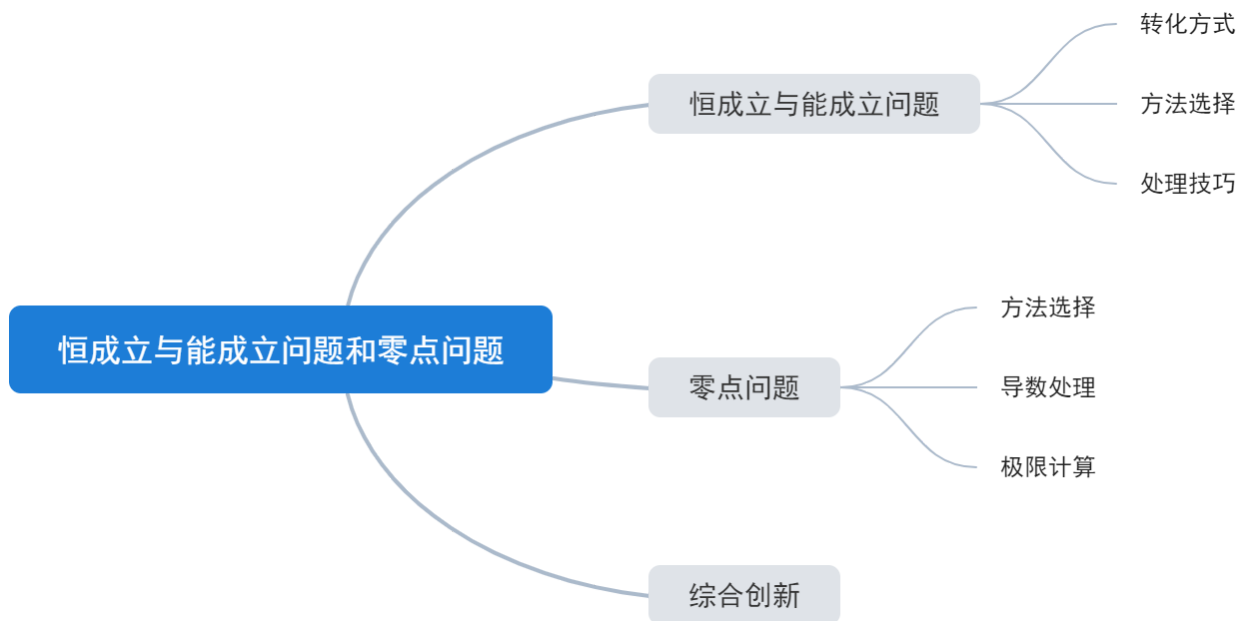


第三讲-恒成立与能成立及零点问题

1. 知识梳理



一、恒成立与能成立问题

1. 真题分析

1. 已知函数 $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}ax^3 (a > 0), x \in \mathbf{R}$.

若对于任意的 $x_1 \in (2, +\infty)$, 都存在 $x_2 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_1) \cdot f(x_2) = 1$, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) a 的取值范围为 $[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$.

【解析】 (1) $y = \frac{1}{f(x_1)} (x_1 > 2)$ 的值域为 $y = f(x_2) (x_2 > 1)$ 的子集,
 $\therefore f(x_1) \neq 0$ 即 $1 \neq \frac{2}{3}ax_1$,
又 $\because x_1 \in (2, +\infty)$,
 $\therefore a \geq \frac{3}{4}$,
 $\therefore y = \frac{1}{f_1(x_1)}$ 的值域为 $(-\infty, 0)$,

$$\therefore f(1) \geq 0 \text{ 即 } 1 - \frac{2a}{3} \geq 0,$$

$$\therefore a \leq \frac{3}{2}.$$

综上所述： a 的取值范围为 $[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式能成立问题

2. 已知函数 $f(x) = x - \ln(x + a)$ 的最小值为0，其中 $a > 0$.

若对任意的 $x \in [0, +\infty)$ ，有 $f(x) \leq kx^2$ 恒成立，求实数 k 的最小值；

【答案】 (1) $\frac{1}{2}$.

【解析】 (1) 当 $k \leq 0$ 时，取 $x = 1$ ，有 $f(1) = 1 - \ln 2 > 0$ ，故 $k \leq 0$ 不合题意.

当 $k > 0$ 时，令 $g(x) = f(x) - kx^2$ ，即 $g(x) = x - \ln(x + 1) - kx^2$.

$$g'(x) = \frac{x}{x+1} - 2kx = \frac{-x[2kx - (1 - 2k)]}{x+1},$$

$$\text{令 } g'(x) = 0, \text{ 得 } x_1 = 0, x_2 = \frac{1-2k}{2k} > -1.$$

(1) 当 $k \geq \frac{1}{2}$ 时， $\frac{1-2k}{2k} \leq 0$ ， $g'(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，

因此 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减，从而对于任意的 $x \in [0, +\infty)$ ，

总有 $g(x) \leq g(0) = 0$ ，即 $f(x) \leq kx^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立.

故 $k \geq \frac{1}{2}$ 符合题意.

(2) 当 $0 < k < \frac{1}{2}$ 时， $\frac{1-2k}{2k} > 0$. 对于 $x \in (0, \frac{1-2k}{2k})$ ，

$g'(x) > 0$ ，故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1-2k}{2k})$ 内单调递增，

因此当 $x_0 \in (0, \frac{1-2k}{2k})$ 时， $g(x_0) > g(0) = 0$ ，即 $f(x_0) \leq kx_0^2$ 不成立.

故 $0 < k < \frac{1}{2}$ 不合题意.

综上， k 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值；导数与极值；利用导数证明不等式恒成立问题；利用导数求函数的单调性、单调区间；数学归纳法；数列与不等式综合

3. 设 $a, b \in \mathbf{R}$ ， $|a| \leq 1$. 已知函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3a(a-4)x + b$ ， $g(x) = e^x f(x)$.

已知函数 $y = g(x)$ 和 $y = e^x$ 的图象在公共点 (x_0, y_0) 处有相同的切线.

① 求证： $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数等于0.

② 若关于 x 的不等式 $g(x) \leq e^x$ 在区间 $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ 上恒成立，求 b 的取值范围.

【答案】 (1) ① 证明见解析.

② $[-7, 1]$.

【解析】 (1) ① 因为 $g'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$, 由题意有 $\begin{cases} g(x_0) = e^{x_0} \\ g'(x_0) = e^{x_0} \end{cases}$,
所以 $\begin{cases} f(x_0)e^{x_0} = e^{x_0} \\ e^{x_0}(f(x_0) + f'(x_0)) = e^{x_0} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} f(x_0) = 1 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$.
所以 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数等于 0 .

② 因为 $g(x) \leq e^x$, $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$, 由 $e^x > 0$, 可得 $f(x) \leq 1$.
又因为 $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 0$, 故 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点 , 由 (1) 知 $x_0 = a$.
另一方面 , 由于 $|a| \leq 1$, 故 $a + 1 < 4 - a$,
由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(a - 1, a)$ 内单调递增 , 在 $(a, a + 1)$ 内单调递减 ,
故当 $x_0 = a$ 时 , $f(x) \leq f(a) = 1$ 在 $[a - 1, a + 1]$ 上恒成立 , 从而 $g(x) \leq e^x$ 在 $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ 上恒成立 .
由 $f(a) = a^3 - 6a^2 - 3a(a - 4)a + b = 1$, 得 $b = 2a^3 - 6a^2 + 1$, $-1 \leq a \leq 1$.
令 $t(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$, $x \in [-1, 1]$, 所以 $t'(x) = 6x^2 - 12x$,
令 $t'(x) = 0$, 解得 $x = 2$ (舍去) , 或 $x = 0$.
因为 $t(-1) = -7$, $t(1) = -3$, $t(0) = 1$, 故 $t(x)$ 的值域为 $[-7, 1]$.
所以 b 的取值范围是 $[-7, 1]$.

【标注】 【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

2. 思路总结

恒能成立问题解题思路 :

- 1、方法的取舍 ; 确定是采取参变分离还是分类讨论的思路 , 我们的选择原则如下 : 首先判断参数是否出现在多项中 , 如果函数中两项含有参数 , 一个是一次项 , 一个是二次项 , 很可能没法参变分离 , 例如 $f(x) = x^2 + ax - a^2$ 就没法实现参变分离 ; 然后在参变分离可行的情况下 , 先尝试参变分离 , 分离完之后先对新的函数进行求导 , 看看求导是否麻烦或者求完之后的导数正负是否可以判断 (有可能是导数零点可求、有可能是导数恒正或者恒负 , 在判断导数正负时有可能需要对于没法判断的部分再次求导) , 如果导数计算太麻烦或者导数正负无法判断 , 则选择分类讨论的思路 ; 最后有些情况下我们参变分离之后函数导数正负可以判断 , 但是最值没法求时 , 也需要采取分类讨论的思路去做 , 例如我们将恒成立问题 $\forall x \in (0, 1), ax \geq \sin x$ 参变分离转化为 $\forall x \in (0, 1), a \geq \frac{\sin x}{x}$ 之后 ,
 $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in (0, 1)$ 的最大值没法计算 .
- 2、对于恒成立或者能成立进行转化 , 将其转化为最值问题 , 明确后面要求函数的最大值还是最小值 ;
- 3、求出最值之后满足最值需要满足的不等式 , 求出参数范围即可 ;

特殊备注：

技巧一：对于问题 $\forall x \in (0, +\infty), x^2 + 2a^2 \geq ax \ln x$ ，我们没法采取参变分离的思路处理，需要分类讨论，移向之后转化为 $f(x) = x^2 - ax \ln x + 2a^2 \geq 0$ ，但是求导之后会发现导数为

$f'(x) = 2x - a(1 + \ln x)$ ，导数因为既含有幂函数部分又含有对数部分，导数零点无法求解，这样的

情况下，我们可以进行这样的技巧，首先两边同时除以 x ，转化为 $g(x) = x - a \ln x + \frac{2a^2}{x} \geq 0$ ，此

时 $g'(x) = 1 - \frac{a}{x} - \frac{2a^2}{x^2} = \frac{x^2 - ax - 2a^2}{x^2}$ ，导数零点可求。

技巧二：对于导数的处理，对于函数 $f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$ ，导数为 $f'(x) = \frac{1 - x - 2 \ln x}{x^3}$ ，初步一看

导数既含有幂函数部分又含有对数函数部分，零点求解不了，此时我们可以采取猜根法，猜 $x = 1$ 是否为零点，此问题发现是的，然后判断 $1 - x - 2 \ln x$ 的单调性，去判断导数为正为负区间，甚至有些情况下需要对于导数中不能确定正负的部分进行重新组合去判断正负，例如导数为

$f'(x) = \frac{x^2 - x + 1 - x \ln x}{x^2}$ ，此函数不可判断正负的部分为分子部分，重新组合为

$x^2 - x - x \ln x + 1 = x(x - 1 - \ln x) + 1 \geq 1$ ，或者对于分子部分再次求导判断该部分的单调性进而判断其正负。

3. 模拟演练

4. 已知函数 $f(x) = e^x - 1 - x$ 。

若存在 $x_0 \in \left[-1, \ln \frac{4}{3}\right]$ ，满足 $a - e^x + 1 + x < 0$ 成立，求 a 的取值范围。

【答案】 (1) $a < \frac{1}{e}$ 。

【解析】 (1) $a < e^x - 1 - x$ ，即 $a < f(x)$ ，

令 $f'(x) = e^x - 1 = 0$ ，得 $x = 0$ 。

$\because x > 0$ 时， $f'(x) > 0$ ， $x < 0$ 时， $f'(x) < 0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上减，在 $(0, +\infty)$ 上增，

又 $x_0 \in \left[-1, \ln \frac{4}{3}\right]$ 时，

$\therefore f(x)$ 的最大值在区间端点处取到，

$$f(-1) = e^{-1} - 1 + 1 = \frac{1}{e}, f\left(\ln \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 1 - \ln \frac{4}{3},$$

$$f(-1) - f\left(\ln \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{e} - \frac{4}{3} + 1 + \ln \frac{4}{3}$$

$$= \frac{1}{e} - \frac{1}{3} + \ln \frac{4}{3} > 0,$$

$$\therefore f(-1) > f\left(\ln \frac{4}{3}\right),$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } \left[-1, \ln \frac{4}{3}\right] \text{ 上最大值为 } \frac{1}{e},$$

故 a 的取值范围是： $a < \frac{1}{e}$.

【标注】【知识点】导数的几何意义；求在某点处的切线方程；利用导数证明不等式能成立问题

5. 已知函数 $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$ 与 $g(x) = a(x-1)$.

当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围 .

【答案】 (1) $a \geq \frac{1}{2}$.

【解析】 (1) 方法一：即 $x \geq 1$ 时, $\frac{x \ln x}{x+1} \leq a(x-1)$, $x=1$ 时, 显然成立；

$x > 1$ 时, 即 $a \geq \frac{x \ln x}{x^2-1}$,

令 $h(x) = \frac{x \ln x}{x^2-1}$,

则 $h'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x^2 - 1) - 2x^2 \ln x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 \ln x + x^2 - \ln x - 1}{(x^2 - 1)^2}$,

令 $\varphi(x) = -x^2 \ln x + x^2 - \ln x - 1 (x > 1)$, $\varphi'(x) = -2x \ln x + x - \frac{1}{x}$,

$\varphi''(x) = -2 \ln x - 1 + \frac{1}{x^2} = -2 \ln x + \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) < 0$,

所以 $\varphi'(x) < \varphi'(1) = 0$ 即 $h'(x) < 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减 ,

所以 $a \geq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1}{2x} = \frac{1}{2}$,

故 $a \geq \frac{1}{2}$.

方法二：注意到 $x=1$ 时, 恰有 $f(x) - g(x) = 0$,

令 $F(x) = f(x) - g(x) = \frac{x \ln x}{x+1} - a(x-1)$,

则 $F'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x+1) - x \ln x}{(x+1)^2} - a = \frac{x+1+\ln x}{(x+1)^2} - a$,

所以 $F(x) \leq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 恒成立的必要条件为 $F'(1) \leq 0$, 即 $\frac{2}{4} - a \leq 0$, 所以

$a \geq \frac{1}{2}$,

下面证明：当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时 ,

$F(x) = \frac{x \ln x}{x+1} - a(x-1) \leq \frac{x \ln x}{x+1} - \frac{1}{2}(x-1) = h(x)$,

$h'(x) = \frac{x+1+\ln x}{(x+1)^2} - \frac{1}{2} = \frac{2x+2+2\ln x - (x+1)^2}{2(x+1)^2}$,

令 $\varphi(x) = 2x+2+2\ln x - (x+1)^2$,

$\varphi'(x) = 2 + \frac{2}{x} - 2(x+1) = \frac{2}{x} - 2x = \frac{2(1-x^2)}{x} \leq 0$ 即 $\varphi(x) \leq \varphi(1) = 0$,

所以 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 递减 ,

所以 $h(x) \leq h(1) = 0$ 恒成立, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 也是充分条件, 故有 $a \geq \frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】导数的几何意义；已知切线方程求参数；导数与最值；二阶导问题；通过构造函数证明不等式

6. 已知函数 $f(x) = -x^2 + 2\ln x$ ，函数 $f(x)$ 与 $g(x) = x + \frac{a}{x}$ 有相同极值点。

若 $\forall x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{e}, 3\right]$ ，不等式 $\frac{f(x_1) - g(x_2)}{k-1} \leq 1$ 恒成立，求实数 k 的取值范围。

【答案】 (1) $\left(-\infty, -\frac{34}{3} + 2\ln 3\right) \cup (1, +\infty)$ 。

【解析】 (1) $\because f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e^2} - 2, f(1) = -1, f(3) = -9 + 2\ln 3,$

$\therefore -9 + 2\ln 3 < -\frac{1}{e^2} - 2 < -1$ ，即 $f(3) < f\left(\frac{1}{e}\right) < f(1)$ ，

$\therefore \forall x_1 \in \left(\frac{1}{e}, 3\right), f(x_1)_{\min} = f(3) = -9 + 2\ln 3, f(x_1)_{\max} = f(1) = -1$ ，

由①知 $g(x) = x + \frac{1}{x}$ ，

$\therefore g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ ，

故 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right)$ 时， $g'(x) < 0$ ，

当 $x \in (1, 3]$ 时， $g'(x) > 0$ ，

故 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right)$ 上为减函数，在 $(1, 3]$ 上为增函数，

$\therefore g\left(\frac{1}{e}\right) = e + \frac{1}{e}, g(1) = 2, g(3) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ ，而 $2 < e + \frac{1}{e} < \frac{10}{3}$ ，

$\therefore g(1) < g\left(\frac{1}{e}\right) < g(3)$ ，

$\therefore x_2 \in \left[\frac{1}{e}, 3\right], g(x_2)_{\min} = g(1) = 2, g(x_2)_{\max} = g(3) = \frac{10}{3}$ ，

当 $k-1 > 0$ ，即 $k > 1$ 时，对于 $\forall x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{e}, 3\right]$ ，不等式 $\frac{f(x_1) - g(x_2)}{k-1} \leq 1$ 恒成立，

$\Leftrightarrow k-1 \geq [f(x_1) - g(x_2)]_{\min} \Leftrightarrow k \geq [f(x_1) - g(x_2)]_{\max} + 1$ ，

$\therefore f(x_1) - g(x_2) \leq f(1) - g(1) = -1 - 2 = -3$ ，

$\therefore k \geq -3 + 1 = -2$ ，

又 $\because k > 1$ ，

$\therefore k > 1$ ，

当 $k-1 < 0$ ，即 $k < 1$ 时，对于 $\forall x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{e}, 3\right]$ ，不等式 $\frac{f(x_1) - g(x_2)}{k-1} \leq 1$ 恒成立，

$\Leftrightarrow k-1 \leq [f(x_1) - g(x_2)]_{\min} \Leftrightarrow k \leq [f(x_1) - g(x_2)]_{\min} + 1$ ，

$\therefore f(x_1) - g(x_2) \geq f(3) = -9 + 2\ln 3 - \frac{10}{3} = -\frac{37}{3} + 2\ln 3$ ，

$$\therefore k \leq -\frac{34}{3} + 2\ln 3,$$

$$\text{又} \because k < 1,$$

$$\therefore k \leq -\frac{34}{3} + 2\ln 3,$$

综上, 所求的实数 k 的取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{34}{3} + 2\ln 3\right) \cup (1, +\infty)$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间；已知极值情况求参数范围；利用导数求函数的最值

二、零点问题

1. 真题分析

7. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 - ax - a$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a > 0$.

若函数 $f(x)$ 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点, 求 a 的取值范围;

【答案】 (1) $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

【解析】 (1) 由 (I) 知 $f(x)$ 在区间 $(-2, -1)$ 内单调递增,

在区间 $(-1, 0)$ 内单调递减, 从而函数 $f(x)$ 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点

$$\text{当且仅当} \begin{cases} f(-2) < 0 \\ f(-1) > 0 \\ f(0) < 0 \end{cases}, \text{解得 } 0 < a < \frac{1}{3},$$

所以, a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

【标注】【知识点】直接求函数的最值 (不含参); 求参数范围 (含参二次型导函数)

8. 设函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)e^x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

若 $0 < a < \frac{1}{e}$.

① 证明: $f(x)$ 恰有两个零点.

② 设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, x_1 为 $f(x)$ 的零点, 且 $x_1 > x_0$, 证明: $3x_0 - x_1 > 2$.

【答案】 (1) ① 证明见解析.

② 证明见解析.

【解析】 (1) ① 由 (1) 知 $f'(x) = \frac{1 - ax^2e^x}{x}$.

令 $g(x) = 1 - ax^2e^x$, 由 $0 < a < \frac{1}{e}$,

可知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减,

又 $g(1) = 1 - ae > 0$,

且 $g\left(\ln \frac{1}{a}\right) = 1 - a\left(\ln \frac{1}{a}\right)^2 \frac{1}{a} = 1 - \left(\ln \frac{1}{a}\right)^2 < 0$.

故 $g(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一解,

从而 $f'(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一解,

不妨设为 x_0 , 则 $1 < x_0 < \ln \frac{1}{a}$.

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) = \frac{g(x)}{x} > \frac{g(x_0)}{x} = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内单调递增.

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) = \frac{g(x)}{x} < \frac{g(x_0)}{x} = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内单调递减, 因此 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点.

令 $h(x) = \ln x - x + 1$,

则当 $x > 1$ 时, $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$,

故 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减,

从而当 $x > 1$ 时, $h(x) < h(1) = 0$,

所以 $\ln x < x - 1$.

从而

$$f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \ln \ln \frac{1}{a} - a\left(\ln \frac{1}{a} - 1\right)e^{\ln \frac{1}{a}} = \ln \ln \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} + 1 = h\left(\ln \frac{1}{a}\right) < 0$$

,

又因为 $f(x_0) > f(1) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内有唯一零点.

又 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内有唯一零点 1,

从而 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内恰有两个零点.

② 由题意, $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f(x_1) = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} ax_0^2e^{x_0} = 1 \\ \ln x_1 = a(x_1 - 1)e^{x_1} \end{cases}$,

从而 $\ln x_1 = \frac{x_1 - 1}{x_0^2}e^{x_1 - x_0}$, 即 $e^{x_1 - x_0} = \frac{x_0^2 \ln x_1}{x_1 - 1}$.

因为当 $x > 1$ 时, $\ln x < x - 1$,

又 $x_1 > x_0 > 1$, 故 $e^{x_1 - x_0} < \frac{x_0^2(x_1 - 1)}{x_1 - 1} = x_0^2$,

两边取对数, 得 $\ln e^{x_1 - x_0} < \ln x_0^2$,

于是 $x_1 - x_0 < 2 \ln x_0 < 2(x_0 - 1)$,

整理得 $3x_0 - x_1 > 2$.

【标注】【知识点】求函数零点(含参指对型导函数);利用导数解决不等式恒成立问题;双变量

9. 已知函数 $f(x) = 4x^3 + 3tx^2 - 6t^2x + t - 1, x \in \mathbf{R}$, 其中 $t \in \mathbf{R}$.

证明: 对任意的 $t \in (0, +\infty)$, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内均存在零点.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 证明: 由 (II) 可知, 当 $t > 0$ 时,

$f(x)$ 在 $\left(0, \frac{t}{2}\right)$ 内的单调递减, 在 $\left(\frac{t}{2}, +\infty\right)$ 内单调递增,

以下分两种情况讨论:

(1) 当 $\frac{t}{2} \geq 1$, 即 $t \geq 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减,

$$f(0) = t - 1 > 0, f(1) = -6t^2 + 4t + 3 \leq -6 \times 4 + 4 \times 2 + 3 < 0.$$

所以对任意 $t \in [2, +\infty)$, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内均存在零点.

(2) 当 $0 < \frac{t}{2} < 1$, 即 $0 < t < 2$ 时,

$f(x)$ 在 $\left(0, \frac{t}{2}\right)$ 内单调递减, 在 $\left(\frac{t}{2}, 1\right)$ 内单调递增,

$$\text{若 } t \in (0, 1], f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{4}t^3 + t - 1 \leq -\frac{7}{4}t^3 < 0.$$

$$f(1) = -6t^2 + 4t + 3 \geq -6t + 4t + 3 = -2t + 3 > 0.$$

所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{t}{2}, 1\right)$ 内存在零点.

$$\text{若 } t \in (1, 2), f\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{7}{4}t^3 + (t - 1) < -\frac{7}{4}t^3 < 0$$

$$f(0) = t - 1 > 0$$

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{t}{2}\right)$ 内存在零点.

所以, 对任意 $t \in (0, 2)$, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内均存在零点.

综上, 对任意 $t \in (0, +\infty)$, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内均存在零点.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】 求在某点处的切线方程; 求函数单调区间 (含参二次型导函数); 求函数零点 (含参二次型导函数)

10. 设函数 $f(x) = (x - t_1)(x - t_2)(x - t_3)$, 其中 $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}$, 且 t_1, t_2, t_3 是公差为 d 的等差数列.

若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -(x - t_2) - 6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点, 求 d 的取值范围.

【答案】 (1) $(-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, +\infty)$.

【解析】 (1)

曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -(x - t_2) - 6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点等价于关于 x 的方程 $(x - t_2 + d)(x - t_2)(x - t_2 - d) + (x - t_2) + 6\sqrt{3} = 0$ 有三个互异的实数解，
令 $u = x - t_2$ 可得 $u^3 + (1 - d^2)u + 6\sqrt{3} = 0$ ，

设函数 $g(x) = x^3 + (1 - d^2)x + 6\sqrt{3}$ ，

则曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -(x - t_2) - 6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点等价于函数 $y = g(x)$ 有三个零点。

$$g'(x) = 3x^2 + (1 - d^2)，$$

当 $d^2 \leq 1$ 时， $g'(x) \geq 0$ ，

这时 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，不合题意。

当 $d^2 > 1$ 时，令 $g'(x) = 0$ ，

$$\text{解得 } x_1 = -\frac{\sqrt{d^2 - 1}}{\sqrt{3}}, x_2 = \frac{\sqrt{d^2 - 1}}{\sqrt{3}}，$$

易得， $g(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上单调递增，在 $[x_1, x_2]$ 上单调递减，在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增。

$$g(x) \text{ 的极大值 } g(x_1) = g\left(-\frac{\sqrt{d^2 - 1}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}(d^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{9} + 6\sqrt{3} > 0，$$

$$g(x) \text{ 的极小值 } g(x_2) = g\left(\frac{\sqrt{d^2 - 1}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}(d^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{9} + 6\sqrt{3}，$$

若 $g(x_2) \geq 0$ ，由 $g(x)$ 的单调性可知函数 $y = g(x)$ 至多有两个零点，不合题意。

若 $g(x_2) < 0$ ，即 $(d^2 - 1)^{\frac{3}{2}} > 27$ ，

也就是 $|d| > \sqrt{10}$ ，此时 $|d| > x_2$ ，

$$g(|d|) = |d| + 6\sqrt{3} > 0，\text{且 } -2|d| < x_1，$$

$$g(-2|d|) = -6|d|^3 - 2|d| + 6\sqrt{3} < -62\sqrt{10} + 6\sqrt{3} < 0，$$

从而由 $g(x)$ 的单调性，可知函数 $y = g(x)$ 在区间 $(-2|d|, x_1)$ ， (x_1, x_2) ， $(x_2, |d|)$ 内各有一个零点，符合题意。

所以， d 的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, +\infty)$ 。

【标注】【知识点】求参数范围（含参二次型导函数）

2. 思路总结

零点问题处理思路：

1、方法选择；选择参变分离或者分类讨论，原则如上

2、求解函数的导数，判断导数的正负，画出函数的走势图，计算极值点处和端点处的函数值，对于开区间的问题需要用极限的思维计算极限值，此处我们需要知道的是

$$x \rightarrow +\infty, \frac{\log_b x}{x^a} \rightarrow 0 (a > 0, b > 1), \frac{x^a}{c^x} \rightarrow 0 (a > 0, c > 1);$$

3、根据零点个数情况画出横线与图像的相对位置关系，写出应该满足的不等式，求解出来参数取值范围。

3. 模拟演练

11. 已知函数 $f(x) = a(2-x)e^x$, $g(x) = (x-1)^2$.

若关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .

① 求实数 a 的取值范围.

② 证明: $x_1 + x_2 < 2$.

【答案】 (1) ① $(0, +\infty)$.

② 证明见解析.

【解析】 (1) ① 由 $f(x) = g(x)$, 得 $g(x) - f(x) = 0$,

$$\text{设 } h(x) = g(x) - f(x) = a(x-2)e^x + (x-1)^2,$$

$$\text{则 } h'(x) = a(x-1)e^x + 2(x-1) = (x-1)(ae^x + 2),$$

由题意得函数 $h(x)$ 恰好有两个零点.

(i) 当 $a = 0$, 则 $h(x) = (x-1)^2$, $h(x)$ 只有一个零点 1;

(ii) 当 $a > 0$ 时, 由 $h'(x) < 0$ 得 $x < 1$,

由 $h'(x) > 0$ 得 $x > 1$,

即 $h(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上为减函数, 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数,

$$\text{而 } h(1) = -ae < 0, h(2) = 1,$$

所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上有唯一零点, 且该零点在 $(1, 2)$ 上,

$$\text{取 } b < 0, \text{ 且 } b < \ln \frac{1}{2a},$$

$$\text{则 } h(b) > \frac{1}{2}(b-2) + (b-1)^2 = b\left(b - \frac{3}{2}\right) > 0,$$

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上有唯一零点, 且该零点在 $(b, 1)$ 上,

所以 $a > 0$, $h(x)$ 恰好有两个零点;

(iii) 当 $a < 0$ 时, 由 $h'(x) = 0$ 得 $x = 1$ 或 $\ln\left(-\frac{2}{a}\right)$,

$$\text{若 } a = -\frac{2}{e}, h'(x) = -\frac{2}{e}(x-1)(e^x - e) \leq 0,$$

所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上至多有一个零点,

$$\text{若 } a < -\frac{2}{e}, \text{ 则 } \ln\left(-\frac{2}{a}\right) < 1,$$

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, 即 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

又 $h(1) = -ae > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上至多有一个零点,

当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $h(x)$ 在 $\left(\ln\left(-\frac{2}{a}\right), 1\right)$ 上单调递增,

在 $\left(-\infty, \ln\left(-\frac{2}{a}\right)\right)$ 上为减函数,

$$\begin{aligned} \text{又 } h\left[\ln\left(-\frac{2}{a}\right)\right] &= -2\left[\ln\left(-\frac{2}{a}\right) - 2\right] + \left[\ln\left(-\frac{2}{a}\right) - 1\right]^2 \\ &= \left[\ln\left(-\frac{2}{a}\right) - 2\right]^2 + 1 > 0, \end{aligned}$$

所以 $h(x)$ 在 $\left(-\infty, \ln\left(-\frac{2}{a}\right)\right)$ 上无零点,

若 $a > -\frac{2}{e}$, 则 $\ln\left(-\frac{2}{a}\right) > 1$,

又当 $x \leq 1$ 时, $h(x) \geq h(1) = -ae > 0$,

所以 $h(x)$ 不存在零点,

$h(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上无零点,

故当 $x \in \left(1, \ln\left(-\frac{2}{a}\right)\right)$ 时, $h'(x) > 0$;

当 $x \in \left(\ln\left(-\frac{2}{a}\right), +\infty\right)$ 时, $h'(x) < 0$,

因此 $f(x)$ 在 $\left(1, \ln\left(-\frac{2}{a}\right)\right)$ 上单调递增, 在 $(\ln(-2a), +\infty)$ 上单调递减,

$$\begin{aligned} \text{又 } h\left[\ln\left(-\frac{2}{a}\right)\right] &= -2\left[\ln\left(-\frac{2}{a}\right) - 2\right] + \left[\ln\left(-\frac{2}{a}\right) - 1\right]^2 \\ &= \left[\ln\left(-\frac{2}{a}\right) - 2\right]^2 + 1 > 0, \end{aligned}$$

随意 $h(x)$ 在 $\left(1, \ln\left(-\frac{2}{a}\right)\right)$ 无零点, 在 $(\ln(-2a), +\infty)$ 上至多有一个零点,

综上, a 的取值范围为 $(0, +\infty)$.

② 不妨设 $x_1 < x_2$,

由①知 $x_1 \in (-\infty, 1)$, $x_2 \in (1, +\infty)$, $2 - x_2 \in (-\infty, 1)$, 且 $a > 0$, $h(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递减,

所以 $x_1 + x_2 < 2$ 等价于 $h(x_1) > h(2 - x_1)$, 即 $h(2 - x_2) < 0$,

由 $h(2 - x_2) = -ax_2e^{2-x_2} + (x_2 - 1)^2$, 且

$$h(x_2) = a(x_2 - 2)e^{x_2} + (x_2 - 1)^2 = 0,$$

所以 $h(2 - x_2) = a[-x_2e^{2-x_2} - (x_2 - 2)e^{x_2}]$

$$= -a[x_2e^{2-x_2} + (x_2 - 2)e^{x_2}],$$

设 $\varphi(x) = xe^{2-x} + (x - 2)e^x$, 其中 $x > 1$,

则 $\varphi'(x) = (x - 1)(e^x - 2^{2-x})$,

当 $x > 1$ 时, $e^x > e$, $e^{2-x} < e$,

所以 $\varphi'(x) > 0$,

而 $\varphi(1) = 0$, 故当 $x > 1$ 时, $\varphi(x) > 0$,

从而 $f(2-x_2) = -a(x_2) < 0$, 故 $x_1 + x_2 < 2$.

【标注】【知识点】函数零点的概念；已知零点情况求参数的取值范围；导数与最值；双变量问题；求过某点的切线方程；导数的几何意义

12. 已知函数 $f(x) = ax^2 - x$, $g(x) = b \ln x$, 且曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处有相同的切线.

当 $n \in [6, +\infty)$ 时, 求方程 $f(x) + x = ng(x)$ 在区间 $(1, e^n)$ 内实根的个数.

【答案】 (1) 2.

【解析】 (1) 设 $h(x) = ng(x) - f(x) - x = n \ln x - x^2$, 其中 $x \in (1, e^n)$,

$$\therefore h'(x) = \frac{n}{x} - 2x = \frac{2\left(x + \frac{\sqrt{2n}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2n}}{2}\right)}{x}.$$

$$\text{令 } h'(x) = 0, \text{ 则有 } x = \frac{\sqrt{2n}}{2},$$

当 $h'(x) > 0$, 解得 $1 < x < \frac{\sqrt{2n}}{2}$, 函数 $h(x)$ 的单调递增,

当 $h'(x) < 0$, 解得 $\frac{\sqrt{2n}}{2} < x < e^n$, 函数 $h(x)$ 的单调递减,

$$\therefore h(x) = h\left(\frac{\sqrt{2n}}{2}\right) = \frac{n}{2} \left(\ln \frac{n}{2} - 1\right) \geq 3(\ln 3 - 1) > 0,$$

$$\therefore h(e^n) = n^2 - e^{2n} = (n + e^n)(n - e^n),$$

设 $t(x) = x - e^x$, 其中 $x \in (6, +\infty)$, 则 $t'(x) = 1 - e^x < 0$,

$\therefore t(x)$ 在 $(6, +\infty)$ 内单调递减, $t(x) < t(6) < 0$,

$\therefore x < e^x$, 故 $h(e^n) < 0$, 而 $h(1) = -1$.

结合函数 $h(x)$ 的图象, 可知 $h(x)$ 在区间 $(1, e^n)$ 内有两个零点,

$\therefore$ 方程 $f(x) + x = ng(x)$ 在区间 $(1, e^n)$ 内实根的个数为 2.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题；求函数零点（含参二次型导函数）

三、综合创新

13. 当 $x \geq 0$ 时, $1 - e^{-x} \leq \frac{x}{ax+1}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

【解析】当 $x \geq 0$ 时，显然左边 $= 1 - e^{-x} \geq 0$ ；

若 $a < 0$ ，则当 $0 < x < -\frac{1}{a}$ 时，右边 $= \frac{x}{ax+1} < 0$ ，此时不满足题意，故 $a \geq 0$ 。

此时原不等式等价于 $(1 - e^{-x})(ax + 1) - x \leq 0$ ，进一步等价于

$$(e^x - 1)(ax + 1) - xe^x \leq 0$$

设其左端为 $f(x)$ ，显然有 $f(0) = 0$ 。

$$f'(x) = [(a-1)x + a]e^x - a, \quad f'(0) = 0.$$

$f'(x) = [(a-1)x + 2a - 1]e^x$ ，故使 $f(x) \leq 0$ 成立的必要条件是 $f'(0) \leq 0$ ，由此解

$$\text{得：} 0 \leq a \leq \frac{1}{2}.$$

下面论证充分性：

当 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ 时， $f(x) = (e^x - 1)(ax + 1) - xe^x \leq (e^x - 1)\left(\frac{x}{2} + 1\right) - xe^x$ ，故只需证明

$$(e^x - 1)\left(\frac{x}{2} + 1\right) - xe^x \leq 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(x + 2) - 2xe^x \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)e^x + x + 2 \geq 0$$

构造函数 $g(x) = (x - 2)e^x + x + 2$ ， $g'(x) = (x - 1)e^x + 1$ ， $g'(x) = xe^x \geq 0$ ，

故 $g'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，因此 $g'(x) \geq g'(0) = 0$ ，从而 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增。

故 $g(x) \geq g(0) = 0$ ，至此，充分性得证。

综上， a 的取值范围是 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 。

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

14. 设函数 $f(x) = ax - 2 - \ln x (a \in \mathbf{R})$ 。

当 $a = 1$ 时，试对 $\forall x \in (1, +\infty)$ ，都有 $(4k - 1 - \ln x)x + f(x) - 1 < 0 (k \in \mathbf{Z})$ 成立，求 k 的最大值。

【答案】(1) 最大值为0。

【解析】(1) 当 $a = 1$ 时， $(4k - 1 - \ln x)x + f(x) - 1 < 0$ ，

$$\Leftrightarrow (4k - 1 - \ln x)x + x - 2 - \ln x - 1 < 0,$$

$$\Leftrightarrow k < \frac{1}{4} \left(\ln x + \frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x} \right),$$

$$\text{令 } g(x) = \ln x + \frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x} (x > 1),$$

$$\text{只需 } k < \frac{1}{4} g(x)_{\min} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x - 2 - \ln x}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2},$$

令 $g'(x) = 0$ ，由(2)知， $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上有且仅有1个极值 x_0 ，

$\therefore g(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore g(x)_{\min} = g(x_0) = \ln x_0 + \frac{3}{x_0} + \frac{\ln x_0}{x_0} \text{ ①},$$

$$\text{又} \because g'(3) = \frac{1 - \ln 3}{9} < 0, g'(4) = \frac{2 - \ln 4}{9} > 0,$$

$$\therefore x_0 \in (3, 4) \text{ 使得 } x_0 - 2 - \ln x_0 = 0 \text{ ②},$$

$$\text{将 ② 代入 ① 中, 得 } g(x)_{\min} = g(x_0) = x_0 - 2 + \frac{3}{x_0} + \frac{x_0 - 2}{x_0} = x_0 + \frac{1}{x_0} - 1,$$

令 $t = x_0 + \frac{1}{x_0} - 1$ 在 $(3, 4)$ 上单调递增,

$$\therefore t \in \left(\frac{7}{3}, \frac{13}{4} \right),$$

$$\therefore \frac{1}{4} g(x)_{\min} \in \left(\frac{7}{12}, \frac{13}{16} \right) \subset (0, 1),$$

$\therefore k$ 的最大值为 0.

【标注】【知识点】隐零点问题

15. 已知函数 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 - 2x$ ($a \in \mathbf{R}$).

若过点 $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ 可作函数 $y = f(x)$ 图象的三条不同切线, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 $(1)(2, +\infty)$.

【解析】 (1) 设点 $P\left(t, -\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 - 2t\right)$ 是函数 $y = f(x)$ 图象上的切点,

则过点 P 的切线的斜率为 $k = f'(t) = -t^2 + at - 2$,

所以过点 P 的切线方程为 $y + \frac{1}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2t = (-t^2 + at - 2)(x - t)$.

因为点 $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ 在切线上,

$$\text{所以 } -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2t = (-t^2 + at - 2)(0 - t),$$

$$\text{即 } \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{3} = 0.$$

若过点 $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ 可作函数 $y = f(x)$ 图象的三条不同切线,

则方程 $\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{3} = 0$ 有三个不同的实数解.

令 $g(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{3}$, 则函数 $y = g(t)$ 与 t 轴有三个不同的交点.

$$\text{令 } g'(t) = 2t^2 - at = 0, \text{ 解得 } t = 0 \text{ 或 } t = \frac{a}{2}.$$

$$\text{因为 } g(0) = \frac{1}{3}, g\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{24}a^3 + \frac{1}{3},$$

$$\text{所以必须 } g\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{24}a^3 + \frac{1}{3} < 0, \text{ 即 } a > 2.$$

所以实数 a 的取值范围为 $(2, +\infty)$.

【标注】【知识点】求切线条数问题; 求参数范围 (含参二次型导函数)

16. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a-1)\ln x$, $g(x) = b - x\ln x$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$.

当 $a = 0$ 时, 令 $F(x) = 2f(x) + g(x) + 2\ln x + 2$, 是否存在区间 $[m, n] \subseteq (1, +\infty)$ 使得函数 $F(x)$ 在区间 $[m, n]$ 上的值域为 $[k(m+2), k(n+2)]$? 若存在, 求实数 k 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) k 不存在.

【解析】 (1) 由 (1) 知 $F(x) = x^2 - x\ln x + 2$,

故 $F'(x) = 2x - \ln x - 1$, 令 $\omega(x) = F'(x) = 2x - \ln x - 1$,

则 $\omega'(x) = 2 - \frac{1}{x} > 0$ 对 $\forall x \in (1, +\infty)$ 恒成立,

故 $F'(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内递增;

故 $F'(x) > F'(1) = 1 > 0$ 恒成立,

故函数 $F(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 递增,

假设存在区间 $[m, n] \subseteq (1, +\infty)$, 使得函数 $F(x)$ 在区间 $[m, n]$ 上的值域是

$[k(m+2), k(n+2)]$,

则 $\begin{cases} F(m) = m^2 - m\ln m + 2 = k(m+2) \\ F(n) = n^2 - n\ln n + 2 = k(n+2) \end{cases}$,

问题转化为关于 x 的方程 $x^2 - x\ln x + 2 = k(x+2)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内是否存在两个不相等的实根,

即方程 $k = \frac{x^2 - x\ln x + 2}{x+2}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内是否存在两个不相等的实根,

令 $h(x) = \frac{x^2 - x\ln x + 2}{x+2}$, $x \in (1, +\infty)$, 则 $h'(x) = \frac{x^2 + 3x - 4 - 2\ln x}{(x+2)^2}$,

令 $p(x) = x^2 + 3x - 4 - 2\ln x$,

则 $p'(x) = 2x + 3 - \frac{2}{x} = \frac{(2x-1)(x+2)}{x} > 0$, 对 $\forall x \in (1, +\infty)$ 恒成立,

故函数 $p(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 递增,

故 $p(x) > p(1) = 0$ 恒成立, 故 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 递增,

故方程 $k = \frac{x^2 - x\ln x + 2}{x+2}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内不存在两个不相等的实根,

综上, 不存在区间 $[m, n] \subseteq (1, +\infty)$, 使得函数 $F(x)$ 在区间 $[m, n]$ 上的值域是

$[k(m+2), k(n+2)]$.

【标注】【知识点】求参数范围 (含参指对型导函数); 已知最值情况求参数值或解析式; 求函数单调区间 (含参二次型导函数)