

导数综合 (三)

一、导数综合

1. 典型例题

🔗 恒成立求参数范围

1. 已知实数 $a \neq 0$, 设函数 $f(x) = a \ln x + \sqrt{x+1}$, $x > 0$.

(1) 当 $a = -\frac{3}{4}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若对任意 $x \in \left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$, 均有 $f(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{2a}$, 求 a 的取值范围. 注: $e = 2.71828 \dots$ 为自然对数的底数.

【答案】 (1) 单调递减区间为 $(0, 3)$, 单调递增区间为 $(3, +\infty)$.

(2) $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$.

【解析】 (1) 当 $a = -\frac{3}{4}$ 时, $f(x) = -\frac{3}{4} \ln x + \sqrt{1+x}$, $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{3}{4x} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{(\sqrt{1+x}-2)(2\sqrt{1+x}+1)}{4x\sqrt{1+x}},$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 3$,

当 $x > 3$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $0 < x < 3$ 时, $f'(x) < 0$,

所以, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 3)$, 单调递增区间为 $(3, +\infty)$.

(2) 由 $f(1) \leq \frac{1}{2a}$, 得 $0 < a \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$,

当 $0 < a \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时,

$$f(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{2a} \text{ 等价于 } \frac{\sqrt{x}}{a^2} - \frac{2\sqrt{1+x}}{a} - 2\ln x \geq 0,$$

令 $t = \frac{1}{a}$, 则 $t \geq 2\sqrt{2}$,

$$\text{设 } g(t) = t^2 \sqrt{x} - 2t \sqrt{1+x} - 2\ln x, t \geq 2\sqrt{2},$$

$$\text{则 } g(t) = \sqrt{x} \left(t - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)^2 - \sqrt{x} \cdot \frac{1+x}{x} - 2\ln x.$$

(i) 当 $x \in \left[\frac{1}{7}, +\infty\right)$ 时, $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \leq 2\sqrt{2}$,

$$\text{则 } g(t) \geq g(2\sqrt{2}) = 8\sqrt{x} - 4\sqrt{2}\sqrt{1+x} - 2\ln x,$$

$$\text{记 } p(x) = 4\sqrt{x} - 2\sqrt{2}\sqrt{1+x} - \ln x, x \geq \frac{1}{7},$$

$$\text{则 } p'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x} = \frac{2\sqrt{x}\sqrt{x+1} - \sqrt{2}x - \sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}},$$

故

x	$\frac{1}{7}$	$\left(\frac{1}{7}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
$p'(x)$		-	0	+
$p(x)$	$p\left(\frac{1}{7}\right)$	单调递减	极小值 $p(1)$	单调递增

所以, $p(x) \geq p(1) = 0$,

因此, $g(t) \geq g(2\sqrt{2}) = 2p(x) \geq 0$.

(ii) 当 $x \in \left[\frac{1}{e^2}, \frac{1}{7}\right)$ 时, $g(t) \geq g\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right) = \frac{-2\sqrt{x} \ln x - (x+1)}{\sqrt{x}}$,

令 $q(x) = 2\sqrt{x} \ln x + (x+1)$, $x \in \left[\frac{1}{e^2}, \frac{1}{7}\right]$, 则 $q'(x) = \frac{\ln x + 2}{\sqrt{x}} + 1 > 0$,

故 $q(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e^2}, \frac{1}{7}\right]$ 上单调递增, 所以 $q(x) \leq q\left(\frac{1}{7}\right)$,

由 (i) 得 $q\left(\frac{1}{7}\right) = -\frac{2\sqrt{7}}{7}p\left(\frac{1}{7}\right) < -\frac{2\sqrt{7}}{7}p(1) = 0$,

所以, $q(x) < 0$,

因此 $g(t) \geq g\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right) = -\frac{q(x)}{\sqrt{x}} > 0$,

由 (i) (ii) 得对任意 $x \in \left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$, $t \in [2\sqrt{2}, +\infty)$, $g(t) \geq 0$,

即对任意 $x \in \left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$, 均有 $f(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{2a}$,

综上所述, 所求 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

2. 已知函数 $f(x) = (1+x)e^{-2x}$, $g(x) = ax + \frac{x^3}{2} + 1 + 2x \cos x$, 当 $x \in [0, 1]$ 时,

(1) 求证: $1-x \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x}$.

(2) 若 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -3]$.

【解析】(1) 要证 $x \in [0, 1]$ 时, $(1+x)e^{-2x} \geq 1-x$, 只需证明 $(1+x)e^{-x} \geq (1-x)e^x$.

记 $h(x) = (1+x)e^{-x} - (1-x)e^x$, 则 $h'(x) = x(e^x - e^{-x})$, 当 $x \in (0, 1)$ 时,

$h'(x) > 0$,

因此 $h(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 上是增函数, 故 $h(x) \geq h(0) = 0$.

所以 $f(x) \geq 1 - x, x \in [0, 1]$.

要证 $x \in [0, 1]$ 时, $1 + x e^{-2x} \leq \frac{1}{1+x}$, 只需证明 $e^x \geq x + 1$.

记 $K(x) = e^x - x - 1$, 则 $K'(x) = e^x - 1$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $K'(x) > 0$,

因此 $K(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 上是增函数, 故 $K(x) \geq K(0) = 0$.

所以 $f(x) \leq \frac{1}{x+1}, x \in [0, 1]$.

综上, $1 - x \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x}, x \in [0, 1]$.

$$(2) f(x) - g(x) = (1+x)e^{-2x} - \left(ax + \frac{x^3}{2} + 1 + 2x \cos x\right)$$

$$\geq 1 - x - ax - 1 - \frac{x^3}{2} - 2x \cos x$$

$$= -x \left(a + 1 + \frac{x^2}{2} + 2 \cos x\right),$$

设 $G(x) = \frac{x^2}{2} + 2 \cos x$, 则 $G'(x) = x - 2 \sin x$.

记 $H(x) = x - 2 \sin x$, 则 $H'(x) = 1 - 2 \cos x$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $H'(x) < 0$,

于是 $G(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 上是减函数,

从而当 $x \in (0, 1)$ 时, $G'(x) < G'(0) = 0$, 故 $G(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是减数,

于是 $G(x) \leq G(0) = 2$, 从而 $a + 1 + G(x) \leq a + 3$.

所以, 当 $a \leq -3$ 时, $f(0) \geq g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上恒成立.

下面证明, 当 $a > -3$ 时, $f(x) \geq g(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 上不恒成立.

$$f(x) - g(x) \leq \frac{1}{1+x} - 1 - ax - \frac{x^3}{2} - 2x \cos x,$$

$$= \frac{-x}{1+x} - ax - \frac{x^3}{2} - 2x \cos x$$

$$= -x \left(\frac{1}{1+x} + a + \frac{x^2}{2} + 2 \cos x \right)$$

$$\text{记 } I(x) = \frac{1}{1+x} + a + \frac{x^2}{2} + 2 \cos x = \frac{1}{1+x} + a + G(x),$$

$$\text{则 } I'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} + G'(x), \text{ 当 } x \in (0, 1) \text{ 时, } I'(x) < 0.$$

故 $I(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是减函数,

于是 $I(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的值域为 $[a + 1 + 2 \cos 1, a + 3]$.

因为当 $a > -3$ 时, $a + 3 > 0$, 所以存在 $x \in (0, 1)$, 使得 $I(x_0) > 0$,

此时 $f(x_0) < g(x_0)$, 即 $f(x) \geq g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不恒成立.

综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -3]$.

【标注】【知识点】 利用导数解决不等式恒成立问题; 通过构造函数证明不等式

3. 设函数 $f(x) = (x-1)^3 - ax - b$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0 , 且 $f(x_1) = f(x_0)$, 其中 $x_1 \neq x_0$, 求证: $x_1 + 2x_0 = 3$;

(3) 设 $a > 0$, 函数 $g(x) = |f(x)|$, 求证: $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

【答案】(1) ① $a \leq 0$, $f(x)$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上单调递增;

② $a > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1 - \sqrt{\frac{a}{3}})$ 上单调递增, 在 $(1 - \sqrt{\frac{a}{3}}, 1 + \sqrt{\frac{a}{3}})$ 上单调递减, 在 $(1 + \sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 证明见解析.

(3) 证明见解析.

【解析】(1) $f(x) = (x-1)^3 - ax - b$, $f'(x) = 3(x-1)^2 - a$,

① $a \leq 0$, $f(x)$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上单调递增;

② $a > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1 - \sqrt{\frac{a}{3}})$ 上单调递增, 在 $(1 - \sqrt{\frac{a}{3}}, 1 + \sqrt{\frac{a}{3}})$ 上单调递减, 在 $(1 + \sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 由 $f'(x_0) = 0$ 得 $3(x_0-1)^2 = a$,

$$\therefore f(x_0) = (x_0-1)^3 - 3(x_0-1)^2 x_0 - b = (x_0-1)^2(-2x_0-1) - b,$$

$$f(3-2x_0) = (2-2x_0)^3 - 3(x_0-1)^2(3-2x_0) - b$$

$$= (x_0-1)^2(8-8x_0-9+6x_0) - b$$

$$= (x_0-1)^2(-2x_0-1) - b$$

$$\therefore f(3-2x_0) = f(x_0) = f(x_1),$$

$$\therefore x_1 + 2x_0 = 3.$$

(3) 欲证 $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$, 只需证在区间 $[0, 2]$ 上存在 x_1, x_2 , 使得

$$f(x_1) - f(x_2) \geq \frac{1}{2} \text{ 即可.}$$

① 当 $a \geq 3$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减,

$$f(2) = 1 - 2a - b, \quad f(0) = -1 - b,$$

$$f(0) - f(2) = 2a - 2 \geq 4 > \frac{1}{2}, \text{ 成立.}$$

② 当 $0 < a < 3$ 时,

$$f\left(1 - \sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3 - a\left(1 - \sqrt{\frac{a}{3}}\right) - b = -\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - a + a\sqrt{\frac{a}{3}} - b = \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} - a - b$$

$$f\left(1 + \sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - a\left(1 + \sqrt{\frac{a}{3}}\right) - b = -\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} - a - b,$$

$$\therefore f(2) = 1 - 2a - b, f(0) = -1 - b,$$

$$\therefore f(2) - f(0) = 2 - 2a,$$

$$\text{当 } 0 < a \leq \frac{3}{4} \text{ 时, } f(2) - f(0) = 2 - 2a \geq \frac{1}{2}, \text{ 成立,}$$

$$\text{当 } a > \frac{3}{4} \text{ 时, } f\left(1 - \sqrt{\frac{a}{3}}\right) - f\left(1 + \sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} > \frac{1}{2}, \text{ 成立.}$$

综上所述： $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$ 。

【标注】【知识点】求函数最值（含参二次型导函数）；求函数单调区间（含参二次型导函数）

备注：2016年高考真题天津卷理科第20题13分

4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 的斜率为1的切线方程 .

(2) 当 $x \in [-2, 4]$ 时, 求证: $x - 6 \leq f(x) \leq x$.

(3) 设 $F(x) = |f(x) - (x + a)| (a \in \mathbf{R})$, 记 $F(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最大值为 $M(a)$, 当 $M(a)$ 最小时, 求 a 的值 .

【答案】 (1) $y = x$ 和 $y = x - \frac{64}{27}$.

(2) 证明见解析 .

(3) $a = -3$.

【解析】 (1) $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1, x \in \mathbf{R}$.

$$\text{令 } f'(x) = 1, \text{ 解得 } x_1 = 0 \text{ 或 } x_2 = \frac{8}{3} .$$

$$\text{又 } f(0) = 0, f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{27} .$$

$$\text{所求切线方程为 } y = x \text{ 和 } y = x - \frac{64}{27} .$$

$$(2) \text{ 令 } g(x) = f(x) - x = \frac{1}{4}x^3 - x^2, g'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x .$$

$$\text{令 } g'(x) = 0, \text{ 得 } x_1 = 0 \text{ 或 } x_2 = \frac{8}{3},$$

$g'(x)$ 、 $g(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	-2	$(-2, 0)$	0	$\left(0, \frac{8}{3}\right)$	$\frac{8}{3}$	$\left(\frac{8}{3}, 4\right)$	4
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	-6	↗	极大值	↘	极小值	↗	0

$$\therefore g(-2) = -6, g(0) = 0, g\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{64}{27}, g(4) = 0,$$

$$\therefore g(x) \text{ 在 } [-2, 4] \text{ 上的最大值为 } g(4) = 0, \text{ 最小值为 } g(-2) = -6 .$$

$$\therefore -6 \leq g(x) \leq 0,$$

$$\text{即 } x - 6 \leq f(x) \leq x.$$

$$(3) F(x) = \left| \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x - x - a \right| = \left| \frac{1}{4}x^3 - x^2 - a \right|,$$

$$\text{由 (2) 知 } g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2, \therefore F(x) = |g(x) - a|.$$

$$\text{当 } x \in [-2, 4] \text{ 时, 由 (2) 知, } g(x) \in [-6, 0],$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } a \geq 0 \text{ 时, } F(x) = a - g(x), \therefore F(x) \in [a, a + 6], \therefore$$

$$M(a) = F(x)_{\max} = a + 6;$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } a \leq -6 \text{ 时, } F(x) = g(x) - a, \therefore F(x) \in [-6 - a, -a], \therefore$$

$$M(a) = F(x)_{\max} = -a;$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } -6 < a < 0 \text{ 时,}$$

$$M(a) = F(x)_{\max} = \max\{a + 6, -a\} = \begin{cases} a + 6, & -3 < a < 0 \\ 3, & a = -3 \\ -a, & -6 < a < -3 \end{cases}.$$

$$\text{综上, } M(a) = \begin{cases} a + 6, & a > -3 \\ 3, & a = -3 \\ -a, & a < -3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{当 } M(a) \text{ 取最小值 } 3 \text{ 时, } a = -3.$$

【标注】【知识点】直接求函数的最值（不含参）；利用导数解决不等式恒成立问题

公切线相关问题

5. 已知函数 $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a x$, 其中 $a > 1$.

(1) 求函数 $h(x) = f(x) - x \ln a$ 的单调区间.

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线与曲线 $y = g(x)$ 在点 $(x_2, g(x_2))$ 处的切线平行, 证明

$$x_1 + g(x_2) = -\frac{2 \ln(\ln a)}{\ln a}.$$

(3) 证明当 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ 时, 存在直线 l , 使 l 是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 也是曲线 $y = g(x)$ 的切线.

【答案】(1) 单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

(2) 证明见解析.

(3) 证明见解析.

【解析】(1) 由已知, $h(x) = a^x - x \ln a$,

$$\text{有 } h'(x) = a^x \ln a - \ln a.$$

$$\text{令 } h'(x) = 0, \text{ 解得 } x = 0.$$

由 $a > 1$, 可知当 x 变化时, $h'(x)$, $h(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$

$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以函数 $h(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

(2) 证明: 由 $f'(x) = a^x \ln a$,

可得曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线的斜率为 $a^{x_1} \ln a$,

由 $g'(x) = \frac{1}{x \ln a}$,

可得曲线 $y = g(x)$ 在点 $(x_2, g(x_2))$ 处的切线的斜率为 $\frac{1}{x_2 \ln a}$.

因为这两条切线平行, 故有 $a^{x_1} \ln a = \frac{1}{x_2 \ln a}$,

即 $x_2 a^{x_1} (\ln a)^2 = 1$.

两边取以 a 为底的对数, 得

$$\log_a x_2 + x_1 + 2 \log_a (\ln a) = 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + g(x_2) = -\frac{2 \ln (\ln a)}{\ln a}.$$

(3) 证明: 曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_1, a^{x_1}) 处的切线 $l_1: y - a^{x_1} = a^{x_1} \ln a (x - x_1)$.

曲线 $y = g(x)$ 在点 $(x_2, \log_a x_2)$ 处的切线 $l_2: y - \log_a x_2 = \frac{1}{x_2 \ln a} (x - x_2)$.

要证明 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ 时, 存在直线 l , 使 l 是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 也是曲线 $y = g(x)$ 的切线,

只需证明当 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ 时, 存在 $x_1 \in (-\infty, +\infty)$, $x_2 \in (0, +\infty)$, 使得 l_1 与 l_2 重合.

即只需证明当 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ 时,

$$\text{方程组 } \begin{cases} a^{x_1} \ln a = \frac{1}{x_2 \ln a}, & \text{①} \\ a^{x_1} - x_1 a^{x_1} \ln a = \log_a x_2 - \frac{1}{\ln a} & \text{②} \end{cases} \text{ 有解.}$$

由①得 $x_2 = \frac{1}{a^{x_1} (\ln a)^2}$, 代入②, 得

$$a^{x_1} - x_1 a^{x_1} \ln a + x_1 + \frac{1}{\ln a} + \frac{2 \ln (\ln a)}{\ln a} = 0. \quad \text{③}$$

因此, 只需证明当 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ 时, 关于 x_1 的方程③存在实数解.

设函数 $u(x) = a^x - x a^x \ln a + x + \frac{1}{\ln a} + \frac{2 \ln (\ln a)}{\ln a}$,

即要证明当 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ 时, 函数 $y = u(x)$ 存在零点.

$u'(x) = 1 - (\ln a)^2 x a^x$, 可知 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $u'(x) > 0$. $x \in (0, +\infty)$ 时,

$u'(x)$ 单调递减, 又 $u'(0) = 1 > 0$,

$$u'\left(\frac{1}{(\ln a)^2}\right) = 1 - a^{\frac{1}{(\ln a)^2}} < 0,$$

故存在唯一的 x_0 , 且 $x_0 > 0$, 使得 $u'(x_0) = 0$,

即 $1 - (\ln a)^2 x_0 a^{x_0} = 0$.

由此可得 $u(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减, $u(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值 $u(x_0)$.

因为 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$, 故 $\ln(\ln a) \geq -1$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } u(x_0) &= a^{x_0} - x_0 a^{x_0} \ln a + x_0 + \frac{1}{\ln a} + \frac{2 \ln(\ln a)}{\ln a} \\ &= \frac{1}{x_0 (\ln a)^2} + x_0 + \frac{2 \ln(\ln a)}{\ln a} \geq \frac{2 + 2 \ln(\ln a)}{\ln a} \geq 0. \end{aligned}$$

下面证明存在实数 t , 使得 $u(t) < 0$.

由 (1) 可得 $a^x \geq 1 + x \ln a$,

当 $x > \frac{1}{\ln a}$ 时, 有

$$\begin{aligned} u(x) &\leq (1 + x \ln a)(1 - x \ln a) + x + \frac{1}{\ln a} + \frac{2 \ln(\ln a)}{\ln a} \\ &= -(\ln a)^2 x^2 + x + 1 + \frac{1}{\ln a} + \frac{2 \ln(\ln a)}{\ln a}, \end{aligned}$$

所以存在实数 t , 使得 $u(t) < 0$.

因此, 当 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ 时, 存在 $x_1 \in (-\infty, +\infty)$, 使得 $u(x_1) = 0$.

所以, 当 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ 时, 存在直线 l , 使 l 是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 也是曲线 $y = g(x)$ 的切线.

【标注】【知识点】公切线存在性问题

备注：2018年高考真题天津卷理科第20题14分

6. 已知关于 x 的函数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 与 $h(x) = kx + b (k, b \in \mathbf{R})$ 在区间 D 上恒有

$$f(x) \geq h(x) \geq g(x).$$

(1) 若 $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = -x^2 + 2x$, $D = (-\infty, +\infty)$, 求 $h(x)$ 的表达式.

(2) 若 $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = k \ln x$, $h(x) = kx - k$, $D = (0, +\infty)$, 求 k 的取值范围.

(3) 若 $f(x) = x^4 - 2x^2$, $g(x) = 4x^2 - 8$, $h(x) = 4(t^3 - t)x - 3t^4 + 2t^2 (0 < |t| \leq \sqrt{2})$,
 $D = [m, n] \subseteq [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 求证: $n - m \leq \sqrt{7}$.

【答案】 (1) $h(x) = 2x$.

(2) $k \in [0, 3]$.

(3) 证明见解析.

【解析】 (1) $f(x) - h(x)$

$$= x^2 + 2x - (kx + b)$$

$$= x^2 + (2 - k)x - b,$$

有 $\Delta \leq 0$,

$$\text{即 } (2 - k)^2 + 4b \leq 0 \text{ ①,}$$

$$h(x) - g(x)$$

$$= kx + b - (-x^2 + 2x)$$

$$= x^2 + (k-2)x + b,$$

有 $\Delta \leq 0$, 即 $(k-2)^2 - 4b \leq 0$ ②,

由①+②, 得 $2(k-2)^2 \leq 0$,

$k=2$, 故 $b=0$, $h(x)=2x$.

(2) $h(x) - g(x) = k(x-1-\ln x)$, $x \in (0, +\infty)$.

令 $u(x) = x - 1 - \ln x$, 则 $u'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, 令 $u'(x) = 0$, 得 $x = 1$.

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$u'(x)$	-	0	+
$u(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $u(x)_{\min} = u(1) = 0$, 则 $x - 1 \geq \ln x$ 恒成立,

所以当且仅当 $k \geq 0$ 时, $h(x) \geq g(x)$ 恒成立.

另一方面, $f(x) \geq h(x)$ 恒成立, 即 $x^2 - x + 1 \geq kx - k$ 恒成立,

也即 $x^2 - (1+k)x + 1+k \geq 0$ 恒成立.

因为 $k \geq 0$, 对称轴为 $x = \frac{1+k}{2} > 0$,

所以 $(1+k)^2 - 4(1+k) \leq 0$, 解得 $-1 \leq k \leq 3$.

因此, k 的取值范围是 $0 \leq k \leq 3$.

(3) ①当 $1 \leq t \leq \sqrt{2}$ 时,

由 $g(x) \leq h(x)$, 得 $4x^2 - 8 \leq 4(t^3 - t)x - 3t^4 + 2t^2$,

整理得 $x^2 - (t^3 - t)x + \frac{3t^4 - 2t^2 - 8}{4} \leq 0$. (*)

令 $\Delta = (t^3 - t)^2 - (3t^4 - 2t^2 - 8)$, 则 $\Delta = t^6 - 5t^4 + 3t^2 + 8$.

记 $\varphi(t) = t^6 - 5t^4 + 3t^2 + 8$ ($1 \leq t \leq \sqrt{2}$),

则 $\varphi'(t) = 6t^5 - 20t^3 + 6t = 2t(3t^2 - 1)(t^2 - 3) < 0$ 恒成立,

所以 $\varphi(t)$ 在 $[1, \sqrt{2}]$ 上是减函数, 则 $\varphi(\sqrt{2}) \leq \varphi(t) \leq \varphi(1)$,

即 $2 \leq \varphi(t) \leq 7$,

所以不等式(*)有解, 设解的范围为 $x_1 \leq x \leq x_2$,

因此 $n - m \leq x_2 - x_1 = \sqrt{\Delta} \leq \sqrt{7}$.

②当 $0 < t < 1$ 时,

$f(-1) - h(-1) = 3t^4 + 4t^3 - 2t^2 - 4t - 1$.

设 $v(t) = 3t^4 + 4t^3 - 2t^2 - 4t - 1$.

$v'(t) = 12t^3 + 12t^2 - 4t - 4 = 4(t+1)(3t^2 - 1)$,

令 $v'(t) = 0$, 得 $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

当 $t \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 时, $v'(t) < 0$, $v(t)$ 是减函数;
 当 $t \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ 时, $v'(t) > 0$, $v(t)$ 是增函数.
 $v(0) = -1$, $v(1) = 0$, 则当 $0 < t < 1$ 时, $v(t) < 0$.
 (或证: $v(t) = (t+1)^2(3t+1)(t-1) < 0$.)
 则 $f(-1) - h(-1) < 0$, 因此 $-1 \notin (m, n)$.
 因为 $[m, n] \subseteq [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$,
 所以 $n - m \leq \sqrt{2} + 1 < \sqrt{7}$.
 ③ 当 $-\sqrt{2} \leq t < 0$ 时, 因为 $f(x)$, $g(x)$ 均为偶函数,
 因此 $n - m \leq \sqrt{7}$ 也成立.
 综上所述, $n - m \leq \sqrt{7}$.

【标注】 **【知识点】** 二次函数相关的恒成立问题; 通过构造函数证明不等式; 利用导数解决不等式恒成立问题

零点相关问题

7. 设函数 $f(x) = e^x \cos x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 证明 $f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$.
- (3) 设 x_n 为函数 $u(x) = f(x) - 1$ 在区间 $\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 内的零点, 其中 $n \in \mathbf{N}$, 证明 $2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}$.

【答案】 (1) $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right] (k \in \mathbf{Z})$,
 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

(2) 证明见解析.

(3) 证明见解析.

【解析】 (1) 由已知, 有 $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$,
 因此, 当 $x \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right) (k \in \mathbf{Z})$ 时,
 有 $\sin x > \cos x$, 得 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调递减;
 当 $x \in \left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right) (k \in \mathbf{Z})$ 时,
 有 $\sin x < \cos x$, 得 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right] (k \in \mathbf{Z})$,

$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

(2) 记 $h(x) = f(x) + g(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

依题意及(1), 有 $g(x) = e^x(\cos x - \sin x)$,

从而 $g'(x) = -2e^x \sin x$,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) < 0$,

故 $h'(x) = f'(x) + g'(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + g(x)(-1) = g'(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) < 0$,

因此 $h(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,

进而 $h(x) \geq h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

所以, 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时,

$f(x) + g(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$.

(3) 依题意, $u(x_n) = f(x_n) - 1 = 0$,

即 $e^{x_n} \cos x_n = 1$, 记 $y_n = x_n - 2n\pi$,

则 $y_n \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$,

且 $f(y_n) = e^{y_n} \cos y_n = e^{x_n - 2n\pi} \cos(x_n - 2n\pi) = e^{-2n\pi} (n \in \mathbf{N})$,

由 $f(y_n) = e^{-2n\pi} \leq 1 = f(y_0)$ 及(1),

得 $y_n \geq y_0$, 由(2)知,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数,

因此 $g(y_n) \leq g(y_0) < g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$,

又由(2)知, $f(y_n) + g(y_n)\left(\frac{\pi}{2} - y_n\right) \geq 0$,

故 $\frac{\pi}{2} - y_n \leq -\frac{f(y_n)}{g(y_n)} = -\frac{e^{-2n\pi}}{g(y_n)} \leq -\frac{e^{-2n\pi}}{g(y_0)}$

$= \frac{e^{y_0}(\sin y_0 - \cos y_0)}{e^{-2n\pi}} < \frac{\sin x_0 - \cos x_0}{e^{-2n\pi}}$,

所以, $2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{\sin x_0 - \cos x_0}{e^{-2n\pi}}$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

备注：2019年高考真题天津卷理科第20题14分

8. 已知 $1 < a \leq 2$, 函数 $f(x) = e^x - x - a$, 其中 $e=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.

(1) 证明：函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一的零点.

(2) 记 x_0 为函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点, 证明：

① $\sqrt{a-1} \leq x_0 \leq \sqrt{2(a-1)}$.

② $x_0 f(e^{x_0}) \geq (e-1)(a-1)a$.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) ① 证明见解析.

② 证明见解析.

【解析】(1) 因为 $f(0) = 1 - a < 0$, $f(2) = e^2 - 2 - a \geq e^2 - 4 > 0$,

所以 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在零点.

因为 $f'(x) = e^x - 1$,

所以当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$,

故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一的零点.

(2) ① 令 $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 (x \geq 0)$,

$$g'(x) = e^x - x - 1 = f(x) + a - 1,$$

由(1)知函数 $g'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

故当 $x > 0$ 时, $g'(x) > g'(0) = 0$,

所以函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

故 $g(x) \geq g(0) = 0$,

由 $g(\sqrt{2(a-1)}) \geq 0$ 得

$$f(\sqrt{2(a-1)}) = e^{\sqrt{2(a-1)}} - \sqrt{2(a-1)} - a \geq 0 = f(x_0),$$

因为 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

故 $\sqrt{2(a-1)} \geq x_0$.

令 $h(x) = e^x - x^2 - x - 1 (0 \leq x \leq 1)$,

$$h'(x) = e^x - 2x - 1,$$

令 $h_1(x) = e^x - 2x - 1 (0 \leq x \leq 1)$, $h_1'(x) = e^x - 2$, 所以

x	0	$(0, \ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2, 1)$	1
$h_1'(x)$	-1	-	0	+	$e - 2$
$h_1(x)$	0	$\searrow$	$1 - 2 \ln 2$	$\nearrow$	$e - 3$

故当 $0 < x < 1$ 时,

$h_1(x) < 0$, 即 $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减,

因此当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $h(x) \leq h(0) = 0$,

由 $h(\sqrt{a-1}) \leq 0$ 得,

$$f(\sqrt{a-1}) = e^{\sqrt{a-1}} - \sqrt{a-1} - a \leq 0 = f(x_0),$$

因为 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

故 $\sqrt{a-1} \leq x_0$,

综上, $\sqrt{a-1} \leq x_0 \leq \sqrt{2(a-1)}$.

② 令 $u(x) = e^x - (e-1)x - 1$, $u'(x) = e^x - (e-1)$,

所以当 $x > 1$ 时, $u'(x) > 0$,

故函数 $u(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

因此 $u(x) \geq u(1) = 0$,

由 $e^{x_0} = x_0 + a$ 可得,

$x_0 f(e^{x_0}) = x_0 f(x_0 + a) = (e^a - 1)x_0^2 + a(e^a - 2)x_0 \geq (e-1)ax_0^2$,

由 $x_0 \geq \sqrt{a-1}$ 得, $x_0 f(e^{x_0}) \geq (e-1)(a-1)a$.

【标注】【知识点】隐零点问题; 通过构造函数证明不等式; 二阶导问题

9. 设 $a \in \mathbf{Z}$, 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$ 在区间 $(1, 2)$ 内有一个零点 x_0 , $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 求 $g(x)$ 的单调区间.

(2) 设 $m \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$, 函数 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$, 求证: $h(m)h(x_0) < 0$.

(3) 求证: 存在大于0的常数 A , 使得对于任意的正整数 p, q , 且 $\frac{p}{q} \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$, 满足

$$|\frac{p}{q} - x_0| \geq \frac{1}{Aq^4}.$$

【答案】(1) $g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$, $(\frac{1}{4}, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-1, \frac{1}{4})$.

(2) 证明见解析.

(3) 证明见解析.

【解析】(1) 由 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$, 可得 $g(x) = f'(x) = 8x^3 + 9x^2 - 6x - 6$, 进而可得 $g'(x) = 24x^2 + 18x - 6$. 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = -1$, 或 $x = \frac{1}{4}$.

当 x 变化时, $g'(x)$, $g(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{4}, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以, $g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$, $(\frac{1}{4}, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-1, \frac{1}{4})$.

(2) 证明: 由 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$, 得 $h(m) = g(m)(m - x_0) - f(m)$, $h(x_0) = g(x_0)(m - x_0) - f(m)$.

令函数 $H_1(x) = g(x)(x - x_0) - f(x)$, 则 $H_1'(x) = g'(x)(x - x_0)$.

由 (I) 知, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $g'(x) > 0$,

故当 $x \in [1, x_0)$ 时, $H_1'(x) < 0$, $H_1(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, 2]$ 时, $H_1'(x) > 0$, $H_1(x)$ 单调递增;

因此, 当 $x \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$ 时, $H_1(x) > H_1(x_0) = -f(x_0) = 0$,

可得 $H_1(m) > 0$, 即 $h(m) > 0$.

令函数 $H_2(x) = g(x_0)(x - x_0) - f(x)$, 则 $H_2'(x) = g(x_0) - g(x)$.

由 (I) 知, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $g'(x) > 0$,

故当 $x \in [1, x_0)$ 时, $H_2'(x) > 0$, $H_2(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_0, 2]$ 时, $H_2'(x) < 0$, $H_2(x)$ 单调递减;

因此, 当 $x \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$ 时, $H_2(x) < H_2(x_0) = -f(x_0) = 0$,

可得 $H_2(m) < 0$, 所以 $h(x_0) < 0$.

所以 $h(m)h(x_0) < 0$.

(3) 证明: 对于任意的正整数 p, q , 且 $\frac{p}{q} \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$,

令 $m = \frac{p}{q}$, 函数 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$.

由 (II) 知, 当 $m \in [1, x_0)$ 时, $h(x)$ 在区间 (m, x_0) 内有零点;

当 $m \in (x_0, 2]$ 时, $h(x)$ 在区间 (x_0, m) 内有零点.

所以 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 内至少有一个零点, 不妨设为 x_1 ,

则 $h(x_1) = g(x_1)(\frac{p}{q} - x_0) - f(\frac{p}{q}) = 0$.

由 (I) 知 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 所以 $0 < g(1) < g(x_1) < g(2)$,

所以 $|\frac{p}{q} - x_0| = |\frac{f(\frac{p}{q})}{g(x_1)}| > |\frac{f(\frac{p}{q})}{g(2)}| = \frac{|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 - aq^4|}{g(2)q^4}$,

因为当 $x \in [1, 2]$ 时, $g(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上除 x_0 外没有其他零点, 而 $\frac{p}{q} \neq x_0$, 所以 $f(\frac{p}{q}) \neq 0$.

又因为 p, q, a 均为整数, 所以 $|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 - aq^4|$ 是正整数,

从而 $|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 - aq^4| \geq 1$,

所以 $|\frac{p}{q} - x_0| \geq \frac{1}{g(2)q^4}$. 所以, 只要取 $A = g(2)$, 就有 $|\frac{p}{q} - x_0| \geq \frac{1}{Aq^4}$.

【标注】【知识点】直接求函数的单调性 (不含参); 利用导数解决不等式能成立问题; 利用导数求单调性证不等式

备注: 2017年高考真题天津卷理科第20题14分

10. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax + \frac{1}{4}$, $g(x) = -\ln x$.

(1) 当 a 为何值时, x 轴为曲线 $y = f(x)$ 的切线;

(2) 用 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最小值, 设函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\} (x > 0)$, 讨论 $h(x)$ 零点的个数.

【答案】 (1) 当 $a = -\frac{3}{4}$ 时, x 轴为曲线 $y = f(x)$ 的切线.

(2) 当 $a > -\frac{3}{4}$ 或 $a < -\frac{5}{4}$ 时, $h(x)$ 有一个零点;

当 $a = -\frac{3}{4}$ 或 $a = -\frac{5}{4}$ 时, $h(x)$ 有两个零点;

当 $-\frac{5}{4} < a < -\frac{3}{4}$ 时, $h(x)$ 有三个零点.

【解析】 (1) 设曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴相切于点 $P(x_0, 0)$, 则 $f(x_0) = 0, f'(x_0) = 0$,

$$\therefore \begin{cases} x_0^3 + ax_0 + \frac{1}{4} = 0 \\ 3x_0^2 + a = 0 \end{cases}, \text{解得 } x_0 = \frac{1}{2}, a = -\frac{3}{4},$$

因此当 $a = -\frac{3}{4}$ 时, x 轴为曲线 $y = f(x)$ 的切线.

(2) 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x) = -\ln x < 0$, 从而 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\} \leq g(x) < 0$

, 故 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 无零点.

当 $x = 1$ 时, 若 $a \geq -\frac{5}{4}$, 则 $f(1) = a + \frac{5}{4} \geq 0$,

$h(1) = \min\{f(1), g(1)\} = g(1) = 0$,

故 $x = 1$ 是 $h(x)$ 的零点;

若 $a < -\frac{5}{4}$, 则 $f(1) \leq 0$, $h(1) = \min\{f(1), g(1)\} = f(1) < 0$, 故 $x = 1$ 不是 $h(x)$ 的零点.

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) = -\ln x > 0$, 所以只需考虑 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 的零点个数.

若 $a \leq -3$ 或 $a \geq 0$, 则 $f'(x) = 3x^2 + a$ 在 $(0, 1)$ 无零点, 故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调.

而 $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(1) = a + \frac{5}{4}$, 所以当 $a \leq -3$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 有一个零点;

当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上没有零点.

若 $-3 < a < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{-\frac{a}{3}})$ 单调递减, 在 $(\sqrt{-\frac{a}{3}}, 1)$ 单调递增,

故在 $(0, 1)$ 中, 当 $x = \sqrt{-\frac{a}{3}}$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为

$$f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right) = \frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}} + \frac{1}{4}.$$

若 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right) > 0$, 即 $-\frac{3}{4} < a < 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 无零点;

若 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right) = 0$, 即 $a = -\frac{3}{4}$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 有唯一零点;

若 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right) < 0$, 即 $-3 < a < -\frac{3}{4}$, 由于 $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(1) = a + \frac{5}{4}$,

所以当 $-\frac{5}{4} < a < -\frac{3}{4}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 由两个零点;

当 $-3 < a \leq -\frac{5}{4}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 由一个零点.

综上, 当 $a > -\frac{3}{4}$ 或 $a < -\frac{5}{4}$ 时, $h(x)$ 有一个零点;
 当 $a = -\frac{3}{4}$ 或 $a = -\frac{5}{4}$ 时, $h(x)$ 有两个零点; 当 $-\frac{5}{4} < a < -\frac{3}{4}$ 时, $h(x)$ 有三个零点.

【标注】【知识点】求函数零点 (含参二次型导函数)

不等式证明问题

11. 设函数 $f(x) = \ln x - x + 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2) 证明: 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $1 < \frac{x-1}{\ln x} < x$.

(3) 设 $c > 1$, 证明: 当 $x \in (0, 1)$ 时, $1 + (c-1)x > c^x$.

【答案】 (1) 当 $x \in (0, 1)$ 时, 函数单调递增,
 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 函数单调递减.

(2) 证明见解析

(3) 证明见解析

【解析】 (1) 由题意得, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$.

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数单调递增,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数单调递减.

(2) 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得最大值, 最大值为 $f(1) = 0$.

所以当 $x \neq 1$ 时, $\ln x < x - 1$.

故当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $\ln x < x - 1$, $\ln \frac{1}{x} < \frac{1}{x} - 1$,

即 $1 < \frac{x-1}{\ln x} < x$.

(3) 方法一: 设 $g(x) = 1 + (c-1)x - c^x$,

$g'(x) = c - 1 - c^x \ln c$, 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x_0 = \frac{\ln \frac{c-1}{\ln c}}{\ln c}$.

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0, 1)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	增	极大值	减

由 (2) 可知 $1 < \frac{c-1}{\ln c} < c$, 故 $0 < x_0 < 1$. 又 $g(0) = g(1) = 0$, 故当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) > 0$, 所以得证.

方法二: 欲证 $1 + (c-1)x > c^x$ 对 $x \in (0, 1)$, $c > 1$ 成立,

即证 $1 + (x-1)c > x^c$ 对 $c \in (0, 1)$, $x > 1$ 成立.

令 $\varphi(x) = 1 + (x-1)c - x^c = cx - x^c + 1 - c$, $x > 1$, $c \in (0, 1)$,

则 $\varphi'(x) = c - cx^{c-1} = c(1 - x^{c-1})$,

$\because c \in (0, 1)$, $\therefore c - 1 < 0$,

又 $x > 1$, $\therefore x^{c-1} < x^0 = 1$, 即 $1 - x^{c-1} > 0$,

$\therefore \varphi'(x) > 0$,

$\therefore \varphi(x)$ 在 $x > 1$ 上单调递增,

$\therefore \varphi(x) > \varphi(1)$,

即 $1 + (x-1)c - x^c > 1 + (1-1)c - 1^c = 0$,

即 $1 + (x-1)c > x^c$.

证毕.

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式；利用导数解决不等式恒成立问题；导数与最值；利用导数求函数的单调性、单调区间；利用公式和四则运算法则求导

备注：2016年高考真题全国卷III文科第21题12分

12. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x \sin 2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的单调性.

(2) 证明： $|f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

(3) 设 $n \in \mathbf{N}^*$, 证明： $\sin^2 x \sin^2 2x \sin^2 4x \cdots \sin^2 2^n x \leq \frac{3^n}{4^n}$.

【答案】(1) $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{2\pi}{3}, \pi)$ 上单调递增, 在区间 $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 上单调递减.

(2) 证明见解析.

(3) 证明见解析.

【解析】(1) $f'(x) = \cos x(\sin x \sin 2x) + \sin x(\sin x \sin 2x)'$

$$= 2 \sin x \cos x \sin 2x + 2 \sin^2 x \cos 2x$$

$$= 2 \sin x \sin 3x.$$

当 $x \in (0, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{2\pi}{3}, \pi)$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{2\pi}{3}, \pi)$ 上单调递增, 在区间 $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 上单调递减.

(2) 因为 $f(0) = f(\pi) = 0$, 由(1)知,

$f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 的最大值为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ ，最小值为 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ，而

$f(x)$ 是周期为 π 的周期函数，

$$\text{故 } |f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

(3) 由于 $(\sin^2 x \sin^2 2x \cdots \sin^2 2^n x)^{\frac{3}{2}}$

$$= |\sin^3 x \sin^3 2x \cdots \sin^3 2^n x|$$

$$= |\sin x| |\sin^2 x \sin^3 2x \cdots \sin^3 2^{n-1} x \sin 2^n x| |\sin^2 2^n x|$$

$$= |\sin x| |f(x)f(2x) \cdots f(2^{n-1}x)| |\sin^2 2^n x|$$

$$\leq |f(x)f(2x) \cdots f(2^{n-1}x)|,$$

$$\text{所以 } \sin^2 x \sin^2 2x \cdots \sin^2 2^n x \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^{\frac{2n}{3}} = \frac{3^n}{4^n}.$$

【标注】【知识点】直接求函数的最值（不含参）

13. 已知 a 为正实数， n 为自然数，抛物线 $y = -x^2 + \frac{a^n}{2}$ 与 x 轴正半轴相交于点 A 。设 $f(n)$ 为该抛物线在点 A 处的切线在 y 轴上的截距。

(1) 用 a 和 n 表示 $f(n)$ ；

(2) 求对所有 n 都有 $\frac{f(n)-1}{f(n)+1} \geq \frac{n^3}{n^3+1}$ 成立的 a 的最小值；

(3) 当 $0 < a < 1$ 时，比较 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)-f(2k)}$ 与 $\frac{27}{4} \cdot \frac{f(1)-f(n)}{f(0)-f(1)}$ 的大小，并说明理由。

【答案】 (1) $f(n) = a^n$

(2) $\sqrt{17}$

$$(3) \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)-f(2k)} > \frac{27}{4} \cdot \frac{f(1)-f(n)}{f(0)-f(1)}$$

【解析】 (1) 由已知得，交点 A 的坐标为 $(\sqrt{\frac{a^n}{2}}, 0)$ ，

对 $y = -x^2 + \frac{1}{2}a^n$ 求导得 $y' = -2x$ ，则抛物线在点 A 处的

$$\text{切线方程为 } y = -\sqrt{2a^n}(x - \sqrt{\frac{a^n}{2}}),$$

$$\text{即 } y = -\sqrt{2a^n}x + a^n, \text{ 则 } f(n) = a^n$$

(2) 由(1)知 $f(n) = a^n$ ，则 $\frac{f(n)-1}{f(n)+1} \geq \frac{n^3}{n^3+1}$ 成立的充要条件是 $a^n \geq 2n^3 + 1$

即知， $a^n \geq 2n^3 + 1$ 对所有 n 成立，特别地，取 $n = 2$ 得到 $a \geq \sqrt{17}$

当 $a = \sqrt{17}$ ， $n \geq 3$ 时，

$$a^n > 4^n = (1+3)^n = 1 + C_n^1 \cdot 3 + C_n^2 \cdot 3^2 + C_n^3 \cdot 3^3 + \cdots$$

$$\geq 1 + C_n^1 \cdot 3 + C_n^2 \cdot 3^2 + C_n^3 \cdot 3^3$$

$$= 1 + 2n^3 + \frac{1}{2}n[5(n-2)^2 + (2n-5)]$$

$$> 2n^3 + 1$$

当 $n = 0, 1, 2$ 时, 显然 $(\sqrt{17})^n \geq 2n^3 + 1$

故 $a = \sqrt{17}$ 时, $\frac{f(n)-1}{f(n)+1} \geq \frac{n^3}{n^3+1}$ 对所有自然数 n 都成立

所以满足条件的 a 的最小值为 $\sqrt{17}$

(3) 由 (1) 知 $f(k) = a^k$, 则

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k) - f(2k)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a^k - a^{2k}}, \frac{f(1) - f(n)}{f(0) - f(1)} = \frac{a - a^n}{1 - a}$$

$$\text{下面证明: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k) - f(2k)} > \frac{27}{4} \cdot \frac{f(1) - f(n)}{f(0) - f(1)}$$

首先证明: 当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{1}{x - x^2} \geq \frac{27}{4}x$

设函数 $g(x) = \frac{27}{4}x(x^2 - x) + 1, 0 < x < 1$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{81}{4}x(x - \frac{2}{3})$$

当 $0 < x < \frac{2}{3}$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $\frac{2}{3} < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$

故 $g(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上的最小值 $g(x)_{\min} = g(\frac{2}{3}) = 0$

所以, 当 $0 < x < 1$ 时, $g(x) \geq 0$, 即得 $\frac{1}{x - x^2} \geq \frac{27}{4}x$

由 $0 < a < 1$ 知 $0 < a^k < 1 (k \in \mathbf{N}^*)$, 因此 $\frac{1}{a^k - a^{2k}} \geq \frac{27}{4}a^k$, 从而

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k) - f(2k)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{a^k - a^{2k}} \\ &\geq \frac{27}{4} \sum_{k=1}^n a^k \\ &= \frac{27}{4} \cdot \frac{a - a^{n+1}}{1 - a} \\ &> \frac{4}{27} \cdot \frac{1 - a}{a - a^n} \\ &= \frac{4}{27} \cdot \frac{f(1) - f(n)}{f(0) - f(1)} \end{aligned}$$

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式; 导数与最值; 求在某点处的切线方程; 导数的几何意义

2. 巩固练习

恒成立求参数范围

14. 设函数 $f(x) = ax + \cos x, x \in [0, \pi]$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $f(x) \leq 1 + \sin x$, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) (i) 当 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上是增函数;

(ii) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上是减函数;

(iii) 当 $0 < a < 1$ 时, 在 $x \in [0, \arcsin a]$ 时, $f(x)$ 是增函数;

在 $x \in (\arcsin a, \pi - \arcsin a)$ 时, $f(x)$ 是减函数;

在 $x \in (\pi - \arcsin a, \pi]$ 时, $f(x)$ 是增函数.

(2) $\left(-\infty, \frac{2}{\pi}\right]$.

【解析】 (1) $f'(x) = a - \sin x$.

(i) 当 $a \geq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$, 当且仅当 $a = 1, x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上是增函数;

(ii) 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \leq 0$, 当且仅当 $a = 0, x = 0$ 或 $x = \pi$ 时, $f'(x) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上是减函数;

(iii) 当 $0 < a < 1$ 时, 由 $f'(x) = a - \sin x$ 解得 $x_1 = \arcsin a, x_2 = \pi - \arcsin a$.

当 $x \in [0, x_1]$ 时, $\sin x < a, f'(x) > 0, f(x)$ 是增函数;

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $\sin x > a, f'(x) < 0, f(x)$ 是减函数;

当 $x \in (x_2, \pi]$ 时, $\sin x < a, f'(x) > 0, f(x)$ 是增函数.

(2) 由 $f(x) \leq 1 + \sin x$ 得 $f(\pi) \leq 1, a\pi - 1 \leq 1$, 所以 $a \leq \frac{2}{\pi}$.

令 $g(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi} \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$.

当 $x \in \left(0, \arccos \frac{2}{\pi}\right)$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in \left(\arccos \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) < 0$.

又 $g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, 所以 $g(x) \geq 0$, 即 $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

当 $a \leq \frac{2}{\pi}$ 时, 有 $f(x) \leq \frac{2}{\pi}x + \cos x$.

(i) 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x, \cos x \leq 1$. 所以 $f(x) \leq 1 + \sin x$;

(ii) 当 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ 时,

$f(x) \leq \frac{2}{\pi}x + \cos x = 1 + \frac{2}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 1 + \sin x$.

综上, a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{2}{\pi}\right]$.

【标注】【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题

15. 设函数 $f(x) = (1 - x^2) \cdot e^x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq ax + 1$, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$ 和 $(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递减，
在区间 $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$ 上单调递增。
(2) $[1, +\infty)$ 。

【解析】 (1) $f'(x) = e^x \cdot (-x^2 - 2x + 1)$ ，由 $f'(x) = 0$ ，可得 $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ ， $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ 。

则 x ， $f'(x)$ ， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

则函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$ 和 $(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递减，
在区间 $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$ 上单调递增。

(2) 令函数 $g(x) = ax + 1 - f(x) = ax + 1 - (1 - x^2) \cdot e^x$ ，其中 $x \geq 0$ 。

则只需要函数 $g(x)$ 的最小值大于等于零即可。

因为 $g'(x) = a - (1 - x^2 - 2x) \cdot e^x$ ， $g''(x) = (x^2 + 4x + 1) \cdot e^x$ 。

因为 $x \geq 0$ ，则 $g''(x) > 0$ 。所以 $g'(x) = a - (1 - x^2 - 2x) \cdot e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

又因为 $g'(0) = a - 1$ ，则当 $a \geq 1$ 时， $g'(x) \geq 0$ 恒成立，

所以此时函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，又 $g(0) = 0$ ，所以当 $a \geq 1$ 时符合题意。

当 $a < 1$ 时， $g'(0) = a - 1 < 0$ ，则函数 $g(x)$ 的图象必定会先下降，

而 $g(0) = 0$ ，则此时明显不符合题意。

综上可得 $a \geq 1$ 即为所求。

【标注】 【知识点】指数函数类型；利用导数解决不等式恒成立问题；二阶导问题

绝对值相关最值处理技巧

16. 已知 $a > 0, b \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x) = 4ax^3 - 2bx - a + b$ 。

(1) 证明：当 $0 \leq x \leq 1$ 时，

(i) 函数 $f(x)$ 的最大值为 $|2a - b| + a$ ；

(ii) $f(x) + |2a - b| + a \geq 0$ ；

(2) 若 $|f(x)| \leq 1$ 对 $x \in [0, 1]$ 恒成立，求 $a + b$ 的取值范围。

【答案】 (1) (i) 证明见解析；

(ii) 证明见解析.

(2) $(-1, 3]$.

【解析】(1) 证明: (i) $f'(x) = 12ax^2 - 2b = 12a(x^2 - \frac{b}{6a})$,

当 $b \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上恒成立,

此时 $f(x)$ 的最大值为: $f(1) = |2a - b| + a$;

当 $b > 0$ 时, 在 $0 \leq x \leq 1$ 上的正负性不能判断,

此时最大值为 $f(1)_{\max} = \max\{f(0), f(1)\} = |2a - b| + a$;

综上所述: 函数 $f(x)$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上的最大值为 $|2a - b| + a$;

(ii) 要证 $f(x) + |2a - b| + a \geq 0$, 即证 $g(x) = -f(x) \leq |2a - b| + a$.

亦即证 $g(x)$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上的最大值小于 (或等于) $|2a - b| + a$,

$\because g(x) = -4ax^3 + 2bx + a - b$, $\therefore$ 令 $g'(x) = -12ax^2 + 2b = 0$

当 $b \leq 0$ 时, $x = \sqrt{\frac{b}{6a}}$; $g'(x) < 0$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上恒成立,

此时 $g(x)$ 的最大值为: $g(0) = a - b < 3a - b = |2a - b| + a$;

当 $b > 0$ 时, $g'(x) = -12ax^2 + 2b$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上的正负性不能判断,

$\therefore$

$$g_{\max}(x) = \max\left\{g\left(\sqrt{\frac{b}{6a}}\right), g(1)\right\} = \max\left\{\frac{4}{3}b\sqrt{\frac{b}{6a}} + a - b, b - 3a\right\} = \begin{cases} \frac{4}{3}b\sqrt{\frac{b}{6a}} + a - b, & b \leq 6a \\ b - 3a, & b > 6a \end{cases}$$

$\therefore g_{\max}(x) \leq |2a - b| + a$;

综上所述: 函数 $g(x)$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上的最大值小于 (或等于) $|2a - b| + a$.

即 $f(x) + |2a - b| + a$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上恒成立.

(2) 由 (I) 知: 函数 $f(x)$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上的最大值为 $|2a - b| + a$,

且函数 $f(x)$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上的最小值比 $-(|2a - b| + a)$ 要大.

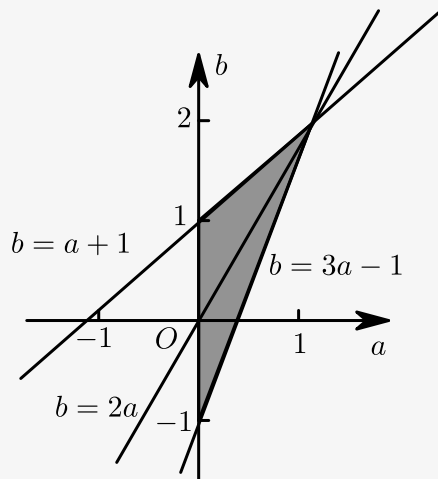
$\therefore -1 \leq x \leq 1$ 对 $x \in [0, 1]$ 恒成立,

$\therefore |2a - b| + a \leq 1$.

取 b 为纵轴, a 为横轴.

则可行域为: $\begin{cases} b \geq 2a \\ b - a \leq 1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} b < 2a \\ 3a - b \leq 1 \end{cases}$, 目标函数为 $z = a + b$.

作图如右:



由图易得：当目标函数为 $z = a + b$ 过 $P(1, 2)$ 时，有 $z_{\max} = 3$ 。

$\therefore$ 所求 $a + b$ 的取值范围为： $(-1, 3]$ 。

【标注】【知识点】线性规划求最值；求函数最值（含参二次型导函数）

不等式证明问题

17. 设函数 $f(x) = x^3 + \frac{1}{1+x}$ ， $x \in [0, 1]$ 。证明：

(1) $f(x) \geq 1 - x + x^2$ ；

(2) $\frac{3}{4} < f(x) \leq \frac{3}{2}$ 。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

【解析】 (1) 方法一：因为 $1 - x + x^2 - x^3 = \frac{1 - (-x)^4}{1 - (-x)} = \frac{1 - x^4}{1 + x}$ ，

由于 $x \in [0, 1]$ ，有 $\frac{1 - x^4}{1 + x} \leq \frac{1}{1 + x}$ ，即 $1 - x + x^2 - x^3 \leq \frac{1}{1 + x}$ ，

所以 $f(x) \geq 1 - x + x^2$ 。

方法二：欲证 $f(x) \geq 1 - x + x^2$ ，

即证 $x^3 + \frac{1}{1+x} \geq 1 - x + x^2$ ，

又 $x \in [0, 1]$ ， $1 + x > 0$ ，

即证 $x^3(1+x) + 1 \geq (1 - x + x^2)(1+x)$ ，

即证 $x^3 + x^4 + 1 \geq 1 + x^3$ ，

即证 $x^4 \geq 0$ 。

(2) 方法一：由 $0 \leq x \leq 1$ 得 $x^3 \leq x$ ，

故 $f(x) = x^3 + \frac{1}{1+x} \leq x + \frac{1}{1+x} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{(x-1)(2x+1)}{2(x+1)} + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$ ，

所以 $f(x) \leq \frac{3}{2}$.

由 (I) 得 $f(x) \geq 1 - x + x^2 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$,

又因为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{19}{24} > \frac{3}{4}$, 所以 $f(x) > \frac{3}{4}$,

综上, $\frac{3}{4} < f(x) \leq \frac{3}{2}$.

方法二: 由 (1) 知 $f(x) \geq 1 - x + x^2$, 当且仅当 $x = 0$ 时等号成立,

又 $1 - x + x^2 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, 当且仅当 $x = \frac{1}{2}$ 时等号成立,

$\therefore f(x) > \frac{3}{4}$,

欲证 $f(x) \leq \frac{3}{2}$,

即证 $x^3 + \frac{1}{1+x} \leq \frac{3}{2}$,

又 $x \in [0, 1]$, $x+1 > 0$,

即证 $2x^3(1+x) + 2 \leq 3(1+x)$,

即证 $2x^3 + 2x^4 + 2 \leq 3 + 3x$,

即证 $2x^4 + 2x^3 - 3x - 1 \leq 0$,

即证 $2x^3 + 4x^2 + 4x + 1 \geq 0$,

又 $x \in [0, 1]$, 上式显然成立. 证毕.

注意到当 $x = 1$ 时, $2x^4 + 2x^3 - 3x - 1 = 0$,

故 $2x^4 + 2x^3 - 3x - 1$ 有因式 $x - 1$,

即有 $2x^4 + 2x^3 - 3x - 1$

$= 2x^4 - 2x^3 + 4x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 4x + x - 1$

$= 2x^3(x-1) + 4x^2(x-1) + 4x(x-1) + (x-1)$

$= (x-1)(2x^3 + 4x^2 + 4x + 1)$,

又 $x \in [0, 1]$, $x-1 \leq 0$.

【标注】【知识点】分析法;放缩法

18. 已知函数 $f(x) = x^3 + k \ln x$ ($k \in \mathbf{R}$), $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 当 $k = 6$ 时,

① 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

② 求函数 $g(x) = f(x) - f'(x) + \frac{9}{x}$ 的单调区间和极值.

(2) 当 $k \geq -3$ 时, 求证: 对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$, 有

$$\frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

【答案】 (1) ① $y = 9x - 8$.

② 单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$, 极小值为1, 无极大值.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) ① 当 $k = 6$ 时, $f(x) = x^3 + 6 \ln x$,

$$\text{故 } f'(x) = 3x^2 + \frac{6}{x},$$

$$\text{可得 } f(1) = 1, f'(1) = 9,$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 1 = 9(x - 1)$,

$$\text{即 } y = 9x - 8.$$

② 依题意, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 6 \ln x + \frac{3}{x}$, $x \in (0, +\infty)$,

$$\text{从而可得 } g'(x) = 3x^2 - 6x + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2},$$

$$\text{整理可得 } g'(x) = \frac{3(x-1)^3(x+1)}{x^2},$$

$$\text{令 } g'(x) = 0, \text{ 解得 } x = 1,$$

当 x 变化时, $g'(x)$, $g(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以, 函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$, $g(x)$ 的极小值为 $g(1) = 1$, 无极大值.

(2) 由 $f(x) = x^3 + k \ln x$, 得 $f'(x) = 3x^2 + \frac{k}{x}$,

对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$,

$$\text{令 } \frac{x_1}{x_2} = t, (t > 1),$$

$$\begin{aligned} & \text{则 } (x_1 - x_2)(f'(x_1) + f'(x_2)) - 2(f(x_1) - f(x_2)) \\ &= (x_1 - x_2) \left(3x_1^2 + \frac{k}{x_1} + 3x_2^2 + \frac{k}{x_2} \right) - 2 \left(x_1^3 - x_2^3 + k \ln \frac{x_1}{x_2} \right) \\ &= x_1^3 - x_2^3 - 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + k \left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} \right) - 2k \ln \frac{x_1}{x_2} \\ &= x_2^3(t^3 - 3t^2 + 3t - 1) + k \left(t - \frac{1}{t} - 2 \ln t \right) \text{ ①}, \end{aligned}$$

$$\text{令 } h(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x, x \in (1, +\infty),$$

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } h'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 > 0,$$

由此可得 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{所以当 } t > 1 \text{ 时, } h(t) > h(1), \text{ 即 } t - \frac{1}{t} - 2 \ln t > 0,$$

$$\text{因为 } x_2 \geq 1, t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t - 1)^3 > 0, k \geq -3,$$

$$\text{所以 } x_2^3(t^3 - 3t^2 + 3t - 1) + k \left(t - \frac{1}{t} - 2 \ln t \right)$$

$$\begin{aligned}
 &> (t^3 - 3t^2 + 3t - 1) - 3\left(t - \frac{1}{t} - 2\ln t\right) \\
 &= t^3 - 3t^2 + 6\ln t + \frac{3}{t} - 1 \text{ ②},
 \end{aligned}$$

由 (1) ②可知, 当 $t > 1$ 时, $g(t) > g(1)$,

$$\text{即 } t^3 - 3t^2 + 6\ln t + \frac{3}{t} > 1,$$

$$\text{故 } t^3 - 3t^2 + 6\ln t + \frac{3}{t} - 1 > 0 \text{ ③},$$

由①②③可得 $(x_1 - x_2)(f'(x_1) + f'(x_2)) - 2(f(x_1) - f(x_2)) > 0$,

所以, 当 $k \geq -3$ 时,

对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$,

$$\text{有 } \frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

【标注】【知识点】双变量问题