

导数综合 (三) 练习题

1. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, $|a| \leq 1$. 已知函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3a(a-4)x + b$, $g(x) = e^x f(x)$.
- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 已知函数 $y = g(x)$ 和 $y = e^x$ 的图象在公共点 (x_0, y_0) 处有相同的切线.
- ① 求证: $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数等于 0.
- ② 若关于 x 的不等式 $g(x) \leq e^x$ 在区间 $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.

【答案】 (1) 递增区间为 $(-\infty, a)$, $(4-a, +\infty)$, 递减区间为 $(a, 4-a)$.

(2) ① 证明见解析.

② $[-7, 1]$.

【解析】 (1) 由 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3a(a-4)x + b$, 可得

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 3a(a-4) = 3(x-a)(x-(4-a)),$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = a$ 或 $x = 4-a$.

由 $|a| < 1$ 可得 $a < 4-a$,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化如下表所示,

x	$(-\infty, a)$	a	$(a, 4-a)$	$4-a$	$(4-a, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, a)$ 和 $(4-a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(a, 4-a)$.

(2) ① 因为 $g'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$, 由题意有 $\begin{cases} g(x_0) = e^{x_0} \\ g'(x_0) = e^{x_0} \end{cases}$,

$$\text{所以 } \begin{cases} f(x_0)e^{x_0} = e^{x_0} \\ e^{x_0}(f(x_0) + f'(x_0)) = e^{x_0} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} f(x_0) = 1 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}.$$

所以 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数等于 0.

② 因为 $g(x) \leq e^x$, $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$, 由 $e^x > 0$, 可得 $f(x) \leq 1$.

又因为 $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 0$, 故 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点, 由 (1) 知 $x_0 = a$.

另一方面, 由于 $|a| \leq 1$, 故 $a+1 < 4-a$,

由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(a-1, a)$ 内单调递增, 在 $(a, a+1)$ 内单调递减,

故当 $x_0 = a$ 时, $f(x) \leq f(a) = 1$ 在 $[a-1, a+1]$ 上恒成立, 从而 $g(x) \leq e^x$ 在 $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ 上恒成立.

由 $f(a) = a^3 - 6a^2 - 3a(a-4)a + b = 1$, 得 $b = 2a^3 - 6a^2 + 1$, $-1 \leq a \leq 1$

令 $t(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$, $x \in [-1, 1]$, 所以 $t'(x) = 6x^2 - 12x$,

令 $t'(x) = 0$, 解得 $x = 2$ (舍去), 或 $x = 0$.

因为 $t(-1) = -7$, $t(1) = -3$, $t(0) = 1$, 故 $t(x)$ 的值域为 $[-7, 1]$.

所以, b 的取值范围是 $[-7, 1]$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

2. 设函数 $f(x) = e^{mx} + x^2 - mx$.

(1) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;

(2) 若对于任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq e - 1$, 求 m 的取值范围.

【答案】 (1) $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) $[-1, 1]$.

【解析】 (1) $f'(x) = me^{mx} + 2x - m$,

$f'(x) = m^2 e^{mx} + 2 \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 所以 $f'(x) = me^{mx} + 2x - m$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

而 $f'(0) = 0$, 所以 $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$, $x < 0$ 时 $f'(x) < 0$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 由 (1) 知 $f(x)_{\min} = f(0) = 1$,

当 $m = 0$ 时, $f(x) = 1 + x^2$, 此时 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值是 2

所以此时 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq e - 1$ 成立,

当 $m \neq 0$ 时, $f(-1) = e^{-m} + 1 + m$, $f(1) = e^m + 1 - m$

$g(m) = f(1) - f(-1) = e^m - e^{-m} - 2m$,

$g'(m) = e^m + e^{-m} - 2 \geq 0$,

所以 $g(m) = e^m - e^{-m} - 2m$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

而 $g(0) = 0$, 所以 $m > 0$ 时, 即 $f(1) > f(-1)$

所以 $m < 0$ 时 $g(m) < 0$, 即 $f(1) < f(-1)$,

当 $m > 0$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq f(1) - 1 = e^m - m \leq e - 1$,

所以 $0 < m \leq 1$

当 $m < 0$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq f(-1) - 1 = e^{-m} + m = e^{-m} - (-m) \leq e - 1$

可得 $-m \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m < 0$

综上 m 的取值范围是 $[-1, 1]$.

【标注】【知识点】二阶导问题; 利用导数解决不等式恒成立问题

3. 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性 .

(2) 设 $g(x) = f(2x) - 4bf(x)$, 当 $x > 0$ 时, $g(x) > 0$, 求 b 的最大值 .

(3) 已知 $1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$, 估计 $\ln 2$ 的近似值 (精确到 0.001) .

【答案】 (1) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增 .

(2) b 的最大值为 2 .

(3) 0.693 .

【解析】 (1) $f'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$, 等号仅当 $x = 0$ 时成立 .

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增 .

(2) $g(x) = f(2x) - 4bf(x) = e^{2x} - e^{-2x} - 4b(e^x - e^{-x}) + (8b - 4)x$,

$$g'(x) = 2[e^{-x} + e^{-2x} - 2b(e^x + e^{-x}) + (4b - 2)]$$

$$= 2(e^x + e^{-x} - 2)(e^x + e^{-x} - 2b + 2) .$$

(i) 当 $b \leq 2$ 时, $g'(x) \geq 0$, 等号仅当 $x = 0$ 时成立, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增 .

而 $g(0) = 0$, 所以对任意 $x > 0$, $g(x) > 0$.

(ii) 当 $b > 2$ 时, 若 x 满足 $2 < e^x + e^{-x} < 2b - 2$, 即

$$0 < x < \ln(b - 1 + \sqrt{b^2 - 2b}) , g'(x) < 0 ,$$

而 $g(0) = 0$, 因此当 $0 < x \leq \ln(b - 1 + \sqrt{b^2 - 2b})$ 时, $g(x) < 0$.

综上, b 的最大值为 2 .

(3) 由 (2) 知, $g(\ln \sqrt{2}) = \frac{3}{2} - 2\sqrt{2}b + 2(2b - 1)\ln 2$.

$$\text{当 } b = 2 \text{ 时, } g(\ln \sqrt{2}) = \frac{3}{2} - 4\sqrt{2} + 6\ln 2 > 0, \ln 2 > \frac{8\sqrt{2} - 3}{12} > 0.6928 ;$$

$$\text{当 } b = \frac{3\sqrt{2}}{4} + 1 \text{ 时, } \ln(b - 1 + \sqrt{b^2 - 2b}) = \ln \sqrt{2} .$$

$$g(\ln \sqrt{2}) = -\frac{3}{2} - 2\sqrt{2} + (3\sqrt{2} + 2)\ln 2 < 0 .$$

$$\ln 2 < \frac{18 + \sqrt{2}}{28} < 0.6934 .$$

所以 $\ln 2$ 的近似值为 0.693 .

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间；利用导数求函数的最值

4. 设函数 $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数 .

(1) 若 $a = b = c$, $f(4) = 8$, 求 a 的值 .

(2) 若 $a \neq b$, $b = c$, 且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3, 1, 3\}$ 中, 求 $f(x)$ 的极小值 .

(3) 若 $a=0, 0 < b \leq 1, c=1$, 且 $f(x)$ 的极大值为 M , 求证: $M \leq \frac{4}{27}$.

【答案】(1) $a=2$.

(2) -32 .

(3) 证明见解析.

【解析】(1) 因为 $a=b=c$, 所以 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = (x-a)^3$,

因为 $f(4) = 8$,

所以 $(4-a)^3 = 8$,

解得 $a=2$.

(2) 因为 $b=c$,

所以 $f(x) = (x-a)(x-b)^2$

$= x^3 - (a+2b)x^2 + b(2a+b)x - ab^2$,

从而 $f'(x) = 3(x-b)\left(x - \frac{2a+b}{3}\right)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x=b$ 或 $x = \frac{2a+b}{3}$.

因为 $a, b, \frac{2a+b}{3}$ 都在集合 $\{-3, 1, 3\}$ 中, 且 $a \neq b$,

所以 $\frac{2a+b}{3} = 1, a=3, b=-3$.

此时, $f(x) = (x-3)(x+3)^2$,

$f'(x) = 3(x+3)(x-1)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x=-3$ 或 $x=1$, 列表如下:

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1) = (1-3)(1+3)^2 = -32$.

(3) 方法一: 因为 $a=0, c=1$,

所以 $f(x) = x(x-b)(x-1) = x^3 - (b+1)x^2 + bx$,

$f'(x) = 3x^2 - 2(b+1)x + b$.

因为 $0 < b \leq 1$,

所以 $\Delta = 4(b+1)^2 - 12b$

$= (2b-1)^2 + 3 > 0$,

则 $f'(x)$ 有 2 个不同的零点,

设为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

由 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = \frac{b+1 - \sqrt{b^2 - b + 1}}{3}$,

$$x_2 = \frac{b+1 + \sqrt{b^2 - b + 1}}{3},$$

列表如下：

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 的极大值 $M = f(x_1)$.

$$\begin{aligned} M &= f(x_1) = x_1^3 - (b+1)x_1^2 + bx_1 \\ &= [3x_1^2 - 2(b+1)x_1 + b] \left(\frac{x_1}{3} - \frac{b+1}{9} \right) - \frac{2(b^2 - b + 1)}{9}x_1 + \frac{b(b+1)}{9} \\ &= \frac{-2(b^2 - b + 1)(b+1)}{27} + \frac{b(b+1)}{9} + \frac{2}{27}(\sqrt{b^2 - b + 1})^3 \\ &= \frac{b(b+1)}{27} - \frac{2(b-1)^2(b+1)}{27} + \frac{2}{27} \left[\sqrt{b(b-1)+1} \right]^3 \\ &\leq \frac{b(b+1)}{27} + \frac{2}{27} \leq \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

因此 $M \leq \frac{4}{27}$.

方法二：因为 $0 < b \leq 1$,

所以 $x_1 \in (0, 1)$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) = x(x-b)(x-1) \leq x(x-1)^2$,

令 $g(x) = x(x-1)^2$,

$x \in (0, 1)$,

则 $g'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1)$,

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{3}$, 列表如下：

x	$\left(0, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以当 $x = \frac{1}{3}$ 时, $g(x)$ 取得极大值, 且是最大值,

故 $g(x)_{\max} = g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$.

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) \leq g(x) \leq \frac{4}{27}$.

因此 $M \leq \frac{4}{27}$.

【标注】【知识点】求函数最值（含参二次型导函数）

5. 设函数 $f(x) = (x+a)\ln x$, $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$ 已知曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $2x - y = 0$ 平行.

(1) 求 a 的值.

(2) 是否存在自然数 k , 使得方程 $f(x) = g(x)$ 在 $(k, k+1)$ 内存在唯一的根? 如果存在, 求出 k ; 如果不存在, 请说明理由.

(3) 设函数 $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, ($\min\{p, q\}$ 表示 p, q 中的较小值), 求 $m(x)$ 的最大值.

【答案】 (1) $a = 1$

(2) 存在 $k = 1$, 使得 $f(x) = g(x)$ 在 $(k, k+1)$ 内存在唯一的根.

(3) $m(x)_{\max} = g(2) = \frac{4}{e^2}$

【解析】 (1) $f'(x) = \ln x + \frac{x+a}{x}$, $a = 1$.

(2) 存在 $k = 1$, 使得 $f(x) = g(x)$ 在 $(k, k+1)$ 内存在唯一的根.

$$\text{设 } h(x) = f(x) - g(x) = (1+x)\ln x - \frac{x^2}{e^x},$$

当 $0 < x \leq 1$ 时, $(1+x)\ln x \leq 0$, $-\frac{x^2}{e^x} < 0$, 则 $h(x) < 0$. 若使得 $h(x) = 0$, 则 $x > 1$.

$$h'(x) = \ln x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{x^2 - 2x}{e^x} = \ln x + \frac{1}{x} + \frac{x^2 - 2x + e^x}{e^x} > \ln x + \frac{1}{x} + \frac{(x-1)^2}{e^x} > 0$$

说明 $h(x)$ 在 $x > 1$ 上单调递增, 又 $h(1) = -\frac{1}{e} < 0$,

$$h(2) = 3\ln 2 - \frac{4}{e^2} > 1 - 1 = 0,$$

即 $h(x)$ 在 $2x > 1$ 上存在零点, 其中 $k = 1$.

(3) $h(x_0) = 0$, 可知 $2x_0 > 1$, $\therefore m(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, x_0] \\ g(x) & x \in (x_0, +\infty) \end{cases}$

当 $x \in (0, 1]$, $f(x) \leq 0$;

当 $x \in (1, x_0]$, $f'(x) = \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0$, 说明 $f(x)$ 在 $x \in (1, x_0]$ 上单调递增, 最大值在 x_0 处取得, 为 $f(x_0)$;

当 $x \in (x_0, +\infty)$, $g'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x}$, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, 说明在 $x_2 = 2$ 处函数取得最大值,

$$\therefore g(x)_{\max} = g(2) > g(x_0) = f(x) > 0, \text{ 又 } g(2) = \frac{4}{e^2}, \therefore m(x)_{\max} = g(2) = \frac{4}{e^2}.$$

【标注】【知识点】直接求函数的最值(不含参); 求函数零点(含参指对型导函数)

6. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ ($a > 0, b \in \mathbf{R}$)有极值, 且导函数 $f'(x)$ 的极值点是 $f(x)$ 的零点.

(极值点是指函数取极值时对应的自变量的值)

(1) 求 b 关于 a 的函数关系式, 并写出定义域.

(2) 证明: $b^2 > 3a$.

(3) 若 $f(x)$, $f'(x)$ 这两个函数的所有极值之和不小于 $-\frac{7}{2}$, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $b = \frac{2a^2}{9} + \frac{3}{a}$, $a > 3$.

(2) 证明见解析.

(3) $(3, 6]$.

【解析】 (1) 因为 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, 所以 $f''(x) = 6x + 2a = 0$, 所以 $x = -\frac{a}{3}$,

$$\text{所以 } f(-\frac{a}{3}) = 0, \text{ 所以 } b = \frac{2a^2}{9} + \frac{3}{a},$$

因为 $\Delta = 4a^2 - 12b > 0$, 所以 $a > 3$.

$$\begin{aligned} (2) \quad b^2 - 3a &= \frac{4}{81}a^4 - \frac{5}{3}a + \frac{9}{a^2}, \\ &= \frac{1}{81a^2}(4a^3 - 27)(a^3 - 27), \end{aligned}$$

因为 $a > 3$, 所以 $b^2 - 3a > 0$,

所以 $b^2 > 3a$.

(3) 由 (1) $x_1 + x_2 = -\frac{2a}{3}$, $x_1x_2 = b$;

$$f(x_1) + f(x_2) = (x_1^3 + x_2^3) + a(x_1^2 + x_2^2) + b(x_1 + x_2) + 2$$

$$= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] + a[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] + b(x_1 + x_2) + 2$$

$$= \frac{4}{27}a^3 - \frac{2ab}{3} + 2 = 2f(-\frac{a}{3}) = 0,$$

$$\text{所以 } \frac{2}{9}a^2 + \frac{3}{a} - \frac{a^2}{3} \geq -\frac{7}{2}, \quad 2a^3 - 63a - 54 \leq 0,$$

$$\text{即 } (a-6)(2a^2 + 12a + 9) \leq 0, \text{ 又 } a > 3,$$

解得 $3 < a \leq 6$,

所以 a 的取值范围为 $(3, 6]$.

【标注】【知识点】利用韦达定理解双变量问题; 已知极值情况求参数范围

7. 已知常数 $a > 0$, 函数 $f(x) = \ln(1+ax) - \frac{2x}{x+2}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 且 $f(x_1) + f(x_2) > 0$, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) 答案见解析.

(2) $(\frac{1}{2}, 1)$.

【解析】 (1) 对函数 $f(x)$ 求导可得

$$f'(x) = \frac{a}{1+ax} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{a(x+2)^2 - 4(1+ax)}{(1+ax)(x+2)^2} = \frac{ax^2 - 4(1-a)}{(1+ax)(x+2)^2},$$

因为 $(1+ax)(x+2)^2 > 0$, 所以当 $1-a \leq 0$ 时,

即 $a \geq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立,

则函数 $f(x)$ 在 $(0+\infty)$ 单调递增;

当 $a < 1$ 时, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$,

则函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}, +\infty\right)$ 单调递增的.

(2) 由(1)可知, 当 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 不存在极值点, 因而 $0 < a < 1$.

又 $f(x)$ 的极值点只可能是 $x_1 = 2\sqrt{\frac{1-a}{a}}$, $x_2 = -2\sqrt{\frac{1-a}{a}}$,

且由 $f(x)$ 的定义可知, $x > -\frac{1}{a}$ 且 $x \neq -2$, 所以 $-2\sqrt{\frac{1-a}{a}} > -\frac{1}{a}$,

$-2\sqrt{\frac{1-a}{a}} \neq -2$,

解得 $a \neq \frac{1}{2}$, 此时 x_1, x_2 分别是 $f(x)$ 的极小值点和极大值点.

而 $f(x_1) + f(x_2) = \ln(1+ax_1) - \frac{2x_1}{x_1+2} + \ln(1+ax_2) - \frac{2x_2}{x_2+2}$

$= \ln(1+ax_1+ax_2+a^2x_1x_2) - \frac{4x_1x_2+4x_2+4x_1}{x_1x_2+2x_1+2x_2+4}$

$= \ln(2a-1)^2 - \frac{4(a-1)}{2a-1} = \ln(2a-1)^2 + \frac{2}{2a-1} - 2$

令 $2a-1 = x$, 由 $0 < a < 1$ 且 $a \neq \frac{1}{2}$ 知,

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $-1 < x < 0$; 当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $0 < x < 1$.

记 $g(x) = \ln x^2 + \frac{2}{x} - 2$,

①当 $-1 < x < 0$ 时, $g(x) = 2\ln(-x) + \frac{2}{x} - 2$, 所以

$g'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{2x-2}{x^2} < 0$,

因此 $g(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 上单调减, 从而 $g(x) < g(-1) = -4 < 0$,

故当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $f(x_1) + f(x_2) < 0$.

②当 $0 < x < 1$ 时, $g(x) = 2\ln x + \frac{2}{x} - 2$, $g'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{2x-2}{x^2} < 0$,

因此 $g(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 从而 $g(x) > g(1) = 0$,

故当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $f(x_1) + f(x_2) > 0$.

综上, 满足条件的 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

【标注】【知识点】函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率; 利用导数求函数的单调性、单调区间; 已知极值情况求参数范围

8. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ 处导数相等, 证明: $f(x_1) + f(x_2) > 8 - 8\ln 2$.

(2) 若 $a \leq 3 - 4\ln 2$, 证明: 对于任意 $k > 0$, 直线 $y = kx + a$ 与曲线 $y = f(x)$ 有唯一的公共点.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x},$$

当 $x \geq 4$ 时, $f(x)$ 单调递增,

当 $0 < x < 4$ 时, $f(x)$ 单调递减,

$$\because f'(x_1) = f'(x_2),$$

$$\therefore \frac{\sqrt{x_1} - 2}{2x_1} = \frac{\sqrt{x_2} - 2}{2x_2},$$

$$\therefore \sqrt{x_1 x_2} = 2(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}),$$

$$\therefore x_1 x_2 = 4(x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}),$$

$$x_1 x_2 - 8\sqrt{x_1 x_2} = 4(x_1 + x_2) > 8\sqrt{x_1 x_2} \quad (x_1 \neq x_2),$$

$$\therefore x_1 x_2 > 16\sqrt{x_1 x_2},$$

$$\therefore \sqrt{x_1 x_2} > 16,$$

$$\therefore f(x_1) + f(x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - \ln x_1 - \ln x_2$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x_1 x_2} - \ln(x_1 x_2),$$

$$\text{令 } \sqrt{x_1 x_2} = t > 16, f(x_1) + f(x_2) = g(t),$$

$$g(t) = \frac{1}{2}t - \ln t^2, g'(t) = \frac{t - 4}{2t},$$

当 $t > 4$ 时, $g(t)$ 单调递增,

$$\therefore g(t) > g(16) = 8 - 8\ln 2,$$

$$\therefore f(x_1) + f(x_2) > 8 - 8\ln 2.$$

$$(2) \text{ 设函数 } g(x) = \sqrt{x} - \ln x - kx, \text{ 则 } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} - k = \frac{-2kx + \sqrt{x} - 2}{2x},$$

$$\text{当 } \Delta = 1 - 16k \leq 0, \text{ 即 } k \geq \frac{1}{16} \text{ 时,}$$

$$g'(x) < 0,$$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 从正无穷减到负无穷,

$\therefore \sqrt{x} - \ln x - kx = a$ 只有一个实数根,

$$\text{当 } \Delta = 1 - 16k > 0, \text{ 即 } 0 < k < \frac{1}{16} \text{ 时,}$$

$g'(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减, 在 (x_1, x_2) 上单调递增, 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore g(x_1) = \sqrt{x_1} - \ln x_1 - kx_1, \therefore -2kx_1 + \sqrt{x_1} - 2 = 0,$$

$$\sqrt{x_1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 16k}}{4k} = \frac{16k}{4k(1 + \sqrt{1 - 16k})} = \frac{4}{1 + \sqrt{1 - 16k}} \in (2, 4),$$

$$\therefore x_1 \in (4, 16)$$

$$\therefore g(x_1) = \frac{\sqrt{x_1}}{2} - \ln x_1 + 1 > 3 - 4\ln 2,$$

$\therefore$ 综合得证, 当 $a \leq 3 - 4\ln 2$ 时, $\sqrt{x} - \ln x - kx = a$ 只有一个实数根.

【标注】【知识点】求函数零点(含参一次型导函数); 双变量问题; 通过构造函数证明不等式

9. 设函数 $f(x) = (x - t_1)(x - t_2)(x - t_3)$, 其中 $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$, 且 t_1, t_2, t_3 是公差为 d 的等差数列.

(1) 若 $t_2 = 0, d = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程.

(2) 若 $d = 3$, 求 $f(x)$ 的极值.

(3) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -(x - t_2) - 6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点, 求 d 的取值范围.

【答案】 (1) $x + y = 0$.

(2) 极大值为 $f(t_2 - \sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 9 \times (-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$, 极小值为

$$f(t_2 + \sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 9 \times (\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}.$$

(3) $(-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, +\infty)$.

【解析】 (1) 由已知, 可得 $f(x) = x(x - 1)(x + 1) = x^3 - x$,

$$\text{故 } f'(x) = 3x^2 - 1. \text{ 因此 } f(0) = 0, f'(0) = -1,$$

又因为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$,

故所求切线方程为 $x + y = 0$.

(2) 由已知可得

$$f(x) = (x - t_2 + 3)(x - t_2)(x - t_2 - 3) = (x - t_2)^3 - 9(x - t_2) = x^3 - 3t_2x^2 + (3t_2^2 - 9)x - t_2^3 + 9t_2$$

$$\text{故 } f'(x) = 3x^2 - 6t_2x + 3t_2^2 - 9, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x = t_2 - \sqrt{3}, \text{ 或}$$

$$x = t_2 + \sqrt{3},$$

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表

x	$(-\infty, t_2 - \sqrt{3})$	$t_2 - \sqrt{3}$	$(t_2 - \sqrt{3}, t_2 + \sqrt{3})$	$t_2 + \sqrt{3}$	$(t_2 + \sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(t_2 - \sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 9 \times (-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$.

函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(t_2 + \sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 9 \times (\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$.

(3)

曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -(x - t_2) - 6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点等价于关于 x 的方程 $(x - t_2 + d)(x - t_2)(x - t_2 - d) + (x - t_2) + 6\sqrt{3} = 0$ 有三个互异的实数解，
令 $u = x - t_2$ 可得 $u^3 + (1 - d^2)u + 6\sqrt{3} = 0$ ，

设函数 $g(x) = x^3 + (1 - d^2)x + 6\sqrt{3}$ ，

则曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -(x - t_2) - 6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点等价于函数 $y = g(x)$ 有三个零点。

$g'(x) = 3x^2 + (1 - d^2)$ ，

当 $d^2 \leq 1$ 时， $g'(x) \geq 0$ ，

这时 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，不合题意。

当 $d^2 > 1$ 时，令 $g'(x) = 0$ ，

解得 $x_1 = -\frac{\sqrt{d^2 - 1}}{\sqrt{3}}$ ， $x_2 = \frac{\sqrt{d^2 - 1}}{\sqrt{3}}$ ，

易得， $g(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上单调递增，在 $[x_1, x_2]$ 上单调递减，在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增。

$g(x)$ 的极大值 $g(x_1) = g(-\frac{\sqrt{d^2 - 1}}{\sqrt{3}})$

$= \frac{2\sqrt{3}(d^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{9} + 6\sqrt{3} > 0$ ，

$g(x)$ 的极小值 $g(x_2) = g(\frac{\sqrt{d^2 - 1}}{\sqrt{3}})$

$= -\frac{2\sqrt{3}(d^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{9} + 6\sqrt{3}$ ，

若 $g(x_2) \geq 0$ ，由 $g(x)$ 的单调性可知函数 $y = g(x)$ 至多有两个零点，不合题意。

若 $g(x_2) < 0$ ，即 $(d^2 - 1)^{\frac{3}{2}} > 27$ ，

也就是 $|d| > \sqrt{10}$ ，此时 $|d| > x_2$ ，

$g(|d|) = |d| + 6\sqrt{3} > 0$ ，且 $-2|d| < x_1$ ，

$g(-2|d|) = -6|d|^3 - 2|d| + 6\sqrt{3} < -62\sqrt{10} + 6\sqrt{3} < 0$ ，

从而由 $g(x)$ 的单调性，可知函数 $y = g(x)$ 在区间 $(-2|d|, x_1)$ ， (x_1, x_2) ， $(x_2, |d|)$ 内各有一个零点，符合题意。

所以， d 的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, +\infty)$ 。

【标注】【知识点】 求参数范围（含参二次型导函数）

10. 设 a 为实数，函数 $f(x) = (x - a)^2 + |x - a| - a(a - 1)$ 。

(1) 若 $f(0) \leq 1$ ，求 a 的取值范围；

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(3) 当 $a \geq 2$ 时，讨论 $f(x) + \frac{4}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的零点个数。

【答案】(1) $a \leq \frac{1}{2}$

(2) $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增. $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递减.

(3) 当 $a = 2$ 时, $f(x) + \frac{4}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有一个零点
当 $a > 2$ 时, $f(x) + \frac{4}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点

【解析】(1) $f(0) = a^2 + |a| - a^2 + a = |a| + a$

当 $a \leq 0$ 时, 显然成立.

当 $a > 0$ 时, $2a \leq 1$ 即 $a \leq \frac{1}{2}$

综上: $a \leq \frac{1}{2}$.

(2) 当 $x \geq a$ 时,

$$f(x) = (x-a)^2 + (x-a) - a^2 + a = x^2 - 2ax + a^2 + x - a - a^2 + a = x^2 - (2a-1)x$$

对称轴为 $x = a - \frac{1}{2}$, $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

当 $x < a$ 时

$$f(x) = (x-a)^2 + (a-x) - a^2 + a = x^2 - 2ax - x + 2a = x^2 - (2a+1)x + 2a$$

对称轴为 $x = \frac{2a+1}{2} = a + \frac{1}{2}$, $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递减.

(3) 依题画出 $f(x)$ 的图像, 因为 $f(x) = -a^2 + a$, $y = -\frac{4}{x}$ 在 $x = a$ 处取 $-\frac{4}{a}$

因为 $a \geq 2$, 所以 $f(a) \leq -2$, $-\frac{4}{a} \geq -2$

(i) 当 $a = 2$ 时, $f(x)$ 与 $y = -\frac{4}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有一个交点

所以, $f(x) + \frac{4}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有一个零点.

(ii) 当 $a > 2$ 时, $f(x) + \frac{4}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个交点,

所以 $f(x) + \frac{4}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点.

【标注】【知识点】求零点个数问题(含参); 求单调区间

11. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + k}{e^x}$ (k 为常数, $e = 2.71828\dots$ 是自然对数的底数), 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行.

(1) 求 k 的值.

(2) 求 $f(x)$ 单调区间.

(3) 设 $g(x) = (x^2 + x)f'(x)$, 其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 证明: 对任意 $x > 0$, $g(x) < 1 + e^{-2}$

【答案】(1) $k = 1$.

(2) $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, 单调递减区间为 $(1, +\infty)$.

(3) 证明见解析.

【解析】(1) 由 $f(x) = \frac{\ln x + k}{e^x}$,

$$\text{得 } f'(x) = \frac{1 - kx - x \ln x}{xe^x}, \quad x \in (0, +\infty),$$

由于曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行, 所以 $f'(1) = 0$, 因此 $k = 1$.

(2) 由 (I) 得 $f(x) = \frac{1}{xe^x}(1 - x - x \ln x)$, $x \in (0, +\infty)$,

$$\text{令 } h(x) = 1 - x - x \ln x, \quad x \in (0, +\infty),$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h(x) < 0$.

又 $e^x > 0$, 所以 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$;

$x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$.

因此 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, 单调递减区间为 $(1, +\infty)$.

(3) 因为 $g(x) = (x^2 + x)f'(x)$,

$$\text{所以 } g(x) = \frac{x+1}{e^x}(1 - x - x \ln x), \quad x \in (0, +\infty).$$

因此对任意 $x > 0$, $g(x) < 1 + e^{-2}$ 等价于 $1 - x - x \ln x < \frac{e^x}{x+1}(1 + e^{-2})$.

由 (II) $h(x) = 1 - x - x \ln x$, $x \in (0, +\infty)$,

$$\text{所以 } h'(x) = -\ln x - 2 = -(\ln x - \ln e^{-2}), \quad x \in (0, +\infty),$$

因此当 $x \in (0, e^{-2})$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增;

当 $x \in (e^{-2}, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减.

所以 $h(x)$ 的最大值为 $h(e^{-2}) = 1 + e^{-2}$,

$$\text{故 } 1 - x - x \ln x \leq 1 + e^{-2}.$$

$$\text{设 } \varphi(x) = e^x - (x+1).$$

$$\text{因为 } \varphi'(x) = e^x - 1 = e^x - e^0,$$

所以 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调递增,

$$\varphi(x) > \varphi(0) = 0, \text{ 故 } x \in (0, +\infty) \text{ 时, } \varphi(x) = e^x - (x+1) > 0,$$

$$\text{即 } \frac{e^x}{x+1} > 1.$$

$$\text{所以 } 1 - x - x \ln x \leq 1 + e^{-2} < \frac{e^x}{x+1}(1 + e^{-2}).$$

因此对任意 $x > 0$, $g(x) < 1 + e^{-2}$.

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式; 直接求函数的单调性 (不含参)

12. 设 $f(x) = \ln(x+1) + \sqrt{x+1} + ax + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$, a, b 为常数), 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = \frac{3}{2}x$ 在 $(0, 0)$ 点相切.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 证明: 当 $0 < x < 2$ 时, $f(x) < \frac{9x}{x+6}$.

【答案】(1) $a = 0, b = -1$.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 由 $y = f(x)$ 过 $(0, 0)$ 点, 得 $b = -1$.

由 $y = f(x)$ 在 $(0, 0)$ 点的切线斜率为 $\frac{3}{2}$, 又

$$y'_{x=0} = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + a \right)_{x=0} = \frac{3}{2} + a,$$

得 $a = 0$.

(2) 方法一: 由均值不等式,

当 $x > 0$ 时, $2\sqrt{(x+1) \cdot 1} < x+1+1 = x+2$, 故 $\sqrt{x+1} < \frac{x}{2} + 1$.

记 $h(x) = f(x) - \frac{9x}{x+6}$, 则

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{54}{(x+6)^2} \\ &= \frac{2+\sqrt{x+1}}{2(x+1)} - \frac{54}{(x+6)^2} < \frac{x+6}{4(x+1)} - \frac{54}{(x+6)^2} \\ &= \frac{(x+6)^3 - 216(x+1)}{4(x+1)(x+6)^2}. \end{aligned}$$

令 $g(x) = (x+6)^3 - 216(x+1)$, 则当 $0 < x < 2$ 时,

$$g'(x) = 3(x+6)^2 - 216 < 0.$$

因此 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 内是递减函数, 又由 $g(0) = 0$, 得

$$g(x) < 0, \text{ 所以 } h'(x) < 0.$$

因此 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 内是递减函数, 又 $h(0) = 0$, 得 $h(x) < 0$. 于是

$$\text{当 } 0 < x < 2 \text{ 时 } f(x) < \frac{9x}{x+6}.$$

方法二: 由 (I) 知以 $f(x) = \ln(x+1) + \sqrt{x+1} - 1$.

由均值不等式,

当 $x > 0$ 时, $2\sqrt{(x+1) \cdot 1} < x+1+1 = x+2$,

$$\text{故 } \sqrt{x+1} < \frac{x}{2} + 1. \quad ①$$

$$\text{令 } k(x) = \ln(x+1) - x, \text{ 则 } k(0) = 0, k'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} < 0,$$

$$\text{故 } k(x) < 0, \text{ 即 } \ln(x+1) < x. \quad ②$$

$$\text{由 } ①② \text{ 得, 当 } x > 0 \text{ 时以 } f(x) < \frac{3}{2}x.$$

记 $h(x) = (x+6)f(x) - 9x$, 则当 $0 < x < 2$ 时,

$$\begin{aligned} h'(x) &= f(x) + (x+6)f'(x) - 9 < \frac{3}{2}x + (x+6)\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) - 9 \\ &= \frac{1}{2(x+1)}[3x(x+1) + (x+6)(2+\sqrt{x+1}) - 18(x+1)] \\ &< \frac{1}{2(x+1)}[3x(x+1) + (x+6)\left(3+\frac{x}{2}\right) - 18(x+1)] \\ &= \frac{x}{4(x+1)}(7x-18) < 0 \end{aligned}$$

因此 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 内单调递减, 又 $h(0) = 0$,

所以 $h(x) < 0$, 即 $f(x) < \frac{9x}{x+6}$.

方法三: 欲证 $f(x) < \frac{9x}{x+6}$ 对 $x \in (0, 2)$ 成立.

即证 $\ln(x+1) + \sqrt{x+1} - 1 < \frac{9x}{x+6}$ 对 $x \in (0, 2)$ 成立.

令 $\sqrt{x+1} = t$, $x+1 = t^2$, $x = t^2 - 1$.

即证 $\ln t^2 + t - 1 < \frac{9(t^2 - 1)}{t^2 - 1 + 6}$ 对 $t \in (1, \sqrt{3})$ 成立

即证 $2\ln t + t - 1 < \frac{9(t^2 - 1)}{t^2 + 5}$ 对 $t \in (1, \sqrt{3})$ 成立.

又易证得 $\ln t < t - 1$, $2\ln t + t - 1 < 3(t - 1)$ 对 $t \in (1, \sqrt{3})$ 成立.

故只需证 $3(t - 1) < \frac{9(t^2 - 1)}{t^2 + 5}$ 对 $t \in (1, \sqrt{3})$ 成立.

即证 $1 < \frac{3(t+1)}{t^2 + 5}$ 对 $t \in (1, \sqrt{3})$ 成立.

即证 $t^2 + 5 < 3t + 3$ 对 $t \in (1, \sqrt{3})$ 成立.

即证 $t^2 - 3t + 2 < 0$ 对 $t \in (1, \sqrt{3})$ 成立.

即证 $(t - 1)(t - 2) < 0$ 对 $t \in (1, \sqrt{3})$ 成立.

上式显然成立, 证毕.

【标注】【知识点】已知切线方程求参数; 导数的几何意义; 导数与最值; 通过构造函数证明不等式

13. 已知函数 $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 若直线 $y = kx + 1$ 与 $f(x)$ 的反函数的图象相切, 求实数 k 的值.

(2) 设 $x > 0$, 讨论曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = mx^2 (m > 0)$ 公共点的个数.

(3) 设 $a < b$, 比较 $\frac{f(a) + f(b)}{2}$ 与 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 的大小, 并说明理由.

【答案】(1) e^{-2}

(2) 当 $m \in \left(0, \frac{e^2}{4}\right)$ 时, 有0个公共点; 当 $m = \frac{e^2}{4}$ 时, 有1个公共点; 当 $m \in \left(\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$ 时有2个公共点.

(3) $\frac{f(a) + f(b)}{2} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, 理由见解析.

【解析】(1) $f(x)$ 的反函数 $g(x) = \ln x$. 设直线 $y = kx + 1$ 与 $g(x) = \ln x$ 相切于点

$$P(x_0, y_0) \Rightarrow \begin{cases} kx_0 + 1 = \ln x_0 \\ k = g'(x_0) = \frac{1}{x_0} \end{cases} \Rightarrow x_0 = e^2, k = e^{-2}. \text{ 所以 } k = e^{-2}.$$

(2) 当 $x > 0$, $m > 0$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = mx^2 (m > 0)$ 的公共点个数即方程 $f(x) = mx^2$ 根的个数.

由 $f(x) = mx^2 \Rightarrow m = \frac{e^x}{x^2}$, 令 $h(x) = \frac{e^x}{x^2} \Rightarrow h'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$,

则 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 这时 $h(x) \in (h(2), +\infty)$;

$h(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 这时 $h(x) \in (h(2), +\infty)$, $h(2) = \frac{e^2}{4}$.

$h(2)$ 是 $y = h(x)$ 的极小值即最小值.

所以对曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = mx^2 (m > 0)$ 的公共点个数, 讨论如下:

当 $m \in (0, \frac{e^2}{4})$ 时, 有 0 个公共点; 当 $m = \frac{e^2}{4}$ 时, 有 1 个公共点; 当

$m \in (\frac{e^2}{4}, +\infty)$ 时有 2 个公共点.

$$\begin{aligned} (3) \quad & \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(b - a + 2) \cdot f(a) + (b - a - 2) \cdot f(b)}{2 \cdot (b - a)} \\ & = \frac{(b - a + 2) \cdot e^a + (b - a - 2) \cdot e^b}{2 \cdot (b - a)} = \frac{(b - a + 2) + (b - a - 2) \cdot e^{b-a}}{2 \cdot (b - a)} \cdot e^a, \end{aligned}$$

令 $g(x) = x + 2 + (x - 2) \cdot e^x$, $x > 0$, 则

$$g'(x) = 1 + (1 + x - 2) \cdot e^x = 1 + (x - 1) \cdot e^x.$$

$g'(x)$ 的导函数 $g''(x) = (1 + x - 1) \cdot e^x = x \cdot e^x > 0$, 即 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g'(0) = 0$, 因此 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增而 $g(0) = 0$, 所以在 $(0, +\infty)$ 上 $g(x) > 0$.

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $g(x) = x + 2 + (x - 2) \cdot e^x > 0$ 且 $a < b$,

$$\therefore \frac{(b - a + 2) + (b - a - 2) \cdot e^{b-a}}{2 \cdot (b - a)} \cdot e^a > 0,$$

所以当 $a < b$ 时, $\frac{f(a) + f(b)}{2} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

【标注】【知识点】参变分离法求零点个数; 通过构造函数证明不等式; 二阶导问题

14. 已知 a 为正实数, n 为自然数, 抛物线 $y = -x^2 + \frac{a^n}{2}$ 与 x 轴正半轴相交于点 A . 设 $f(n)$ 为该抛物线在点 A 处的切线在 y 轴上的截距.

(1) 用 a 和 n 表示 $f(n)$;

(2) 求对所有 n 都有 $\frac{f(n) - 1}{f(n) + 1} \geq \frac{n}{n + 1}$ 成立的 a 的最小值;

(3) 当 $0 < a < 1$ 时, 比较 $\frac{1}{f(1) - f(2)} + \frac{1}{f(2) - f(4)} + \cdots + \frac{1}{f(n) - f(2n)}$ 与 $6 \cdot \frac{f(1) - f(n+1)}{f(0) - f(1)}$ 的大小, 并说明理由.

【答案】 (1) $f(n) = a^n$

(2) $\sqrt{17}$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k) - f(2k)} > \frac{27}{4} \cdot \frac{f(1) - f(n)}{f(0) - f(1)}$$

【解析】(1) 由已知得, 交点A的坐标为 $(\sqrt{\frac{a^n}{2}}, 0)$,

对 $y = -x^2 + \frac{1}{2}a^n$ 求导得 $y' = -2x$, 则抛物线在点A处的

切线方程为 $y = -\sqrt{2a^n}(x - \sqrt{\frac{a^n}{2}})$,

即 $y = -\sqrt{2a^n}x + a^n$, 则 $f(n) = a^n$

(2) 由(1)知 $f(n) = a^n$, 则 $\frac{f(n)-1}{f(n)+1} \geq \frac{n^3}{n^3+1}$ 成立的充要条件是 $a^n \geq 2n^3+1$

即知, $a^n \geq 2n^3+1$ 对所有 n 成立, 特别地, 取 $n=2$ 得到 $a \geq \sqrt{17}$

当 $a = \sqrt{17}$, $n \geq 3$ 时,

$$a^n > 4^n = (1+3)^n = 1 + C_n^1 \cdot 3 + C_n^2 \cdot 3^2 + C_n^3 \cdot 3^3 + \dots$$

$$\geq 1 + C_n^1 \cdot 3 + C_n^2 \cdot 3^2 + C_n^3 \cdot 3^3$$

$$= 1 + 2n^3 + \frac{1}{2}n[5(n-2)^2 + (2n-5)]$$

$$> 2n^3 + 1$$

当 $n=0, 1, 2$ 时, 显然 $(\sqrt{17})^n \geq 2n^3+1$

故 $a = \sqrt{17}$ 时, $\frac{f(n)-1}{f(n)+1} \geq \frac{n^3}{n^3+1}$ 对所有自然数 n 都成立

所以满足条件的 a 的最小值为 $\sqrt{17}$

(3) 由(1)知 $f(k) = a^k$, 则

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)-f(2k)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a^k - a^{2k}}, \quad \frac{f(1)-f(n)}{f(0)-f(1)} = \frac{a-a^n}{1-a}$$

$$\text{下面证明: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)-f(2k)} > \frac{27}{4} \cdot \frac{f(1)-f(n)}{f(0)-f(1)}$$

首先证明: 当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{1}{x-x^2} \geq \frac{27}{4}x$

设函数 $g(x) = \frac{27}{4}x(x^2-x) + 1, 0 < x < 1$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{81}{4}x(x - \frac{2}{3})$$

当 $0 < x < \frac{2}{3}$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $\frac{2}{3} < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$

故 $g(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上的最小值 $g(x)_{\min} = g(\frac{2}{3}) = 0$

所以, 当 $0 < x < 1$ 时, $g(x) \geq 0$, 即得 $\frac{1}{x-x^2} \geq \frac{27}{4}x$

由 $0 < a < 1$ 知 $0 < a^k < 1 (k \in \mathbf{N}^*)$, 因此 $\frac{1}{a^k - a^{2k}} \geq \frac{27}{4}a^k$, 从而

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)-f(2k)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a^k - a^{2k}}$$

$$\geq \frac{27}{4} \sum_{k=1}^n a^k$$

$$= \frac{27}{4} \cdot \frac{a - a^{n+1}}{1-a}$$

$$> \frac{27}{4} \cdot \frac{1-a^n}{1-a}$$

$$= \frac{27}{4} \cdot \frac{f(1)-f(n)}{f(0)-f(1)}$$

【标注】【知识点】数列与其他知识点综合；数列与函数综合