

第二讲-含参函数的分类讨论练习题

一、含参函数的单调性

1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + \ln x$.
令 $g(x) = f(x) - bx - \frac{1+a}{2}x^2$, $a \in \mathbf{R}$, 讨论函数 $g(x)$ 的单调区间 .
2. 已知函数 $f(x) = (ax^2 + x + a)e^{-x}$ ($a \in \mathbf{R}$) .
若 $a \geq 0$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .
3. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+1)x + 2(a-1)\ln x$, $g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + (4-2a)\ln x$.
若 $a > 1$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性 .
4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+2)x + 2a\ln x$ ($a > 0$) .
讨论函数 $f(x)$ 的单调性 .
5. 已知函数 $f(x) = -2(x+a)\ln x + x^2 - 2ax - 2a^2 + a$, 其中 $a > 0$.
设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 讨论 $g(x)$ 的单调性 ;
6. 已知函数 $f(x) = -x^2 + a\ln x$ ($a \in \mathbf{R}$) .
若函数 $g(x) = f(x) - 2x + 2x^2$, 讨论函数 $g(x)$ 的单调性 .
7. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a\ln(1-x)$, a 为常数 .
讨论函数 $f(x)$ 的单调性 .

二、含参函数的最值

8. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{a} - e^x$ ($a > 0$) .
求函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值 ;
9. 已知 : 函数 $f(x) = (x+1)^2 + 2k\ln x$.
当 $k > 0$ 时, 记函数 $g(x)$ 在 $(0, 2]$ 上的最小值 .
10. 已知函数 $f(x) = \frac{a(x-1)}{x^2}$, 其中 $a > 0$.
设 $g(x) = x\ln x - x^2 f(x)$, 求 $g(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最大值 . (其中 e 为自然对数的底数)
11. 已知 $a > 0$, $a \neq 1$, 函数 $f(x) = a^x - 1$, $g(x) = -x^2 + x\ln a$.

求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上最大值 .

12. 已知函数 $f(x) = ax - \ln(x+1)$, $a \in \mathbf{R}$.

求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, e-1]$ 上的最小值 .

13. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2a+1)x^2 + (a^2+a)x$,

若 $a > -1$, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值 .

14. 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a-x}{x}$, 其中 a 为常数 , 且 $a > 0$.

若函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值为 $\frac{1}{2}$, 求 a 的值 .

15. 已知函数 $f(x) = ax^2 - (a+2)x + \ln x$.

当 $a > 0$ 时 , 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最小值为 -2 , 求 a 的取值范围 .

16. 设函数 $f(x) = (x-1)e^x - kx^2$ (其中 $k \in \mathbf{R}$) .

当 $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时 , 求函数 $f(x)$ 在 $[0, k]$ 上的最大值 M .

17. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 已知函数 $f(x) = a \ln x$, $g(x) = x^2 + bx + b$.

设 $F(x) = \frac{xf(x)}{a^2}$, 求 $F(x)$ 在 $[a, 2a]$ 上的最大值 $M(a)$.

18. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + (a-2)x$, $a \in \mathbf{R}$.

求 $f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的单调性最大值 .

三、 综合创新

19. 已知函数 $f(x) = e^{-x}(ax^2 + bx + 1)$ (其中 c 是常数 , $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$) , 函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且 $f'(-1) = 0$.

当 $a > \frac{1}{5}$ 时 , 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上最大值为 $4e$, 试求 a, b 的值 .

20. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.

设 $F(x) = |f(x) - (x+a)|$ ($a \in \mathbf{R}$) , 记 $F(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最大值为 $M(a)$, 当 $M(a)$ 最小时 , 求 a 的值 .