

第三讲-恒成立与能成立及零点问题练习题

一、恒成立与能成立问题

1. 已知函数 $f(x) = a \ln x - ax$, $g(x) = e^x - ax^2 + 3a$ (其中 e 是自然对数的底数, $e = 2.71828 \dots$) .

若函数 $g(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围 .

【答案】 (1) $a \in \left[-\frac{1}{3}, e^4\right]$.

【解析】 (1) $g'(x) = e^x - a$, $x \in [0, +\infty)$,

① 当 $a \leq 1$, $g'(x) \geq 0$ 恒成立, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单增,

$$\therefore g(x) \geq g(0) = 1 + 3a,$$

$$\therefore 1 + 3a \geq 0, \text{ 得 } -\frac{1}{3} \leq a \leq 1,$$

② 当 $a > 1$, $g(x)$ 在 $[0, \ln a)$ 上递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 递增,

$$\therefore x = \ln a \text{ 时, } g(x)_{\min} = g(\ln a) = 4a - a \ln a,$$

$$\therefore 4a - a \ln a > 0 \text{ 得 } 1 < a < e^4,$$

$$\text{综上所述, } a \in \left[-\frac{1}{3}, e^4\right].$$

【标注】 【知识点】 导数与最值; 通过构造函数证明不等式; 利用导数证明不等式恒成立问题; 利用导数求函数的单调性、单调区间

2. 已知函数 $f(x) = x(\ln x - k - 1)$, $k \in \mathbf{R}$.

若对于任意 $x \in [e, e^2]$, 都有 $f(x) < 4 \ln x$ 成立, 求实数 k 的取值范围 .

【答案】 (1) $\left(1 - \frac{8}{e^2}, +\infty\right)$.

【解析】 (1) $\therefore$ 对于任意 $x \in [e, e^2]$, 都有 $f(x) < 4 \ln x$ 成立 .

$$\therefore f(x) - 4 \ln x < 0 .$$

$$\text{即 } (x - 4) \ln x - (k + 1)x < 0, x \in [e, e^2] \text{ 恒成立 .}$$

$$\text{即 } k + 1 > \frac{(x - 4) \ln x}{x} \text{ 对于 } x \in [e, e^2] \text{ 恒成立 .}$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{(x - 4) \ln x}{x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{4 \ln x + x - 4}{x^2} .$$

$$\text{令 } t(x) = 4 \ln x + x - 4, x \in [e, e^2],$$

$$\begin{aligned}
 &\text{则 } t'(x) = \frac{4}{x} + 1 > 0, \\
 &\therefore t(x) \text{ 在 } [e, e^2] \text{ 上 } \uparrow. \\
 &g(x)_{\max} = g(e^2) = 2 - \frac{8}{e^2}. \\
 &\text{要使 } k+1 > \frac{(x-4)\ln x}{x} \text{ 对于 } x \in [e, e^2] \text{ 恒成立,} \\
 &\text{需 } k+1 > g(x)_{\max}, \text{ 即 } k+1 > 2 - \frac{8}{e^2}. \\
 &\therefore k \in \left(1 - \frac{8}{e^2}, +\infty\right).
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】导数与最值

3. 已知函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)$, $g(x) = e^x$.

设 $h(x) = f(x+1) + g(x)$, 当 $x \geq 0$, $h(x) \geq 1$ 时, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $(-\infty, 2]$.

【解析】 (1) $h(x) = f(x+1) + g(x) = \ln(x+1) - ax + e^x$,

$$h'(x) = e^x + \frac{1}{x+1} - a,$$

① 当 $a \leq 2$ 时, 由 (1) 知 $e^x \geq x+1$,

$$\text{所以 } h'(x) = e^x + \frac{1}{x+1} - a \geq x+1 + \frac{1}{x+1} - a \geq 2 - a \geq 0,$$

$h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增, $h(x) \geq h(0) = 1$ 恒成立, 符合题意;

$$\text{② 当 } a > 2 \text{ 时, 因为 } h''(x) = e^x - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 e^x - 1}{(x+1)^2} \geq 0,$$

所以 $h'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增, 且 $h'(0) = 2 - a < 0$,

则存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $h'(x_0) = 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上递增,

又 $h(x_0) < h(0) = 1$,

所以 $h(x) \geq 1$ 不恒成立, 不合题意,

综合①②可知, 所求实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

【标注】【知识点】导数的几何意义; 导数与单调性; 双变量问题; 通过构造函数证明不等式; 利用导数证明不等式恒成立问题; 导数与最值

4. 已知函数 $f(x) = ax + \frac{a-1}{x} + 1 - 2a - \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

若 $f(x) \geq 0$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上恒成立, 求正数 a 的取值范围.

【答案】 (1) a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

【解析】(1) $\because f(x) = ax + \frac{a-1}{x} + 1 - 2a - \ln x, x \in [1, +\infty)$, 则 $f(1) = 0$,

$$f'(x) = a - \frac{a-1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - x - (a-1)}{x^2} = \frac{a}{x^2}(x-1)\left(x - \frac{1-a}{a}\right)$$

①当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 此时 $\frac{1-a}{a} > 1$

当 $1 < x < \frac{1-a}{a}$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $\left[1, \frac{1-a}{a}\right]$ 上是减函数,

$\therefore$ 在 $\left(1, \frac{1-a}{a}\right)$ 上存在 x_0 ,

使得 $f(x_0) < f(1) < 0$, $f(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上不恒成立;

②当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1-a}{a} \leq 1$, $f'(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上成立,

$f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数,

$f(x) \geq f(1) = 0$, $f(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

综上所述, 所求 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间; 利用导数证明不等式恒成立问题; 通过构造函数证明不等式

5. 已知函数 $f(x) = x \cos x - \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

若 $a < \frac{\sin x}{x} < b$ 对 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立, 求 a 的最大值与 b 的最小值.

【答案】(1) a 的最大值为 $\frac{2}{\pi}$, b 的最小值为 1.

【解析】(1) 令 $g(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

则 $g'(x) = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2}$, 由 (1) 知, $g'(x) \leq 0$,

故 $g(x)$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 从而 $g(x)$ 的最小值为 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$, 从而

$$g(x) > g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi},$$

故 $a \leq \frac{2}{\pi}$, a 的最大值为 $\frac{2}{\pi}$.

令 $t(x) = \sin x - bx$,

“ $\frac{\sin x}{x} < b, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ”等价于“ $t(x) = \sin x - bx < 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ” (注意到 $t(0) = 0$)

当 $b \leq 0$ 时, $t(x) > 0$ 对任意 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立, 不符合题意.

当 $b > 0$ 时, $t'(x) = \cos x - b$.

若 $b \geq 1$, 则对任意 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $t'(x) = \cos x - b < 0$,

所以 $t(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减.

从而 $t(x) < t(0) = 0$ 对任意 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立.

若 $0 < b < 1$, 存在唯一的 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $t'(x_0) = \cos x_0 - b = 0$,

当 x 变化时, $t'(x)$, $t(x)$ 变化如下表:

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0, \frac{\pi}{2})$
$t'(x)$	+	0	-
$t(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

注意到 $t(x_0) > t(0) = 0$, 不符合题意.

所以 b 的最小值为1.

综上, a 的最大值为 $\frac{2}{\pi}$, b 的最小值为1.

【标注】【知识点】导数与单调性; 隐零点问题; 利用导数求函数的最值

6. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+2)x + 2a \ln x (a > 0)$.

设函数 $g(x) = -(a+2)x$, 若至少存在一个 $x_0 \in [e, 4]$, 使得 $f(x_0) > g(x_0)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $a > -\frac{2}{\ln 2}$.

【解析】 (1) 若至少存在一个 $x_0 \in [e, 4]$, 使得 $f(x_0) > g(x_0)$,

$$\therefore \frac{1}{2}x_0^2 + 2a \ln x_0 > 0,$$

当 $x_0 \in [e, 4]$ 时, $\ln x_0 > 1$,

$$\therefore 2a > -\frac{\frac{1}{2}x_0^2}{\ln x_0} \text{ 有解, 令 } h(x) = -\frac{\frac{1}{2}x^2}{\ln x},$$

$$\therefore 2a > h(x)_{\min},$$

$$\text{又 } h'(x) = -\frac{x \ln x - \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{x \left(\ln x - \frac{1}{2} \right)}{(\ln x)^2} < 0,$$

$\therefore h(x)$ 在 $[e, 4]$ 上单调递减,

$$\therefore h(x)_{\min} = h(4) = -\frac{4}{\ln 2},$$

$$\therefore 2a > -\frac{4}{\ln 2}, \text{ 即 } a > -\frac{2}{\ln 2}.$$

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间; 利用导数证明不等式能成立问题; 已知切线方程求参数; 导数的几何意义

7. 已知 $f(x) = a \sin x (a \in \mathbf{R})$, $g(x) = e^x$.

设 $F(x) = g(x) - mx^2 - 2(x+1) + k (k \in \mathbf{R})$, 对 $\forall x > 0$, $m < 0$, 有 $F(x) > 0$ 恒成立, 求 k 的最小值.

【答案】(1) 2.

【解析】(1) 由题意知, $F(x) = e^x - mx^2 - 2(x+1) + k (k \in \mathbf{R})$,

对 $\forall x > 0, m < 0$, 有 $F(x) > 0$ 恒成立,

$$F'(x) = e^x - 2mx - 2,$$

设 $u(x) = e^x - 2mx - 2$, 则 $u'(x) = e^x - 2m$,

由于 $m < 0$,

故 $u'(x) > 0$,

$x \in (0, +\infty)$ 时, $u(x)$ 单调递增, 又 $u(0) = -1, u(\ln 2) = -2m \ln 2 > 0$,

因此 $u(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 内存在唯一零点 x_0 ,

使 $u(x_0) = 0$,

$$\text{即 } e^{x_0} - 2mx_0 - 2 = 0,$$

且当 $x \in (0, x_0)$, $u(x) < 0, F'(x) < 0, F(x)$ 单调递减;

$x \in (x_0, +\infty)$, $u(x) > 0, F'(x) > 0, F(x)$ 单调递增.

$$\text{故 } F(x)_{\min} = F(x_0) = e^{x_0} - mx_0^2 - 2(x_0 + 1) + k > 0,$$

$$\text{故 } k > -e^{x_0} + \frac{e^{x_0} - 2}{2x_0} \cdot x_0^2 + 2(x_0 + 1) = \left(\frac{x_0}{2} - 1\right)e^{x_0} + x_0 + 2,$$

$$\text{设 } v(x) = \left(\frac{x}{2} - 1\right)e^x + x + 2, x \in (0, \ln 2),$$

$$v'(x) = e^x \cdot \frac{x-1}{2} + 1,$$

$$\text{又设 } t(x) = e^x \cdot \frac{x-1}{2} + 1, t'(x) = \frac{x}{2}e^x > 0,$$

故 $t(x)$ 在 $x \in (0, \ln 2)$ 上单调递增,

$$\text{因此 } t(x) > t(0) = \frac{1}{2} > 0,$$

即 $v'(x) > 0, v(x)$ 在 $x \in (0, \ln 2)$ 上单调递增,

$$v(x) \in (1, 2 \ln 2), \text{ 又 } 1 < 2 \ln 2 = \ln 4 < 2,$$

$$\therefore k \geq 2,$$

故所求 k 的最小值为 2.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间;利用导数证明不等式恒成立问题;利用导数求函数的最值

8. 已知函数 $f(x) = (ax^2 + x + a)e^{-x} (a \in \mathbf{R})$.

若对任意的 $a \leq 0, f(x) \leq b \ln(x+1)$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 b 的取值范围.

【答案】(1) $b \geq 1$.

【解析】(1) 令 $g(a) = e^{-x}(x^2 + 1)a + xe^{-x}, a \in (-\infty, 0]$,

当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $e^{-x}(x^2 + 1) \geq 0$,

$g(a)$ 单调递增, 则 $g(a)_{\max} = g(0) = xe^{-x}$,

则 $g(a) \leq b \ln(x+1)$ 对 $\forall a \in (-\infty, 0]$ 恒成立等价于 $b \ln(x+1) \geq g(a)_{\max} = g(0)$,

即 $xe^{-x} \leq b \ln(x+1)$,

对 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立.

① 当 $b \leq 0$ 时, $\forall x \in (0, +\infty)$, $b \ln(x+1) < 0$, $xe^{-x} > 0$,

此时 $xe^{-x} > b \ln(x+1)$, 不合题意, 舍去.

② 当 $b > 0$ 时, 令 $h(x) = b \ln(x+1) - xe^{-x}$, $x \in [0, +\infty)$,

$$\text{则 } h'(x) = \frac{b}{x+1} - (e^{-x} - xe^{-x}) = \frac{be^x + x^2 - 1}{(x+1)e^x},$$

其中 $(x+1)e^x > 0$, $\forall x \in [0, +\infty)$,

令 $p(x) = be^x + x^2 - 1$, $x \in [0, +\infty)$,

则 $p(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

1° 当 $b \geq 1$ 时, $p(x) \geq p(0) = b - 1 \geq 0$,

所以对 $\forall x \in [0, +\infty)$, $h'(x) \geq 0$,

则 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

故对任意 $x \in [0, +\infty)$, $h(x) \geq h(0) = 0$,

即不等式 $b \ln(x+1) \geq xe^{-x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 满足题意;

2° 当 $0 < b < 1$ 时, 由 $p(0) = b - 1 < 0$, $p(1) = be > 0$ 及 $p(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以存在唯一的 $x_0 \in (0, 1)$ 使得 $p(x_0) = 0$,

且 $x \in (0, x_0)$ 时, $p(x) < 0$.

即 $h'(x) < 0$,

所以 $h(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 上单调递减,

则 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < h(0) = 0$,

即 $b \ln(x+1) < xe^{-x}$, 不符合题意.

综上所述, $b \geq 1$.

【标注】【知识点】导数的几何意义; 求在某点处的切线方程; 利用导数证明不等式恒成立问题; 利用导数求函数的单调性、单调区间

二、零点问题

9. 已知函数 $f(x) = x - \ln(x+a)$ 在 $x=1$ 处取得极值.

若关于 x 的方程 $f(x) + 2x = x^2 + b$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上恰有两个不相等的实数根, 求实数 b 的取值范围;

【答案】 (1) $\frac{5}{4} + \ln 2 \leq b < 2$.

【解析】 (1) 由 (1) 知 $f(x) = x - \ln x$,

$\therefore$ 由 $f(x) + 2x = x^2 + b$ 得 $x - \ln x + 2x = x^2 + b$, 得 $x^2 - 3x + \ln x + b = 0$,

设 $g(x) = x^2 - 3x + \ln x + b (x > 0)$, 则

$$g'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x} = \frac{(2x-1)(x-1)}{x},$$

当 x 变化时, $g'(x)$, $g(x)$ 的变化情况如下表:

x	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	1	$(1, 2)$	2
$g'(x)$	+	0	-	0	+	+
$g(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	$b - 2 + \ln 2$

当 $x=1$ 时, $g(x)_{\text{最小值}} = g(1) = b - 2$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = b - \ln 2 - \frac{5}{4}$,

$g(2) = b - 2 + \ln 2$,

$\therefore$ 方程 $f(x) + 2x = x^2 + b$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上恰有两个不相等的实数根, 由

$$\begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ g(1) < 0 \\ g(2) \geq 0 \end{cases} \text{得, } \begin{cases} b - \frac{5}{4} - \ln 2 \geq 0 \\ b - 2 < 0 \\ b - 2 + \ln 2 \geq 0 \end{cases} \quad \frac{5}{4} + \ln 2 \leq b < 2.$$

【标注】 【知识点】通过构造函数证明不等式; 已知极值情况求函数解析式; 导数与最值; 函数零点存在定理; 已知零点情况求参数的取值范围

10. 设函数 $f(x) = \ln(x-1) + ax^2 + x + 1$, $g(x) = (x-1)e^x + ax^2$, $a \in \mathbb{R}$.

若函数 $g(x)$ 有两个零点, 试求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $(0, +\infty)$.

【解析】 (1) 函数 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 由已知得 $g'(x) = x(e^x + 2a)$.

① 当 $a=0$ 时, 函数 $g(x) = (x-1)e^x$ 只有一个零点;

② 当 $a > 0$, 因为 $e^x + 2a > 0$,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$.

所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $g(0) = -1$, $g(1) = a$,

因为 $x < 0$, 所以 $x - 1 < 0, e^x < 1$, 所以 $e^x(x - 1) > x - 1$, 所以

$$g(x) > ax^2 + x - 1$$

$$\text{取 } x_0 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4a}}{2a}, \text{ 显然 } x_0 < 0 \text{ 且 } g(x_0) > 0$$

$$\text{所以 } g(0)g(1) < 0, g(x_0)g(0) < 0.$$

由零点存在性定理及函数的单调性知, 函数有两个零点.

③当 $a < 0$ 时, 由 $g'(x) = x(e^x + 2a) = 0$, 得 $x = 0$, 或 $x = \ln(-2a)$.

i) 当 $a < -\frac{1}{2}$, 则 $\ln(-2a) > 0$.

当 x 变化时, $g'(x), g(x)$ 变化情况如下表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \ln(-2a))$	$\ln(-2a)$	$(\ln(-2a), +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$		$\nearrow$

注意到 $g(0) = -1$, 所以函数 $g(x)$ 至多有一个零点, 不符合题意.

ii) 当 $a = -\frac{1}{2}$, 则 $\ln(-2a) = 0$, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增, 函数 $g(x)$ 至多有一个零点, 不符合题意.

若 $a > -\frac{1}{2}$, 则 $\ln(-2a) \leq 0$.

当 x 变化时, $g'(x), g(x)$ 变化情况如下表:

x	$(-\infty, \ln(-2a))$	$\ln(-2a)$	$(\ln(-2a), 0)$	0	$(0, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	-1	$\nearrow$

注意到当 $x < 0, a < 0$ 时, $g(x) = (x - 1)e^x + ax^2 < 0$, $g(0) = -1$, 所以函数 $g(x)$ 至多有一个零点, 不符合题意.

综上, a 的取值范围是 $(0, +\infty)$.

【标注】【知识点】二阶导问题; 通过构造函数证明不等式; 求参数范围 (含参指对型导函数)

11. 已知函数 $f(x) = \frac{2}{x} + a \ln x - 2 (a > 0)$.

记 $g(x) = f(x) + x - b (b \in \mathbf{R})$, 当 $a = 1$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $[e^{-1}, e]$ 上有两个零点, 求实数 b 的取值范围.

【答案】 (1) $\left(1, \frac{2}{e} + e - 1\right]$.

【解析】 (1) 依题得 $g(x) = \frac{2}{x} + \ln x + x - 2 - b$,
则 $g'(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2}$,

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 为减函数,

当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 为增函数,

又 $\because g(x)$ 在区间 $[e^{-1}, e]$ 上有两个零点,

$$\therefore \begin{cases} g(e^{-1}) \geq 0 \\ g(e) \geq 0 \\ g(1) < 0 \end{cases},$$

解得 $1 < b \leq \frac{2}{e} + e - 1$,

$\therefore b$ 的取值范围为 $\left(1, \frac{2}{e} + e - 1\right]$.

【标注】【知识点】求参数范围 (含参二次型导函数); 利用导数解决不等式恒成立问题

12. 设函数 $f(x) = e^{ax} (a \in \mathbf{R})$.

若函数 $h(x) = \frac{x^2}{f(x)} - 1$ 在区间 $(0, 16)$ 内有两个零点, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $\frac{\ln 2}{2} < a < \frac{2}{e}$

【解析】 (1) (1) 当 $a = 0$ 时, $h(x) = x^2 - 1$, 显然在区间 $(0, 16)$ 内没有两个零点, 不符合题意.

$$(2) \text{ 当 } a \neq 0 \text{ 时, } h(x) = \frac{x^2}{e^{ax}} - 1, h'(x) = \frac{(2x - ax^2)e^{ax}}{e^{2ax}} = \frac{-ax(x - \frac{2}{a})}{e^{ax}}.$$

① 当 $a < 0$ 且 $x \in (0, 16)$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 在区间 $(0, 16)$ 上单调递增, 所以函数 $h(x)$ 在区间 $(0, 16)$ 内不可能有两个零点, 不符合题意;

② 当 $a > 0$ 时, 令 $h'(x) = 0$, 得 $x = 0$, $x = \frac{2}{a}$,

x 与 $h'(x)$ 、 $h(x)$ 之间的关系如下表:

x	$\left(0, \frac{2}{a}\right)$	$\frac{2}{a}$	$\left(\frac{2}{a}, +\infty\right)$
$h'(x)$	+	-	+
$h(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

因为 $h(0) = -1$, 若 $h(x)$ 在区间 $(0, 16)$ 内有两个零点,

$$\text{则 } \begin{cases} h\left(\frac{2}{a}\right) > 0 \\ \frac{2}{a} < 16 \\ h(16) < 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{4}{e^{2a^2}} - 1 > 0 \\ a > \frac{1}{8} \\ \frac{2^8}{e^{16a}} - 1 < 0 \end{cases}, \text{ 化简 } \begin{cases} 0 < a < \frac{2}{e} \\ a > \frac{1}{8} \\ a > \frac{\ln 2}{2} \end{cases},$$

$$\text{因为 } \frac{1}{8} < \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow 1 < 4 \ln 2 \Leftrightarrow 1 < \ln 16 \Leftrightarrow e < 16,$$

$$\frac{2}{e} > \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow 4 > e \ln 2 \Leftrightarrow 4 > e > e \ln 2,$$

综上所述, 当 $\frac{\ln 2}{2} < a < \frac{2}{e}$ 时, 函数 $h(x) = \frac{x^2}{f(x)} - 1$ 在区间 $(0, 16)$ 内有两个零点.

【标注】【知识点】求参数范围(含参二次型导函数)

13. 已知函数 $f(x) = \frac{ae^x}{x^2} (a \neq 0)$.

设 $g(x) = f(x) - \frac{2}{x} - \ln x$, 若 $g(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 上有两个极值点, 求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $(\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e})$.

【解析】(1) 方法一:

$$g(x) = \frac{ae^x}{x^2} - \frac{2}{x} - \ln x$$
$$g'(x) = \frac{axe^x - 2ae^x}{x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{(ae^x - x)(x - 2)}{x^3}$$

当 $x \in (0, 2)$ 时, $x - 2 < 0$, $x^3 > 0$

若 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有两个极值点, $g'(x)$ 在 $(0, 2)$ 上至少有两零点,

即方程 $ae^x - x = 0$ 在 $(0, 2)$ 上至少有两个不等实根,

即方程 $a = \frac{x}{e^x}$ 在 $(0, 2)$ 上至少有两个不等实根,

$$\text{设 } F(x) = \frac{x}{e^x} (x \in (0, 2)), F'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

解 $F'(x) = 0$ 的 $x = 1$

$F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单增, 在 $(1, 2)$ 上单减,

所以 $F(x)$ 在 $(0, 2)$ 上的最大值为 $F(1) = \frac{1}{e}$,

$$\text{又 } F(0) = 0, F(2) = \frac{2}{e^2},$$

所以要使方程 $a = \frac{x}{e^x}$ 有两个不等实根,

a 的取值范围为 $(\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e})$ 设 $h(x) = ae^x - x$, 解 $h'(x) = ae^x - 1 = 0$ 得 $x = \ln \frac{1}{a}$

当 $a \in (\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e})$ 时, $x = \ln \frac{1}{a} \in (0, 2)$,

且 $h(x)$ 在 $(0, \ln \frac{1}{a})$ 单调递减; 在 $(\ln \frac{1}{a}, 2)$ 单调递增.

设 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 为方程 $ae^x - x = 0$ 的两个不等实根,

则在 $(0, x_1)$ 上 $h(x) > 0$, 在 (x_1, x_2) 上 $h(x) < 0$, 在 $(x_2, 2)$ 上 $h(x) > 0$,

所以在 $(0, x_1)$ 上 $g(x) < 0$, 在 (x_1, x_2) 上 $g(x) > 0$,

在 $(x_2, 2)$ 上 $g(x) < 0$, 即 x_1, x_2 为 $g(x)$ 的两个极值点,

综上所述, $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 内存在两个极值点时, a 的取值范围为 $(\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e})$.

方法二:

$$g(x) = \frac{ae^x}{x^2} - \frac{2}{x} - \ln x,$$
$$g'(x) = \frac{axe^x - 2ae^x}{x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{(ae^x - x)(x - 2)}{x^3}$$

因为 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有两个极值点, 所以 $g'(x)$ 在 $(0, 2)$ 上至少有两零点,

所以方程 $ae^x - x = 0$, 即方程 $\frac{1}{a}x = e^x$ 在 $(0, 2)$ 上至少有两个不等实根 ,

所以直线 $y = \frac{1}{a}x$ 与曲线 $h(x) = e^x$ 在 $(0, 2)$ 上有两个不同的交点

因为 $h(2) = e^2$, 所以过点 $P(2, e^2)$ 和 $O(0, 0)$ 的直线的斜率 $k_1 = \frac{e^2}{2}$

设过点 $O(0, 0)$ 的直线 l 与曲线 $h(x) = e^x$ 相切于点 (x_0, e^{x_0})

因为 $h'(x) = e^x$, 所以直线 l 的斜率 $k_0 = e^{x_0}$

所以直线 l 的方程为 $y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$

因为直线 l 过点 $O(0, 0)$, 所以 $x_0 = 1$, 所以 $k_0 = e$

因为直线 $y = \frac{1}{a}x$ 与曲线 $h(x) = e^x$ 在 $(0, 2)$ 上有两个不同的交点

所以 $e < \frac{1}{a} < \frac{e^2}{2}$, 即 $\frac{2}{e^2} < a < \frac{1}{e}$

设 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 为直线 $y = \frac{1}{a}x$ 与曲线 $h(x) = e^x$ 在 $(0, 2)$ 上两个交点的横坐标 ,

显然在 $(0, x_1)$ 上 $e^x - \frac{1}{a}x > 0$, 在 (x_1, x_2) 上 $e^x - \frac{1}{a}x < 0$, 在 $(x_2, 2)$ 上

$e^x - \frac{1}{a}x > 0$

所以在 $(0, x_1)$ 上 $g(x) < 0$, 在 (x_1, x_2) 上 $g(x) > 0$, 在 $(x_2, 2)$ 上 $g(x) < 0$

即 x_1, x_2 为 $g(x)$ 的两个极值点

所以当 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 内有两个极值点时 , a 的取值范围为 $(\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e})$.

方法三 :

$$g(x) = \frac{ae^x}{x^2} - \frac{2}{x} - \ln x$$

$$g'(x) = \frac{axe^x - 2ae^x}{x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{(ae^x - x)(x - 2)}{x^3}$$

当 $a < 0$ 时 , 在区间 $(0, 2)$ 上 , $ae^x - x < 0$, $x - 2 < 0$, $x^3 > 0$

所以 $g'(x) > 0$

从而 $g(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 上是增函数 , 故 $g(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 上无极值点 ;

当 $a > 0$ 时 , 设 $h(x) = ae^x - x$, $x \in (0, 2)$

若 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有两个极值点 , $g'(x)$ 在 $(0, 2)$ 上至少有两零点 ,

即 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上至少有两零点

$$h'(x) = ae^x - 1$$

$$\text{令 } h'(x) = 0 \text{ 得 } x = \ln \frac{1}{a}$$

当 $\ln \frac{1}{a} < 0$ 即 $a > 1$ 时 , $x \in (0, 2)$, $h'(x) = ae^x - 1 > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $x \in (0, 2)$ 单调递增 , $h(x) > h(0) = a > 0$

故 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 内不存在两个极值点 .

当 $\ln \frac{1}{a} > 2$ 即 $0 < a < \frac{1}{e^2}$ 时 ,

$x \in (0, 2)$, $h'(x) = ae^x - 1 < 0$,

所以 $h(x)$ 在 $x \in (0, 2)$ 单调递减 , $h(0) = a > 0$, $h(2) = ae^2 - 2 < 1 - 2 < 0$

所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上只有一个零点 x_0 ,

$x \in (0, x_0)$, $g'(x) < 0$, $x \in (x_0, 2)$, $g'(x) > 0$

所以 $x \in (0, x_0)$, $g(x)$ 单调增, $x \in (x_0, 2)$, $g(x)$ 单调减

所以 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上只有一个极值点 ($g(x)$ 在 $(0, 2)$ 内不存在两个极值点)

当 $0 < \ln \frac{1}{a} < 2$ 即 $\frac{1}{e^2} < a < 1$ 时,

$x \in (0, \ln \frac{1}{a})$ 时, $h'(x) < 0$, $x \in (\ln \frac{1}{a}, 2)$, $h'(x) > 0$

所以 $x \in (0, \ln \frac{1}{a})$ 时, 函数 $h(x)$ 单调递减;

$x \in (\ln \frac{1}{a}, 2)$, 函数 $h(x)$ 单调递增.

所以函数 $h(x)$ 的最小值为 $h(\ln \frac{1}{a}) = ae^{\ln \frac{1}{a}} - \ln \frac{1}{a}$.

函数 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 内存在两个极值点

当且仅当 $\begin{cases} h(0) > 0 \\ h(\ln \frac{1}{a}) < 0 \\ h(2) > 0 \end{cases}$ 解得 $\frac{2}{e^2} < a < \frac{1}{e}$.

综上所述, 函数 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 内存在两个极值点时, a 的取值范围为 $(\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e})$.

【标注】【知识点】直接求函数的单调性 (不含参); 已知极值情况求参数范围

14. 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = (-x^2 + ax - 3)e^x$ (其中 a 实数, e 是自然对数的底数).

若存在 $x_1, x_2 \in [e^{-1}, e] (x_1 \neq x_2)$, 使方程 $g(x) = 2e^x f(x)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $\left[4, e + 2 + \frac{3}{e}\right]$.

【解析】 (1) 由 $g(x) = 2e^x f(x)$ 可得 $2x \ln x = -x^2 + ax - 3$,

$$a = x + 2 \ln x + \frac{3}{x},$$

$$\text{令 } h(x) = x + 2 \ln x + \frac{3}{x}, \quad h'(x) = 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{x^2}$$

x	$\left(\frac{1}{e}, 1\right)$	1	$(1, e)$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	单调递减	极小值 (最小值)	单调递增

$$h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} + 3e - 2, \quad h(1) = 4, \quad h(e) = \frac{3}{e} + e + 2,$$

$$h(e) - h\left(\frac{1}{e}\right) = 4 - 2e + \frac{2}{e} < 0,$$

则实数 a 的取值范围为 $\left[4, e + 2 + \frac{3}{e}\right]$.

【标注】【知识点】求在某点处的切线方程; 导数的几何意义; 利用导数求函数的最值; 已知零点或根情况求参数范围

15. 已知函数 $f(x) = 2e^x - ax^2 - 2x - 2$.

(1) 当 $a \leq 0$ 时, 求证: 函数 $f(x)$ 有且只有一个零点.

(2) 当 $a > 0$ 时, 写出函数 $f(x)$ 的零点的个数. (只需写出结论)

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 有两个零点.

当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 有一个零点;

当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有两个零点.

【解析】 (1) 当 $a \leq 0$ 时, 令 $g(x) = f'(x) = 2e^x - 2ax - 2$, 则 $g'(x) = 2e^x - 2a > 0$,

故 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

由 $g(0) = 0$,

故当 $x < 0$ 时, $g(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $g(x) > 0$.

即当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)$

由 $f(0) = 0$,

故 $f(x)$ 有且仅有一个零点.

(2) 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 有两个零点.

当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 有一个零点;

当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有两个零点.

【标注】【知识点】求函数零点 (含参三角型导函数)

16. 已知 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1 (a > 0)$, 定义 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq g(x) \\ g(x), & f(x) < g(x) \end{cases}$.

若 $g(x) = \ln x$, 试讨论函数 $h(x) (x > 0)$ 的零点个数.

【答案】 (1) 当 $0 < a < 2$ 时, $h(x)$ 有两个零点,

当 $a = 2$ 时, $h(x)$ 有一个零点,

当 $a > 2$ 时, $h(x)$ 无零点.

【解析】 (1) 由 (1) 知, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 $f\left(\frac{2}{a}\right) = 1 - \frac{4}{a^2}$,

① 当 $1 - \frac{4}{a^2} > 0$, 即 $a > 2$ 时,

$f(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

$\therefore h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点；

② 当 $1 - \frac{4}{a^2} = 0$ ，即 $a = 2$ 时，

$f(x)_{\min} = f(1) = 0$ ，又 $g(1) = 0$ ，

$\therefore h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 在 $(0, +\infty)$ 有一个零点，

③ 当 $1 - \frac{4}{a^2} < 0$ ，即 $0 < a < 2$ 时，

设 $\varphi(x) = f(x) - g(x) = ax^3 - 3x^2 + 1 - \ln x (0 < x < 1)$ ，

$\therefore \varphi'(x) = 3ax^2 - 6x - \frac{1}{x} < 6x(x-1) - \frac{1}{x} < 0$ ，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，

$\therefore \varphi(1) = a - 2 < 0$ ， $\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{a}{e^3} + \frac{2e^2 - 3}{e^2} > 0$ ，

$\therefore$ 存在唯一的 $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ ，使得 $\varphi(x_0) = 0$ 。

(i) 当 $0 < x \leq x_0$ 时，

$\therefore \varphi(x) = f(x) - g(x) \geq \varphi(x_0) = 0$ ，

$\therefore h(x) = f(x)$ 且 $h(x)$ 为减函数，

又 $h(x_0) = f(x_0) = g(x_0) = \ln x_0 < \ln 1 = 0$ ，

$\therefore f(0) = 1 > 0$ ， $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 有一个零点；

(ii) 当 $x > x_0$ 时，

$\therefore \varphi(x) = f(x) - g(x) < \varphi(x_0) = 0$ ，

$\therefore h(x) = g(x)$ 且 $h(x)$ 为增函数，

$\therefore g(1) = 0$ ，

$\therefore h(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上有一个零点，

$\therefore h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个零点，

综上所述，当 $0 < a < 2$ 时， $h(x)$ 有两个零点，

当 $a = 2$ 时， $h(x)$ 有一个零点，

当 $a > 2$ 时， $h(x)$ 无零点。

【标注】【知识点】求解函数极值；利用导数求函数的单调性、单调区间；零点的个数问题；函数零点的概念

三、综合创新

17. (改编自2010新课标理21) 函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$ ，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) \geq 0$ ，求 a 的取值范围。

【答案】 $a \leq \frac{1}{2}$.

【解析】 经验证 $f(0) = 0$, 故使得题目成立的一个必要条件是 $f'(0) \geq 0$,

求导得: $f'(x) = e^x - 1 - 2ax$, 此时 $f'(0) = 0$.

令 $g(x) = f'(x) = e^x - 1 - 2ax$, 故还需要满足 $g'(0) \geq 0$.

求导得: $g'(x) = f''(x) = e^x - 2a$, $g'(0) \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{1}{2}$.

下面论证其充分性 (反证法) :

若 $a > \frac{1}{2}$, 则 $g'(x) = 0 \Rightarrow x = \ln 2a$, 故 $g(x)$ 在 $[0, \ln 2a]$ 上单调递减, 所以当

$x \in [0, \ln 2a]$ 时, $g(x) < g(0) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $[0, \ln 2a]$ 上单调递减, 因此

$f(\ln 2a) < f(0) = 0$, 这与 $f(x) \geq 0$ 恒成立矛盾. 故假设不成立.

综上所述, a 的取值范围是 $a \leq \frac{1}{2}$.

【标注】 【知识点】单调性

【知识点】解析法

【知识点】已知单调性求参数的取值范围

【知识点】利用公式和四则运算法则求导

【特色题型】新定义

【素养】逻辑推理

【素养】数学抽象

18. 已知函数 $f(x) = (2-a)(x-1) - 2\ln x$, $g(x) = xe^{1-x}$ ($a \in \mathbf{R}$, e 为自然对数的底数) .

若对任意给定的 $x_0 \in (0, e]$, 在 $(0, e]$ 上总存在两个不同的 x_i ($i = 1, 2$) , 使得 $f(x_i) = g(x_0)$ 成立, 求 a 的取值范围 .

【答案】 (1) $\left(-\infty, 2 - \frac{3}{e-1}\right]$

【解析】 (1) $g'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$.

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, e]$ 时, $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减.

$\because g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $g(e) = e \cdot e^{1-e} > 0$, 所以函数 $g(x)$ 在 $(0, e]$ 上的值域为 $(0, 1]$

当 $a = 2$ 时, $f(x) = -2\ln x$, 不合题意;

当 $a \neq 2$ 时, $f'(x) = 2 - a - \frac{2}{x} = \frac{(2-a)x - 2}{x} = \frac{(2-a)(x - \frac{2}{2-a})}{x}$,

$x \in (0, e]$,

故必须满足 $0 < \frac{2}{2-a} < e, a < 2 - \frac{2}{e}$. ①

当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下:

x	$\left(0, \frac{2}{2-a}\right)$	$\frac{2}{2-a}$	$\left(\frac{2}{2-a}, e\right]$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	最小值	单调递增

$\because x \rightarrow 0, f(x) \rightarrow +\infty, f\left(\frac{2}{2-a}\right) = a - 2 \ln \frac{2}{2-a},$

$f(e) = (2-a)(e-1) - 2,$

$\therefore$ 对任意给定的 $x_0 \in (0, e]$, 在区间 $(0, e]$ 上总存在两个不同的 $x_i (i = 1, 2)$, 使得

$f(x_i) = g(x_0)$ 成立,

当且仅当满足下列条件 $\begin{cases} f\left(\frac{2}{2-a}\right) \leq 0, \\ f(e) \geq 1, \end{cases}$

即 $a - 2 \ln \frac{2}{2-a} \leq 0,$ ②

$(2-a)(e-1) - 2 \geq 1,$ ③

令 $h(a) = a - 2 \ln \frac{2}{2-a}, a \in \left(-\infty, 2 - \frac{2}{e}\right),$

$h'(a) = 1 - 2[\ln 2 - \ln(2-a)]' = 1 - \frac{2}{2-a} = \frac{a}{a-2}.$

令 $h'(a) = 0$, 得 $a = 0,$

当 $a \in (-\infty, 0)$ 时, $h'(a) > 0$, 函数 $h(a)$ 单调递增;

当 $a \in \left(0, 2 - \frac{2}{e}\right)$ 时, $h'(a) < 0$, 函数 $h(a)$ 单调递减.

所以, 对任意 $a \in \left(-\infty, 2 - \frac{2}{e}\right)$, 有 $h(a) \leq h(0) = 0$, 即②对任意

$a \in \left(-\infty, 2 - \frac{2}{e}\right)$ 恒成立.

由③式解得 $a \leq 2 - \frac{3}{e-1}.$ ④

综合①④可知, 当 $a \in \left(-\infty, 2 - \frac{3}{e-1}\right]$ 时, 对任意给定的 $x_0 \in (0, e]$, 在 $(0, e]$ 上总存在两个不同的 $x_i (i = 1, 2)$, 使得 $f(x_i) = g(x_0)$ 成立.

【标注】【知识点】函数零点的概念; 已知零点或根情况求参数范围; 利用导数解决不等式能成立问题; 导数与最值

19. 已知函数 $f(x) = ax^2 + x(e^x - a), g(x) = (1-a)x - x \ln(x+1)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

若过点 $(0, f(0))$ 且与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线有两条, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $a \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0).$

【解析】(1) $f(0) = 0$,

设曲线 $y = f(x)$ 的切点为点 $P(x_0, y_0)$, 则点 P 处的切线方程为:

$$y - y_0 = [(1 + x_0) \cdot e^{x_0} + 2ax_0 - a] \cdot (x - x_0).$$

由切线过点 $(0, 0)$,

$$\text{有 } y_0 = [(1 + x_0) \cdot e^{x_0} + 2ax_0 - a] \cdot x_0,$$

$$\text{即 } a \cdot x_0^2 + x_0 \cdot (e^{x_0} - a) = [(1 + x_0) \cdot e^{x_0} + 2ax_0 - a] \cdot x_0.$$

$$\text{化简, 整理得: } a \cdot x_0^2 + x_0^2 \cdot e^{x_0} = 0,$$

由已知, 该方程有两个不同的解, 故 $x_0 = 0$ 或 $a = -e^{x_0}$.

所以 $a < 0$ 且 $a \neq -1$,

$$\text{即 } a \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0).$$

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值; 利用导数证明不等式恒成立问题; 已知零点或根情况求参数范围; 求在某点处的切线方程; 导数的几何意义

20. 已知函数 $f(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + (1+a)x - \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$).

当 $a = 0$ 时, 设函数 $g(x) = xf(x)$. 若存在区间 $[m, n] \subseteq \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, 使得函数 $g(x)$ 在 $[m, n]$ 上的值域为 $[k(m+2) - 2, k(n+2) - 2]$, 求实数 k 的取值范围.

【答案】(1) $k \in \left(1, \frac{9 + 2\ln 2}{10}\right]$.

【解析】(1) 当 $a = 0$ 时, 设函数 $g(x) = xf(x) = x^2 - x \ln x$,

$$\text{令 } g'(x) = 2x - \ln x - 1 (x > 0),$$

$$\text{则 } g'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x - 1}{x} (x > 0),$$

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, $g'(x) \geq 0$, $g(x)$ 为增函数;

$g(x)$ 在区间 $[m, n] \subseteq \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 递增,

$\therefore g(x)$ 在 $[m, n]$ 上的值域是 $[k(m+2) - 2, k(n+2) - 2]$,

所以 $g(m) = k(m+2) - 2$, $g(n) = k(n+2) - 2$, $\frac{1}{2} \leq m \leq n$,

则 $g(x) = k(x+2) - 2$ 在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上至少有两个不同的正根,

$$k = \frac{g(x) + 2}{x + 2}, \text{ 令 } F(x) = \frac{g(x) + 2}{x + 2} = \frac{x^2 - x \ln x + 2}{x + 2},$$

$$\text{求导得, } F'(x) = \frac{x^2 + 3x - 2 \ln x - 4}{(x + 2)^2} \left(x \geq \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{令 } G(x) = x^2 + 3x - 2 \ln x - 4 \left(x \geq \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{则 } G'(x) = 2x + 3 - \frac{2}{x} = \frac{(2x - 1)(x + 2)}{x},$$

所以 $G(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 递增, $G\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, $G(1) = 0$,
 当 $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, $G(x) < 0$, $\therefore F'(x) < 0$,
 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $G(x) > 0$, $\therefore F'(x) > 0$,
 所以 $F(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ 上递减, 在 $(1, +\infty)$ 上递增,
 $\therefore F(1) < k \leq F\left(\frac{1}{2}\right)$,
 $\therefore k \in \left(1, \frac{9+2\ln 2}{10}\right]$.

【标注】【知识点】直接求函数的最值（不含参）；二阶导问题