

导数综合 (二) 练习题

1. 已知函数 $f(x) = e^x \left(x - \frac{a}{x} - 2 \right)$, 其定义域为 $(0, +\infty)$, (其中常数 $e = 2.71828 \dots$, 是自然对数的底数) .

若函数 $f(x)$ 为定义域上的增函数, 且 $f(x_1) + f(x_2) = -4e$, 证明: $x_1 + x_2 \geq 2$.

2. 已知 $a \neq 0$, 函数 $f(x) = |e^x - e| + e^x + ax$.

已知当 $a < -e$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , ($x_1 < x_2$), 求证: $f(x_1 x_2) > a + e$.

3. 设函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 - bx$.

当 $a = b = 0$ 时, 令 $H(x) = f(x) - \frac{1}{x}$, $G(x) = mx$, 若 $H(x)$ 与 $G(x)$ 的图象有两个交点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 求证: $x_1 x_2 > 2e^2$.

4. 设函数 $f(x) = e^x - ax + a$ ($a \in \mathbf{R}$) .

若 $f(x)$ 图像与 x 轴交于 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ 两点, 求证: $x_1 x_2 < x_1 + x_2$.

5. 设函数 $f(x) = a \ln x - bx^2$, 其图象在点 $P(2, f(2))$ 处切线的斜率为 -3 .

当 $a = 2$ 时, 令 $g(x) = f(x) - kx$, 设 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) 是函数 $y = g(x)$ 的两个零点, x_0 是 x_1 与 x_2 的等差中项, 求证: $g'(x_0) < 0$ ($g'(x)$ 为函数 $g(x)$ 的导函数) .

6. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + (2-a)x$.

(1) 设 $a > 0$, 证明: 当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $f\left(\frac{1}{a} + x\right) > f\left(\frac{1}{a} - x\right)$.

(2) 若函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点, 线段 AB 中点的横坐标为 x_0 , 证明: $f'(x_0) < 0$.

7. 已知函数 $f(x) = x^2 - ax$, $g(x) = \ln x$.

设 $h(x) = f(x) + g(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 且 $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 求证: $h(x_1) - h(x_2) > \frac{3}{4} - \ln 2$;

8. 已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 证明: $f(x) \leq x^2 + x - 1$.

(2) 求证: 对任意正整数 n , 都有 $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < e$ (其中 $e \approx 2.7183$ 为自然对数的底数) .

9. 已知函数 $f(x) = a \ln x - ax$, $g(x) = e^x - ax^2 + 3a$ (其中 e 是自然对数的底数, $e = 2.71828 \dots$) .

(1) 若函数 $g(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围 .

(2) 求证: 对任意正整数 n , 都有 $\frac{2}{2+1} \times \frac{2^2}{2^2+1} \times \cdots \times \frac{2^n}{2^n+1} > \frac{1}{e}$.

