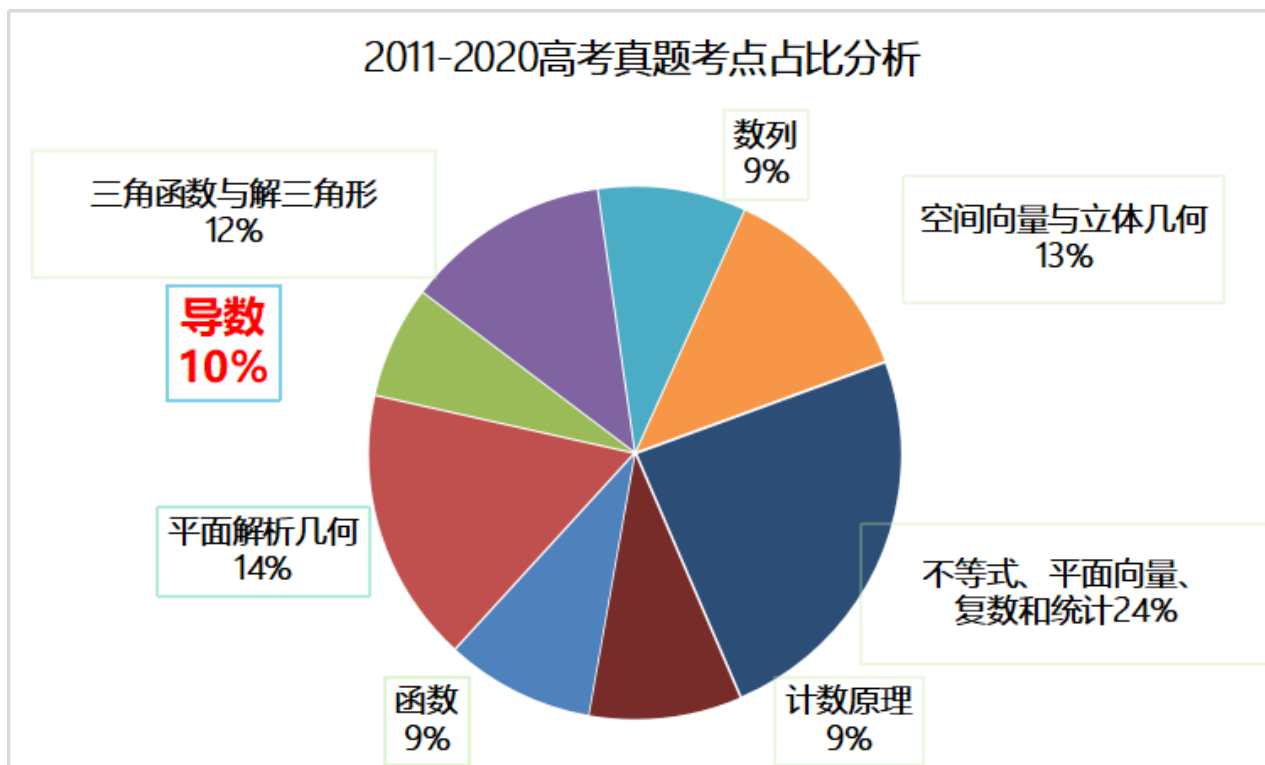


第一讲-导数基础

1. 考情分析

📍 考点占比



📍 考点分析

2011-2020高考真题考点分析								
考点	导数计算	切线方程	单调性	极值	最值	恒能成立	不等式证明	零点
2011		19 (1) 文	19 (2) 文 19 (1) 理				19 (3) 理	19 (3) 文 19 (2) 理
2012			20 (1) 文		20 (3) 文 20 (1) 理	20 (2) 理	20 (3) 理	20 (2) 文
2013			20 (1) 文 20 (1) 理				20 (2) 文 20 (3) 理	20 (2) 理
2014			19 (1) 文			19 (2) 文	20 (2) 理 20 (3) 理	20 (1) 理
2015	11文		20 (1) 文 20 (1) 理				20 (2) 文 20 (3) 文 20 (2) 理 20 (3) 理	
2016	10文		20 (1) 文 20 (1) 理				20 (2) 文 20 (3) 理	20 (2) 文 20 (2) 理
2017		10文 19 (2) 文	19 (1) 文 20 (1) 理			19 (3) 文	20 (2) 理 20 (3) 理	
2018	10文	20 (1) 文 20 (2) 理	20 (1) 理	20 (2) 文				20 (3) 文 20 (3) 理
2019		11文	20 (1) 文				20 (3) 文 20 (2) 理 20 (3) 理	20 (2) 文
2020		20 (1)	20 (2)	20 (2)			20 (3)	
频次	3	7	15	2	2	3	18	10

2. 知识梳理



一、导数计算

1. 真题分析

1. 已知函数 $f(x) = e^x \ln x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(1)$ 的值为 _____ .

【答案】 e

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = e^x \ln x$,
 $\therefore f'(x) = e^x \ln x + \frac{1}{x} \cdot e^x$,
 $\therefore f'(1) = e \times \ln 1 + 1 \times e = e$.
故答案为: e .

【标注】 【知识点】 利用公式和四则运算法则求导

2. 已知函数 $f(x) = (2x + 1)e^x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(0)$ 的值为 _____ .

【答案】 3

【解析】 $\because f'(x) = (2x + 3)e^x$, $\therefore f'(0) = 3$.

【标注】 【知识点】 利用公式和四则运算法则求导

3. 已知函数 $f(x) = ax \ln x$, $x \in (0, +\infty)$, 其中 a 为实数, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 若 $f'(1) = 3$, 则 a 的值为 _____ .

【答案】 3

【解析】 已知函数 $f(x) = ax \ln x$, 求得导函数为 $f'(x) = a \ln x + ax \cdot \frac{1}{x} = a(\ln x + 1)$,
则 $f'(1) = a = 3$,
故答案为 3 .

【标注】 【素养】 逻辑推理

【素养】 数学运算

【知识点】 利用公式和四则运算法则求导

【知识点】 对数的概念及其运算

2. 思路总结

思路总结:

1、掌握基本初等函数的求导公式;

2、掌握导数的四则运算公式及其运用；

3. 模拟演练

4. 已知函数 $f(x) = e^x(2 - \ln x)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数 , 则 $f'(1)$ 的值为 _____ .

【答案】 e

【解析】 根据题意 , 函数 $f(x) = e^x(2 - \ln x) = 2e^x - e^x \ln x$,

其导数 $f'(x) = 2e^x - e^x \ln x - \frac{e^x}{x}$,

则 $f'(1) = 2e^1 - e^1 \ln 1 - \frac{e}{1} = e$,

故答案为 : e .

【标注】 【知识点】 利用公式和四则运算法则求导

【素养】 数学运算

5. 已知函数 $f(x) = \frac{1-x}{x} + \ln x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数 , 则 $f'(2)$ 的值为 _____ .

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】 $f(x) = \frac{1-x}{x} + \ln x = \frac{1}{x} - 1 + \ln x$,

$\therefore f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$.

$\therefore f'(2) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

【标注】 【知识点】 利用公式和四则运算法则求导

【素养】 逻辑推理

【素养】 数学运算

6. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(x) = 2xf'(e) + \ln x$, 则 $f(e) =$ _____ .

【答案】 -1

【解析】 $f'(x) = 2f'(e) + \frac{1}{x}$, $f'(e) = 2f'(e) + \frac{1}{e}$, 得 $f'(e) = -\frac{1}{e}$,

$\therefore f(e) = 2ef'(e) + \ln e = -1$.

故答案为 : -1 .

【标注】 【知识点】 利用公式和四则运算法则求导

二、切线方程

1. 真题分析

7. 曲线 $y = \cos x - \frac{x}{2}$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 _____ .

【答案】 $x + 2y - 2 = 0$

【解析】 由题意, 可知: $y' = -\sin x - \frac{1}{2}$,

$$\therefore y'|_{x=0} = -\sin 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ 曲线 $y = \cos x - \frac{x}{2}$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为: $y - 1 = -\frac{1}{2}x$,

整理得: $x + 2y - 2 = 0$.

【标注】【知识点】求在某点处的切线方程

8. 已知函数 $f(x) = 4x^3 + 3tx^2 - 6t^2x + t - 1, x \in \mathbf{R}$, 其中 $t \in \mathbf{R}$.

当 $t = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

【答案】 (1) $y = -6x$.

【解析】 (1) 当 $t = 1$ 时,

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x, f(0) = 0, f'(x) = 12x^2 + 6x - 6$$

$$f'(0) = -6.$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的

切线方程为 $y = -6x$.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】 求在某点处的切线方程; 求函数单调区间 (含参二次型导函数); 求函数零点 (含参二次型导函数)

9. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 设函数 $f(x) = ax - \ln x$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线为 l , 则 l 在 y 轴上的截距为 _____ .

【答案】 1

【解析】 由题意可知 $f'(x) = a - \frac{1}{x}$, 所以 $f'(1) = a - 1$,

因为 $f(1) = a$, 所以切点坐标为 $(1, a)$,
 所以切线 l 的方程为 $y - a = (a - 1)(x - 1)$,
 即 $y = (a - 1)x + 1$.
 令 $x = 0$, 得 $y = 1$,
 即直线 l 在 y 轴上的截距为 1 .

【标注】【知识点】导数的几何意义；求在某点处的切线方程

2. 思路总结

思路总结：

一、求曲线在某点处切线方程步骤：

- 1、计算曲线导函数以及切点处的导数作为切线斜率；
- 2、计算切点函数值；
- 3、点斜式写出切线方程；

二、已知切线方程求参数：

- 1、切线斜率等于切点处导数；
- 2、切点处函数值等于切线在切点处函数值；

3. 模拟演练

10. 设点 P 为函数 $f(x) = \frac{1}{2} \left(x^3 - \frac{1}{x} \right)$ 图象上任一点，且 $f(x)$ 在点 P 处的切线的倾斜角为 α ，则 α 的取值范围为 _____ .

【答案】 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right)$

【解析】 解： $\because f(x) = \frac{1}{2} \left(x^3 - \frac{1}{x} \right)$,
 $\therefore f'(x) = \frac{1}{2} \left(3x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \geq \sqrt{3}$,
 点 P 为函数 $f(x) = \frac{1}{2} \left(x^3 - \frac{1}{x} \right)$ 图象上任一点，
 则过点 P 的切线的斜率的范围： $k \geq \sqrt{3}$,
 过点 P 的切线的倾斜角为 α , $\tan \alpha \geq \sqrt{3}$,
 过点 P 的切线的倾斜角取值范围： $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right)$.
 故答案为： $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right)$.

【标注】【知识点】导数的几何意义；导数的几何意义的实际应用

11. 已知曲线 $y = \frac{1}{x} + \frac{e^x}{a}$ 在 $x = 1$ 处的切线 l 与直线 $2x + 3y = 0$ 垂直, 则实数 a 的值为 _____ .

【答案】 $\frac{2}{5}e$

【解析】 由曲线 $y = \frac{1}{x} + \frac{e^x}{a}$,
 则 $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(\frac{e^x}{a}\right)' = \frac{-1}{x^2} + \frac{e^x}{a} = -\frac{1}{x^2} + \frac{e^x}{a}$,
 $x = 1$ 时, $y'|_{x=1} = -1 + \frac{e}{a}$,
 $\therefore$ 曲线 $y = \frac{1}{x} + \frac{e^x}{a}$ 在 $x = 1$ 处的切线 l 与直线 $2x + 3y = 0$ 垂直,
 $\therefore$ 直线 l 的斜率为 $-\frac{3}{2}$,
 $-1 + \frac{e}{a} = -\frac{3}{2}$,
 所以 $a = \frac{2}{5}e$.
 故答案为: $\frac{2}{5}e$.

【标注】 【知识点】直线的垂直; 导数的几何意义; 求在某点处的切线方程

12. 设曲线 $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 处的切线与直线 $x - ay + 1 = 0$ 平行, 则实数 $a =$ _____ .

【答案】 -1

【解析】 $\therefore$ 切线与直线 $x - ay + 1 = 0$ 平行, 斜率为 $\frac{1}{a}$,
 又 $y' = \frac{-1 - \cos x}{\sin^2 x}$,
 所以切线斜率 $k = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$,
 所以 $x - ay + 1 = 0$ 的斜率为 -1 ,
 即 $\frac{1}{a} = -1$, 解得 $a = -1$.
 故答案为: -1 .

【标注】 【知识点】导数的几何意义; 导数的几何意义的实际应用; 利用公式和四则运算法则求导

13. 曲线 $y = x(3 \ln x + 1)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 _____ .

【答案】 $y = 4x - 3$

【解析】 求导函数, 可得 $y' = 3 \ln x + 4$
 当 $x = 1$ 时, $y' = 4$,
 $\therefore$ 曲线 $y = x(3 \ln x + 1)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为

$$y - 1 = 4(x - 1), \text{ 即 } y = 4x - 3.$$

【标注】【知识点】导数的几何意义

【素养】数学运算

14. 已知曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$, 则过点 $P(2, 4)$ 的切线方程是 _____.

【答案】 $4x - y - 4 = 0$ 或 $y = x + 2$

【解析】 $\because P(2, 4)$ 在 $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$ 上, 又 $y' = x^2$,

$\therefore$ 斜率 $k = 2^2 = 4$.

$\therefore$ 所求直线方程为 $y - 4 = 4(x - 2)$, $4x - y - 4 = 0$.

当切点不是点 P 时, 设切点为 (x_1, y_1) , 根据切线过点 P , 可得:

$$x_1^2 = \frac{y_1 - 4}{x_1 - 2} \text{ 又 } y_1 = \frac{1}{3}x_1^3 + \frac{4}{3}, \text{ 可解出 } x_1 = -1, y_1 = 1 \text{ (舍去 } (2, 4) \text{)},$$

所以切线方程为 $y - 1 = x + 1$,

即切线方程为 $y = x + 2$.

故答案为: $4x - y - 4 = 0$ 或 $y = x + 2$.

【标注】【知识点】导数的几何意义

15. 已知 $f(x)$ 为奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \ln(-x) + 2x$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程是 _____.

【答案】 $x - y + 1 = 0$

【解析】 设 $x > 0$, 则 $-x < 0$, $f(-x) = \ln x - 2x$,

$\because$ 函数 $f(x)$ 是奇函数,

$$\therefore f(x) = -f(-x) = -\ln x + 2x,$$

$$\therefore f'(x) = -\frac{1}{x} + 2,$$

$$x = 1, f'(1) = 1, f(1) = 2,$$

$\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y - 2 = x - 1$,

即为 $x - y + 1 = 0$.

故答案为: $x - y + 1 = 0$.

【标注】【知识点】利用函数奇偶性求函数解析式

【素养】数学运算

16. 已知 a, b 为正实数, 直线 $y = x - a$ 与曲线 $y = \ln(x + b)$ 相切, 则 $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $5 + 2\sqrt{6}$

【解析】 $y' = \frac{1}{x+b}$,

由切线方程 $y = x - a$ 可得 $k = 1$,

切点横坐标为 $1 - b$, 切点 $(1 - b, 0)$,

代入 $y = x - a$, 得 $a + b = 1$,

$\because a, b$ 为正实数,

$$\therefore \frac{2}{a} + \frac{3}{b} = (a + b) \left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b} \right)$$

$$= 2 + 3 + \frac{2b}{a} + \frac{3a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{6},$$

$$\text{当且仅当 } a = \frac{\sqrt{6}}{3}b, \text{ 即 } a = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}, b = 3 - \sqrt{6},$$

取得最小值 $5 + 2\sqrt{6}$.

【标注】 【知识点】 利用基本不等式求最值; 基本不等式的实际应用; 导数的几何意义; 已知切线方程求参数

17. 直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = ax^2 + 2 + \ln x$ 相切于点 $P(1, 4)$, 则 b 的值为 _____ .

【答案】 -1

【解析】 $y = ax^2 + 2 + \ln x, y' = 2ax + \frac{1}{x}$,

$$\therefore \begin{cases} k + b = 4 \\ a + 2 = 4 \\ k = 2a + 1 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ k = 5 \end{cases}.$$

故答案为: -1 .

【标注】 【知识点】 求在某点处的切线方程; 导数的几何意义

三、 单调区间与极值

1. 真题分析

18. 已知函数 $f(x) = a^x, g(x) = \log_a x$, 其中 $a > 1$.

求函数 $h(x) = f(x) - x \ln a$ 的单调区间.

【答案】 (1) 单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

【解析】 (1) 由已知, $h(x) = a^x - x \ln a$,

$$\text{有 } h'(x) = a^x \ln a - \ln a.$$

$$\text{令 } h'(x) = 0, \text{ 解得 } x = 0.$$

由 $a > 1$, 可知当 x 变化时, $h'(x)$, $h(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以函数 $h(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

【标注】【知识点】公切线存在性问题

19. 设 $a \in \mathbf{Z}$, 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$ 在区间 $(1, 2)$ 内有一个零点 x_0 , $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.
求 $g(x)$ 的单调区间.

【答案】 (1) $g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$, $(\frac{1}{4}, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-1, \frac{1}{4})$.

【解析】 (1) 由 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$, 可得 $g(x) = f'(x) = 8x^3 + 9x^2 - 6x - 6$,
进而可得 $g'(x) = 24x^2 + 18x - 6$. 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = -1$, 或 $x = \frac{1}{4}$.

当 x 变化时, $g'(x)$, $g(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{4}, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以, $g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$, $(\frac{1}{4}, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-1, \frac{1}{4})$.

【标注】【知识点】直接求函数的单调性(不含参); 利用导数解决不等式能成立问题; 利用导数求单调性证不等式

20. 设 $a \in [-2, 0]$, 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - (a+5)x, & x \leq 0 \\ x^3 - \frac{a+3}{2}x^2 + ax, & x > 0 \end{cases}$.

证明 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 内单调递增;

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】(1) 设函数 $f_1(x) = x^2 - (a+5)x (x \leq 0)$, $f_2(x) = x^3 - \frac{a+3}{2}x^2 + ax (x \geq 0)$,

① $f'_1(x) = 3x^2 - (a+5)$, 由于 $a \in [-2, 0]$, 从而当 $-1 < x < 0$ 时,

$$f'_1(x) = 3x^2 - (a+5) < 3 - a - 5 \leq 0,$$

所以函数 $f_1(x)$ 在区间 $(-1, 0]$ 内单调递减.

② $f'_2(x) = 3x^2 - (a+3)x + a = (3x-a)(x-1)$, 由于 $a \in [-2, 0]$, 所以当

$0 < x < 1$ 时, $f'_2(x) < 0$; 当 $x > 1$ 时, $f'_2(x) > 0$.

即函数 $f_2(x)$ 在区间 $[0, 1)$ 内单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 内单调递增.

综合①, ②及 $f_1(0) = f_2(0)$, 可知函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 内单调递增.

【标注】【知识点】双变量问题; 导数的几何意义

21. 设函数 $f(x) = (x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)$, 其中 $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}$, 且 t_1, t_2, t_3 是公差为 d 的等差数列.
若 $d = 3$, 求 $f(x)$ 的极值.

【答案】(1) 极大值为 $f(t_2 - \sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 9 \times (-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$, 极小值为
 $f(t_2 + \sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 9 \times (\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$.

【解析】(1) 由已知可得

$$f(x) = (x-t_2+3)(x-t_2)(x-t_2-3) = (x-t_2)^3 - 9(x-t_2) = x^3 - 3t_2x^2 + (3t_2^2-9)x - t_2^3 + 9t_2$$

故 $f'(x) = 3x^2 - 6t_2x + 3t_2^2 - 9$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = t_2 - \sqrt{3}$, 或
 $x = t_2 + \sqrt{3}$,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表

x	$(-\infty, t_2 - \sqrt{3})$	$t_2 - \sqrt{3}$	$(t_2 - \sqrt{3}, t_2 + \sqrt{3})$	$t_2 + \sqrt{3}$	$(t_2 + \sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(t_2 - \sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 9 \times (-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$.

函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(t_2 + \sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 9 \times (\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】求参数范围 (含参二次型导函数)

22. 已知函数 $f(x) = x^3 + k \ln x (k \in \mathbf{R})$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

当 $k = 6$ 时,

①

求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 .

② 求函数 $g(x) = f(x) - f'(x) + \frac{9}{x}$ 的单调区间和极值 .

【答案】 (1)① $y = 9x - 8$.

② 单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$, 极小值为1 , 无极大值 .

【解析】 (1)① 当 $k = 6$ 时 , $f(x) = x^3 + 6 \ln x$,

$$\text{故 } f'(x) = 3x^2 + \frac{6}{x} ,$$

$$\text{可得 } f(1) = 1 , f'(1) = 9 ,$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 1 = 9(x - 1)$,

$$\text{即 } y = 9x - 8 .$$

② 依题意 , $g(x) = x^3 - 3x^2 + 6 \ln x + \frac{3}{x}$, $x \in (0, +\infty)$,

$$\text{从而可得 } g'(x) = 3x^2 - 6x + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} ,$$

$$\text{整理可得 } g'(x) = \frac{3(x-1)^3(x+1)}{x^2} ,$$

$$\text{令 } g'(x) = 0 , \text{ 解得 } x = 1 ,$$

当 x 变化时 , $g'(x)$, $g(x)$ 的变化情况如下表 :

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 , 函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$, $g(x)$ 的极小值为 $g(1) = 1$, 无极大值 .

【标注】【知识点】双变量问题

2. 思路总结

单调区间以及极值求解步骤 :

- 1、确定函数的定义域 ;
- 2、计算导函数以及导函数零点 , 并且根据导数零点写出区间 ;
- 3、判断导数在各个区间里面的正负 ;
- 4、根据导函数正负确定单调区间以及极值情况。

3. 模拟演练

23. 已知函数 $f(x) = x^2 \ln x$

求函数 $f(x)$ 的单调区间；

【答案】 (1) 函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$ ，单调递增区间是 $(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$ ；

【解析】 (1) 函数的定义域为 $(0, +\infty)$

$$f'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1), \text{ 得 } x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

当 x 变化时， $f'(x)$ ， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		极小值	

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$ ，单调递增区间是 $(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值；利用导数求函数的单调性、单调区间；利用导数证明不等式恒成立问题；导数与极值；利用公式和四则运算法则求导

24. 已知函数 $f(x) = x^2 e^x$.

求 $f(x)$ 的单调区间与极值 .

【答案】 (1) $f(x)$ 在 $(-2, 0)$ 上递减，在 $(-\infty, -2)$ 和 $(0, +\infty)$ 上递增，极大值为 $\frac{4}{e^2}$ ，极小值为0 .

【解析】 (1) $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$,

令 $f'(x) > 0$ 得 $x < -2$ 或 $x > 0$ ；令 $f'(x) < 0$ 得 $-2 < x < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-2, 0)$ 上递减，在 $(-\infty, -2)$ 和 $(0, +\infty)$ 上递增，

$\therefore f(x)$ 在 $x = -2$ 处取极大值，且极大值为 $f(-2) = \frac{4}{e^2}$,

在 $x = 0$ 处取极小值，且极小值为 $f(0) = 0$.

【标注】【知识点】直接求函数的极值（不含参）；利用导数解决不等式能成立问题

25. 设函数 $f(x) = e^x \cos x$ ， $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数 .

求 $f(x)$ 的单调区间 .

【答案】 (1) $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right] (k \in \mathbf{Z})$,
 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

【解析】(1) 由已知, 有 $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$,

因此, 当 $x \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right) (k \in \mathbf{Z})$ 时,

有 $\sin x > \cos x$, 得 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in \left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right) (k \in \mathbf{Z})$ 时,

有 $\sin x < \cos x$, 得 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right] (k \in \mathbf{Z})$,

$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

26. 已知函数 $f(x) = e^x(x+a) - x^2 + bx$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = x - 2$.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间及极值.

【答案】(1) $-2, 2$.

(2) 增区间为 $(-\infty, \ln 2)$ 与 $(1, +\infty)$, 减区间为 $(\ln 2, 1)$, 极大值为 $-(2 - \ln 2)^2$, 极小值为 $-e + 1$.

【解析】(1) 由 $f(x) = e^x(x+a) - x^2 + bx$,

求导, $f'(x) = e^x(x+a+1) - 2x + b$,

由已知可得 $f(0) = a = -2$,

由 $k = 0$,

$\therefore f'(0) = a + b + 1 = 1$, 计算得出 $a = -2$,

$b = 2$.

(2) 由 (1) 可以知道: $f(x) = e^x(x+1) - x^2 + 2x$,

求导 $f'(x) = (e^x - 2)(x - 1)$,

令 $f'(x) > 0$, 计算得出 $x < \ln 2$ 或 $x > 1$,

令 $f'(x) < 0$, 计算得出 $\ln 2 < x < 1$,

$\therefore f(x)$ 的增区间为 $(-\infty, \ln 2)$ 与 $(1, +\infty)$,

减区间为 $(\ln 2, 1)$,

$\therefore f(x)$ 的极大值为 $f(\ln 2) = -(2 - \ln 2)^2$,

极小值为 $f(1) = -e + 1$.

【标注】【知识点】函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率; 已知切线方程求参数; 求解函数

四、综合创新

已知含参函数单调性确定参数范围

27. 若函数 $f(x) = e^x(\sin x + a \cos x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $(-\infty, 1]$
B. $(-\infty, 1)$
C. $[1, +\infty)$
D. $(1, +\infty)$

【答案】 A

【解析】特殊值法.

当 $a = 0$ 时, 函数为 $f(x) = e^x \sin x$, 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 上 $f'(x) > 0$, 函数单调递增成立, 排除 C, D.

当 $a = 1$ 时, 函数为 $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$, $f'(x) = 2e^x \cos x$, 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 上 $f'(x) > 0$,

所以, $f(x)$ 单调递增.

因此选A.

【标注】 **【知识点】** 正弦函数的图象和性质

【知识点】 已知单调性求参数的取值范围

【素养】 数学运算

28. 若 $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + b \ln x$ 在 $(1, +\infty)$ 上是减函数, 则实数 b 的取值范围 _____.

【答案】 $(-\infty, -1]$

【解析】 $\because f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + b \ln x$, 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\therefore f'(x) = -(x-2) + \frac{b}{x} = \frac{-x^2 + 2x + b}{x},$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + b \ln x \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上是减函数,}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + b}{x} \leq 0 \text{ 在 } x \in (1, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

$$\therefore -x^2 + 2x + b \leq 0 \text{ 在 } x \in (1, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

即 $b \leq x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$,

所以 $b \leq -1$.

即 b 的范围为 $(-\infty, -1]$.

【标注】【知识点】已知单调性求参数的取值范围

29. 函数 $f(x) = x(\ln x - ax)$ 有两个极值点, 则实数 a 的取值范围为 ().

A. $(0, +\infty)$

B. $(0, \frac{1}{2})$

C. $(0, 1)$

D. $(-\infty, 0)$

【答案】 B

【解析】 $f(x) = x \ln x - ax^2 (x > 0)$, $f'(x) = \ln x + 1 - 2ax$,

令 $g(x) = \ln x + 1 - 2ax$,

$\because$ 函数 $f(x) = x(\ln x - ax)$ 有两个极值点,

则 $g(x) = 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有两个实数根,

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 2a = \frac{1 - 2ax}{x},$$

当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$, 则函数 $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增,

因此 $g(x) = 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上不可能有两个实数根, 应舍去,

当 $a > 0$ 时, 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2a}$,

令 $g'(x) > 0$, 解得 $0 < x < \frac{1}{2a}$, 此时函数 $g(x)$ 单调递增,

令 $g'(x) < 0$, 解得 $x > \frac{1}{2a}$, 此时函数 $g(x)$ 单调递减,

$\therefore$ 当 $x = \frac{1}{2a}$ 时, 函数 $g(x)$ 取得极大值,

当 x 趋近于 0 与 x 趋近于 $+\infty$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$,

要使 $g(x) = 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有两个实数根,

则 $g\left(\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{\ln 2a} > 0$, 解得 $0 < a < \frac{1}{2}$.

故答案为: $(0, \frac{1}{2})$.

【标注】【知识点】已知极值情况求参数范围; 已知零点或根情况求参数范围; 隐零点问题; 函数零点存在定理

构造函数解不等式

30. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = x(f'(x) - \ln x)$, 且 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$, 则 $ef(e^x) < f'\left(\frac{1}{e}\right) + 1$ 的解集是 ().

A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, +\infty)$ C. $(0, \frac{1}{e})$ D. $(\frac{1}{e}, +\infty)$ **【答案】** A**【解析】** 方法一：由 $f(x) = x(f'(x) - \ln x)$ ，整理得 $xf'(x) - f(x) = x \ln x$ ，即

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{\ln x}{x}.$$

两边积分整理得： $f(x) = \frac{x}{2} \ln^2 x + cx$ ， $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$ ，代入求得 $c = \frac{1}{2}$ 。

$$\therefore f(x) = \frac{x}{2} \ln^2 x + \frac{1}{2}x.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x + \frac{1}{2}, \text{ 令 } \ln x = t, t \in \mathbf{R}.$$

$$\therefore f'(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t+1)^2 \geq 0.$$

 $\therefore f(x)$ 单调递增。

$$\text{由 } f(x) = x(f'(x) - \ln x), f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}, f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0.$$

$$\text{由 } e f(e^x) < f'\left(\frac{1}{e}\right) + 1, \text{ 整理得 } f(e^x) < \frac{1}{e} = f\left(\frac{1}{e}\right) = f(e^{-1}).$$

由函数单调性递增，即 $e^x < e^{-1}$ ，由 $y = e^x$ ，单调递增，则 $x < -1$ 。 $\therefore$ 不等式的解集 $(-\infty, -1)$ 。

故选 A。

方法二：由 $f(x) = x(f'(x) - \ln x)$ ，

$$\text{令 } x = \frac{1}{e},$$

$$\text{则 } f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \left(f'\left(\frac{1}{e}\right) - \ln \frac{1}{e}\right),$$

$$\text{即 } \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \left(f'\left(\frac{1}{e}\right) + 1\right),$$

$$\therefore f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0.$$

$$f(x) = x(f'(x) - \ln x),$$

$$f(x) = x f'(x) - x \ln x,$$

$$x f'(x) - f(x) = x \ln x,$$

$$\frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot x'}{x^2} = \frac{\ln x}{x},$$

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \frac{\ln x}{x},$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{f(x)}{x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0.$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \Rightarrow g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = 1.$$

$$\text{由 } g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ 得 } f(x) = x g(x), x > 0,$$

则 $f'(x) = g(x) + xg'(x) = g(x) + \ln x$,
 $f'(x) = g'(x) + \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{\ln x + 1}{x}$.
 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) > 0$, $f'(x)$ 递增 ,
 当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$, $f'(x)$ 递减 ,
 $f'(x)_{\min} = f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$,
 $\therefore f'(x) \geq 0$ 对 $x > 0$ 成立 ,
 $\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增 ,
 $ef(e^x) < f'\left(\frac{1}{e}\right) + 1$,
 即 $ef(e^x) < 1$,
 即 $f(e^x) < \frac{1}{e} = f\left(\frac{1}{e}\right) = f(e^{-1})$,
 即 $e^x < e^{-1}$,
 即 $x < -1$.
 故选 A .

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式

【特色题型】选择压轴

【素养】数学运算

31. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$, 满足 $f(x) > 1$, $y = f(x) - 3$ 的奇函数 , 且 $f(x) + f'(x) > 1$, 则不等式 $\ln(f(x) - 1) > \ln 2 - x$ 的解集为 () .
- A. $(1, +\infty)$
 B. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
 C. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
 D. $(0, +\infty)$

【答案】 D

【解析】 $\because f(x) - 3$ 为奇函数 ,

$$\therefore f(0) - 3 = 0 \text{ 即 } f(0) = 3 .$$

$$\text{令 } g(x) = e^x f(x) - e^x ,$$

$$\therefore g'(x) = e^x [f(x) + f'(x) - 1] > 0 .$$

$\therefore g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增 ,

$$\ln(f(x) - 1) > \ln 2 - x ,$$

$$\text{即 } \ln(f(x) - 1) > \ln \frac{2}{e^x} ,$$

$$\therefore f(x) - \frac{2}{e^x} > 1,$$

$$e^x f(x) - e^x > 2,$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } g(0) = e^0 f(x) - e^0 = 2,$$

故不等式 $\ln(f(x) - 1) > \ln 2 - x$ 的解集为

综上 $(0, +\infty)$.

故选D.

【标注】【知识点】导数与单调性

32. 已知奇函数 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f'(x)$ 为其导函数, 且满足以下条件① $x > 0$ 时,

$f'(x) < \frac{3f(x)}{x}$; ② $f(1) = \frac{1}{2}$; ③ $f(2x) = 2f(x)$, 则不等式 $\frac{f(x)}{4x} < 2x^2$ 的解集为 _____.

【答案】 $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

【解析】 令 $F(x) = \frac{f(x)}{x^3}$, 则 $F'(x) = \frac{xf'(x) - 3f(x)}{x^4}$,

$$\therefore x > 0 \text{ 时, } f'(x) < \frac{3f(x)}{x},$$

$$\therefore F'(x) < 0,$$

$\therefore F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $f(x)$ 为奇函数,

$$\therefore F(x) = \frac{f(x)}{x^3} \text{ 为偶函数,}$$

$\therefore F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

$$\text{又 } f(1) = \frac{1}{2}, f(2x) = 2f(x),$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}f(1) = \frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8},$$

$$\therefore F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = 8,$$

$$\therefore \frac{f(x)}{4x} < 2x^2 \text{ 等价于 } \frac{f(x)}{x^3} < 8, \text{ 即 } F(x) < F\left(\frac{1}{4}\right), \text{ 故 } |x| > \frac{1}{4},$$

$$\text{解得: } x > \frac{1}{4} \text{ 或 } x < -\frac{1}{4}.$$

$$\text{故答案为: } \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right).$$

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式