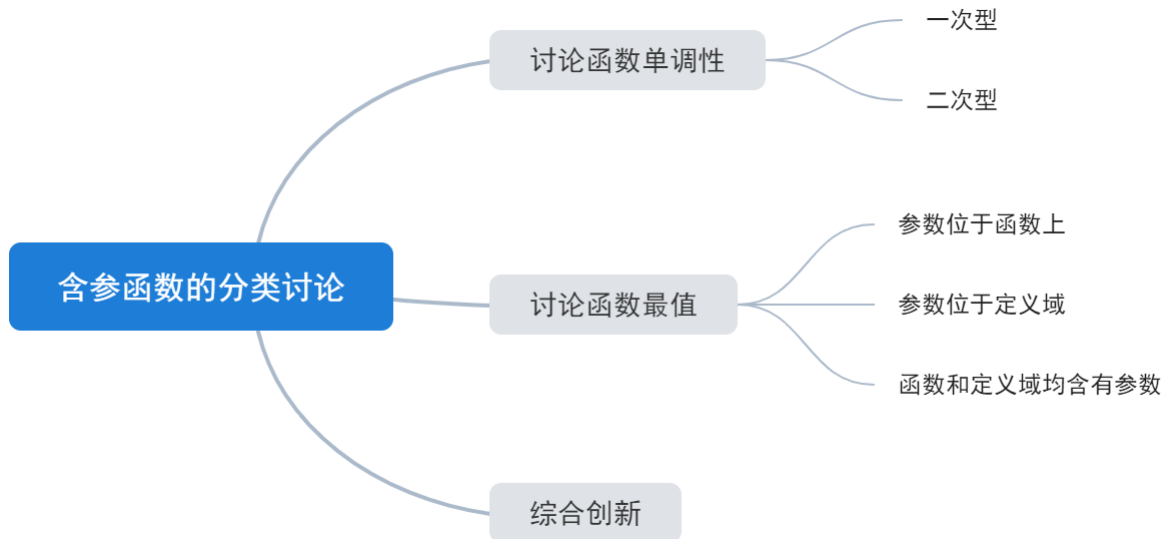


第二讲-含参函数的分类讨论

1. 知识梳理



一、含参函数的单调性

1. 真题分析

1. 设函数 $f(x) = (x-1)^3 - ax - b$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.
求 $f(x)$ 的单调区间;
2. 已知函数 $f(x) = 4x^3 + 3tx^2 - 6t^2x + t - 1$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $t \in \mathbf{R}$.
当 $t \neq 0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;
3. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - ax^2$, $x > 0$. ($f(x)$ 的图像连续不断)
求 $f(x)$ 的单调区间;

2. 思路总结

含参函数单调性讨论思路:

- 1、确定函数的定义域;
- 2、求导并且确定需要讨论部分以及其类型; 即 $f'(x) = e^x(x^2 - 2ax - 3a^2)$ 需要讨论部分为 $x^2 - 2ax - 3a^2$, 其类型为参数不在二次项系数上且可因式分解的类型

- 3、按照各种类型的讨论思路结合定义域进行讨论；讨论时需要考虑的点有定义域、开口方向、导数是否有零点、导数零点大小等等
- 4、写出单调区间以及极值情况；

3. 模拟演练

4. 设函数 $f(x) = ax - 2 - \ln x (a \in \mathbf{R})$.
当 $a > 0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间 .
5. 设函数 $f(x) = \frac{1-a}{2}x^2 + ax - \ln x (a \in \mathbf{R})$.
当 $a > 1$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性 .
6. 已知函数 $f(x) = \ln(ex) + \frac{1}{2}ax^2 + (a+1)x$ (e 为自然对数的底数) .
讨论 $f(x)$ 的单调性 .
7. 已知函数 $f(x) = ax - \frac{a}{x} - 2\ln x (a > 0)$.
讨论 $f(x)$ 的单调性 .
8. 已知 $f(x) = a(x - \ln x) + \frac{2x-1}{x^2}, a \in \mathbf{R}$.
讨论 $f(x)$ 的单调性 .
9. 已知 $a \neq 0$, 函数 $f(x) = |e^x - e| + e^x + ax$.
讨论 $f(x)$ 的单调性 .

二、含参函数的最值

1. 真题分析

10. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 - ax - a, x \in \mathbf{R}$, 其中 $a > 0$.
当 $a = 1$ 时, 设函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上的最大值为 $M(t)$, 最小值为 $m(t)$, 记 $g(t) = M(t) - m(t)$, 求函数 $g(t)$ 在区间 $[-3, -1]$ 上的最小值 .

2. 思路总结

含参函数最值讨论思路：

- 1、求导并且讨论函数单调性；
- 2、结合每种情况的单调性写出函数的最小值和最大值；如果函数取得最大值或者最小值有两种情况时，需要分别算出两处函数值作比较确定最大值或者最小值

3. 模拟演练

11. 已知函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)$, 其中 $a > 0$.

讨论并求出函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上的最大值 .

12. 设函数 $f(x) = ae^x + \frac{1}{ae^x} + b$ ($a > 0$) , 其中 e 是自然对数的底数 .

求 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内的最小值 .

13. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax - \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

令 $g(x) = f(x) - x^2$, 是否存在实数 a , 当 $x \in (0, e]$ (e 是自然常数) 时 , 函数 $g(x)$ 的最小值是 3 , 若存在 , 求出 a 的值 ; 若不存在 , 说明理由 ;

14. 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = (-x^2 + ax - 3)e^x$ (其中 a 实数 , e 是自然对数的底数) .

求 $f(x)$ 在区间 $[t, t+2]$ ($t > 0$) 上的最小值 .

15. 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax$ ($a > 0$) , $g(x) = bx^2 + 2b - 1$.

$h(x) = kx^2 + (1 - k^2)x - ax$ ($k < 0$) , 求函数 $G(x) = f(x) - h(x)$ 在区间 $[2k, -2k]$ 上的最小值 .

三、 综合创新

16. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax - a$, $a \in \mathbf{R}$.

记 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上最大值为 $M(a)$, 若 $M(a) > 1$, 求实数 a 的取值范围 .

17. 已知函数 $f(x) = \ln x$.

设 $h(x) = f(x) - k(x-1)$, 若 $h(x)$ 存在最大值 , 且当最大值大于 $2k - 2$ 时 , 确定实数 k 的取值范围 .

18. 已知函数 $f(x) = \frac{2ax + a^2 - 1}{x^2 + 1}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上存在最大值和最小值 , 求 a 的取值范围 .

19. 已知函数 $f(x) = (2x+1)e^x + ax$, $g(x) = |f(x)|$.

若 $g(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 求实数 a 的取值范围 .

20. 已知函数 $f(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + (1+a)x - \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$) .

当 $a = 0$ 时 , 设函数 $g(x) = xf(x)$. 若存在区间 $[m, n] \subseteq \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, 使得函数 $g(x)$ 在 $[m, n]$ 上的值域为 $[k(m+2) - 2, k(n+2) - 2]$, 求实数 k 的取值范围 .

