f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{a} - 1\right) = a\left(\frac{1}{a} - 1\right) - \ln \frac{1}{a} = 1 - a + \ln a$.

综上,

当 $a \leq \frac{1}{e}$ 时, $f(x)_{\min} = a(e-1) - 1$.

当 $\frac{1}{e} < a < 1$ 时, $f(x)_{\min} = 1 - a + \ln a$.

当 $a \geq 1$ 时, $f(x)_{\min} = 0$.

【标注】【知识点】求函数最值 (含参一次型导函数)

13. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2a+1)x^2 + (a^2+a)x$,

若 $a > -1$, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值 .

【答案】 (1) 当 $a \geq 1$ 或 $-1 < a < -\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时, $f(x)$ 在取得最大值 $f(1) = a^2 - \frac{1}{6}$; 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f(a) = \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2$,
 当 $a = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0, x = 1$ 处取得最大值 0,
 当 $-\frac{\sqrt{6}}{6} < a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得最大值 $f(0) = 0$.

【解析】 (1) 因为 $a > -1$, 所以 $a + 1 > 0$, 当 $a \geq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$, 对 $\forall x \in [0, 1]$ 成立, 所以当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f(1) = a^2 - \frac{1}{6}$ 当 $0 < a < 1$ 时, 在 $x \in (0, a)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 在 $x \in (a, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以当 $x = a$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f(a) = \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2$, 当 $a = 0$ 时, 在 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以所以 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f(0) = 0$, 当 $-1 < a < 0$ 时, 在 $x \in (0, a + 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 在 $x \in (a + 1, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 又 $f(0) = 0$, $f(1) = a^2 - \frac{1}{6}$, 当 $-1 < a < -\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得最大值 $f(1) = a^2 - \frac{1}{6}$, 当 $-\frac{\sqrt{6}}{6} < a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得最大值 $f(0) = 0$, 当 $a = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0, x = 1$ 处取得最大值 0, 综上所述, 当 $a \geq 1$ 或 $-1 < a < -\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时, $f(x)$ 在取得最大值 $f(1) = a^2 - \frac{1}{6}$; 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f(a) = \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2$, 当 $a = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0, x = 1$ 处取得最大值 0, 当 $-\frac{\sqrt{6}}{6} < a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得最大值 $f(0) = 0$.

【标注】【知识点】求函数最值 (含参二次型导函数)

14. 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a-x}{x}$, 其中 a 为常数, 且 $a > 0$.
 若函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值为 $\frac{1}{2}$, 求 a 的值.

【答案】 (1) $\sqrt{e}$.

【解析】 (1) $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{-x - (a-x)}{x^2} = \frac{x-a}{x^2}$,

① 当 $0 < a \leq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立,

此时, $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调增,

所以 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值为 $f(1) = \ln 1 + \frac{a-1}{1} = a-1 = \frac{1}{2}$,

解得 $a = \frac{3}{2} > 1$ ，不合题，舍去；

②当 $1 < a < 2$ 时，令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = a$ ，

$x, f(x), f'(x)$ 的变化如下表所示：

x	$(1, a)$	a	$(a, 2)$
$f(x)$	—	0	+
$f'(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值为 $f(a) = \ln a + \frac{a-a}{a} = \ln a = \frac{1}{2}$ ，解得

$a = \sqrt{e}$ ，合题；

③当 $a \geq 2$ 时， $f'(x) \leq 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立，

此时， $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调减，

所以 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值为 $f(2) = \ln 2 + \frac{a-2}{2} = \frac{1}{2}$ ，解得

$a = 3 - 2\ln 2 = 3 - \ln 4 < 2$ ，不合题；

综上 $a = \sqrt{e}$ 。

【标注】【知识点】已知最值情况求参数值或解析式

15. 已知函数 $f(x) = ax^2 - (a+2)x + \ln x$ 。

当 $a > 0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最小值为 -2 ，求 a 的取值范围。

【答案】 (1) $a \geq 1$ 。

【解析】 (1) 函数 $f(x) = ax^2 - (a+2)x + \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，

当 $a > 0$ 时， $f'(x) = 2ax - (a+2) + \frac{1}{x} (x > 0)$ ，

令 $f'(x) = 0$ ，即 $f'(x) = \frac{2ax^2 - (a+2)x + 1}{x}$ ，

$\therefore x = \frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{1}{a}$ 。

当 $0 < \frac{1}{a} \leq 1$ ，即 $a \geq 1$ 时， $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增，

$\therefore f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $f(1) = -2$ ；

当 $1 < \frac{1}{a} < e$ ，即 $\frac{1}{e} < a < 1$ 时，

$f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $f\left(\frac{1}{a}\right) < f(1) = -2$ ，不合题意；

当 $\frac{1}{a} \geq e$ ，即 $0 \leq a \leq \frac{1}{e}$ 时， $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减，

$\therefore f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $f(e) < f(1) = -2$ ，不合题意。

综上可得 $a \geq 1$ 。

【标注】【知识点】已知最值情况求参数范围；利用导数解决不等式恒成立问题

16. 设函数 $f(x) = (x-1)e^x - kx^2$ (其中 $k \in \mathbf{R}$) .

当 $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[0, k]$ 上的最大值 M .

【答案】 (1) 函数 $f(x)$ 在 $[0, k]$ 上的最大值 $M = f(k) = (k-1)e^k - k^3$.

【解析】 (1) $f(x) = (x-1)e^x - kx^2$, $x \in [0, k]$, $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

$f'(x) = xe^x - 2kx = x(e^x - 2k)$, $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = \ln(2k)$,

令 $\varphi(k) = k - \ln(2k)$, $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, $\varphi'(k) = 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k} \leq 0$,

所以 $\varphi(k)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 上是减函数,

$\therefore \varphi(1) \leq \varphi(k) < \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$,

$\therefore 1 - \ln 2 \leq \varphi(k) < \frac{1}{2} < k$.

即 $0 < \ln(2k) < k$.

所以 $f'(x)$, $f(x)$ 随 x 的变化情况如下表:

x	$(0, \ln(2k))$	$\ln(2k)$	$(\ln(2k), k)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$f(0) = -1$,

$f(k) - f(0)$

$= (k-1)e^k - k^3 - f(0)$

$= (k-1)e^k - k^3 + 1$

$= (k-1)e^k - (k^3 - 1)$

$= (k-1)e^k - (k-1)(k^2 + k + 1)$

$= (k-1)[e^k - (k^2 + k + 1)]$,

$\therefore k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$,

$\therefore k-1 \leq 0$.

对任意的 $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, $y = e^k$ 的图象恒在 $y = k^2 + k + 1$ 下方,

所以 $e^k - (k^2 + k + 1) \leq 0$,

所以 $f(k) - f(0) \geq 0$, 即 $f(k) \geq f(0)$,

所以函数 $f(x)$ 在 $[0, k]$ 上的最大值 $M = f(k) = (k-1)e^k - k^3$.

【标注】【知识点】求函数最值 (含参指对型导函数)

17. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 已知函数 $f(x) = a \ln x$, $g(x) = x^2 + bx + b$.

设 $F(x) = \frac{xf(x)}{a^2}$, 求 $F(x)$ 在 $[a, 2a]$ 上的最大值 $M(a)$.

【答案】 (1)
$$F(x) \begin{cases} \ln a, 0 < a < \frac{1}{4} \\ 2 \ln(2a), a \geq \frac{1}{4} \end{cases}.$$

【解析】 (1) 方法一: 由题知 $a > 0$, $F(x) = \frac{xf(x)}{a^2} = \frac{x \ln x}{a}$, 且 $F'(x) = \frac{1}{a}(1 + \ln x)$,

当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $F'(x) < 0$,

当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $F'(x) > 0$, 从而 $F(x)$ 的单调递增区间是 $(\frac{1}{e}, +\infty)$, 递减区间是 $(0, \frac{1}{e})$,

① 当 $2a \leq \frac{1}{e}$, 即 $a \leq \frac{1}{2e}$, $F(x)_{\max} = F(a) = \ln a$;

② 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $F(x)_{\max} = F(2a) = 2 \ln 2a$;

③ 当 $\frac{1}{2e} < a < \frac{1}{e}$ 时, $F(x)_{\max} = \max\{F(2a), F(a)\}$, 又

$$F(2a) - F(a) = \ln 4a^2 - \ln a = \ln 4a.$$

若 $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{e}$ 时, $F(2a) > F(a)$, $F(x)_{\max} = F(2a) = 2 \ln 2a$,

若 $\frac{1}{2e} < a \leq \frac{1}{4}$ 时, $F(2a) \leq F(a)$, 所以 $F(x)_{\max} = F(a) = \ln a$,

综上,
$$F(x)_{\max} = \begin{cases} \ln a, 0 < a < \frac{1}{4} \\ 2 \ln(2a), a \geq \frac{1}{4} \end{cases}.$$

方法二: 由题知 $a > 0$, $F'(x) = \frac{1}{a}(1 + \ln x)$, 当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $F'(x) < 0$,

当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $F'(x) > 0$, 从而 $F(x)$ 的单调递增区间是 $(\frac{1}{e}, +\infty)$, 递减区间是 $(0, \frac{1}{e})$,

从而, $F(x)_{\max} = \max\{F(2a), F(a)\}$,

$$\text{于是 } F(2a) - F(a) = \ln 4a^2 - \ln a = \ln 4a,$$

当 $a > \frac{1}{4}$ 时, $F(2a) > F(a)$, 所以 $F(x)_{\max} = F(2a) = 2 \ln 2a$, $F(x)_{\max} = F(2a)$,

当 $0 < a \leq \frac{1}{4}$ 时, $F(2a) \leq F(a)$, 所以 $F(x)_{\max} = F(a) = \ln a$,

综上,
$$F(x)_{\max} = \begin{cases} \ln a, 0 < a < \frac{1}{4} \\ 2 \ln(2a), a \geq \frac{1}{4} \end{cases}.$$

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题; 利用导数求函数的最值

18. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + (a-2)x$, $a \in \mathbf{R}$.

求 $f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的单调性最大值.

【答案】 (1) $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $\ln a - a^3 + a^2 - 2a$;

$\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $\frac{a}{4} - 1 - \ln 2$;

$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 1$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $2\ln a - a^5 + a^3 - 2a^2$.

【解析】 (1) $\because a^2 < a, \therefore 0 < a < 1$,

$$\begin{aligned} \text{由 (1) 知, } f'(x) &= \frac{1}{x} - 2ax + (a-2) \\ &= -\frac{(2x-1)(ax+1)}{x}, \end{aligned}$$

$\because x \in (0, +\infty), \therefore ax+1 > 0$,

当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, $x > \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

① $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上单增,

$\therefore f(x)_{\max} = f(a) = \ln a - a^3 + a^2 - 2a$;

② 当 $\begin{cases} a > \frac{1}{2} \\ a^2 < \frac{1}{2} \end{cases}$ 即 $\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,

$f(x)$ 在 $(a^2, \frac{1}{2})$ 上单调递增, $(\frac{1}{2}, a)$ 上单减,

$\therefore f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 - \frac{a}{4} + \frac{a-2}{2}$

$= \frac{a}{4} - 1 - \ln 2$;

③ $\frac{1}{2} \leq a^2$ 即 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 1$ 时,

$f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上单调递减,

$\therefore f(x)_{\max} = f(a^2) = 2\ln a - a^5 + a^3 - 2a^2$,

综上, $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $\ln a - a^3 + a^2 - 2a$;

$\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $\frac{a}{4} - 1 - \ln 2$;

$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 1$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $2\ln a - a^5 + a^3 - 2a^2$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值; 导数与单调性

三、综合创新

已知函数 $f(x) = e^{-x}(ax^2 + bx + 1)$ (其中 c 是常数, $a > 0, b \in \mathbf{R}$), 函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且 $f'(-1) = 0$.

当 $a > \frac{1}{5}$ 时, 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上最大值为 $4e$, 试求 a, b 的值.

【答案】 (1) $\frac{8e^2 - 3}{5}, \frac{12e^2 - 2}{5}$.

【解析】 (1) $f'(x) = [-ax^2 + (2a - b)x + b - 1]e^{-x}$,

由 $f'(1) = 0$, 得 $(-a - 2a + b + b - 1)e = 0$,

所以 $1 + 3a = 2b$,

则

$$f'(x) = \left[-ax^2 + \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\right)x + \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}\right]e^{-x} = -\frac{1}{2}e^{-x}[2ax - (3a - 1)](x + 1)$$

令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = -1$ 或 $x = \frac{3a - 1}{2a}$,

当 $-1 < \frac{3a - 1}{2a} \leq 1$, 即 $\frac{1}{5} < a \leq 1$ 时,

$x = \frac{3a - 1}{2a}$, $f(x)$ 取得最大值 $4e$,

$$\text{即有 } e^{-\frac{3a-1}{2a}} \left[a \left(\frac{3a-1}{2a} \right)^2 + \frac{3a+1}{2} \cdot \left(\frac{3a-1}{2a} \right) + 1 \right] < 4e,$$

故方程无解;

当 $\frac{3a - 1}{2a} > 1$, 即 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 递增,

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $4e$, 即有 $e^{-1}(a + b + 1) = 4e$,

又 $1 + 3a = 2b$,

$$\text{解得 } a = \frac{8e^2 - 3}{5}, b = \frac{12e^2 - 2}{5}.$$

【标注】【知识点】导数与最值; 导数的几何意义

20. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.

设 $F(x) = |f(x) - (x + a)|$ ($a \in \mathbf{R}$), 记 $F(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最大值为 $M(a)$, 当 $M(a)$ 最小时, 求 a 的值.

【答案】 (1) $a = -3$.

【解析】 (1) $F(x) = \left| \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x - x - a \right| = \left| \frac{1}{4}x^3 - x^2 - a \right|$,

由 (2) 知 $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$, $\therefore F(x) = |g(x) - a|$.

当 $x \in [-2, 4]$ 时, 由 (2) 知, $g(x) \in [-6, 0]$,

① 当 $a \geq 0$ 时, $F(x) = a - g(x)$, $\therefore F(x) \in [a, a+6]$, $\therefore$

$$M(a) = F(x)_{\max} = a + 6;$$

② 当 $a \leq -6$ 时, $F(x) = g(x) - a$, $\therefore F(x) \in [-6 - a, -a]$, $\therefore$

$$M(a) = F(x)_{\max} = -a;$$

③ 当 $-6 < a < 0$ 时,

$$M(a) = F(x)_{\max} = \max\{a+6, -a\} = \begin{cases} a+6, & -3 < a < 0 \\ 3, & a = -3 \\ -a, & -6 < a < -3 \end{cases}.$$

$$\text{综上, } M(a) = \begin{cases} a+6, & a > -3 \\ 3, & a = -3 \\ -a, & a < -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 当 $M(a)$ 取最小值 3 时, $a = -3$.

【标注】【知识点】直接求函数的最值（不含参）；利用导数解决不等式恒成立问题