

导数综合 (三)

一、导数综合

1. 典型例题

🔔 恒成立求参数范围

1. 已知实数 $a \neq 0$, 设函数 $f(x) = a \ln x + \sqrt{x+1}$, $x > 0$.
 - (1) 当 $a = -\frac{3}{4}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.
 - (2) 若对任意 $x \in \left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$, 均有 $f(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{2a}$, 求 a 的取值范围. 注: $e = 2.71828 \dots$ 为自然对数的底数.
2. 已知函数 $f(x) = (1+x)e^{-2x}$, $g(x) = ax + \frac{x^3}{2} + 1 + 2x \cos x$, 当 $x \in [0, 1]$ 时,
 - (1) 求证: $1-x \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x}$.
 - (2) 若 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

🔔 绝对值相关最值处理技巧

3. 设函数 $f(x) = (x-1)^3 - ax - b$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.
 - (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
 - (2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0 , 且 $f(x_1) = f(x_0)$, 其中 $x_1 \neq x_0$, 求证: $x_1 + 2x_0 = 3$;
 - (3) 设 $a > 0$, 函数 $g(x) = |f(x)|$, 求证: $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.
4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.
 - (1) 求曲线 $y = f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程.
 - (2) 当 $x \in [-2, 4]$ 时, 求证: $x - 6 \leq f(x) \leq x$.
 - (3) 设 $F(x) = |f(x) - (x+a)|$ ($a \in \mathbf{R}$), 记 $F(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最大值为 $M(a)$, 当 $M(a)$ 最小时, 求 a 的值.

🔔 公切线相关问题

5. 已知函数 $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a x$, 其中 $a > 1$.
 - (1) 求函数 $h(x) = f(x) - x \ln a$ 的单调区间.
 - (2)

若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线与曲线 $y = g(x)$ 在点 $(x_2, g(x_2))$ 处的切线平行, 证明

$$x_1 + g(x_2) = -\frac{2\ln(\ln a)}{\ln a}.$$

(3) 证明当 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ 时, 存在直线 l , 使 l 是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 也是曲线 $y = g(x)$ 的切线.

6. 已知关于 x 的函数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 与 $h(x) = kx + b (k, b \in \mathbf{R})$ 在区间 D 上恒有

$$f(x) \geq h(x) \geq g(x).$$

(1) 若 $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = -x^2 + 2x$, $D = (-\infty, +\infty)$, 求 $h(x)$ 的表达式.

(2) 若 $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = k \ln x$, $h(x) = kx - k$, $D = (0, +\infty)$, 求 k 的取值范围.

(3) 若 $f(x) = x^4 - 2x^2$, $g(x) = 4x^2 - 8$, $h(x) = 4(t^3 - t)x - 3t^4 + 2t^2 (0 < |t| \leq \sqrt{2})$,
 $D = [m, n] \subseteq [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 求证: $n - m \leq \sqrt{7}$.

🔴 零点相关问题

7. 设函数 $f(x) = e^x \cos x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 证明 $f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$.

(3) 设 x_n 为函数 $u(x) = f(x) - 1$ 在区间 $\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 内的零点, 其中 $n \in \mathbf{N}$, 证明

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}.$$

8. 已知 $1 < a \leq 2$, 函数 $f(x) = e^x - x - a$, 其中 $e = 2.71828 \dots$ 为自然对数的底数.

(1) 证明: 函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一的零点.

(2) 记 x_0 为函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点, 证明:

$$\textcircled{1} \sqrt{a-1} \leq x_0 \leq \sqrt{2(a-1)}.$$

$$\textcircled{2} x_0 f(e^{x_0}) \geq (e-1)(a-1)a.$$

9. 设 $a \in \mathbf{Z}$, 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$ 在区间 $(1, 2)$ 内有一个零点 x_0 ,
 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 求 $g(x)$ 的单调区间.

(2) 设 $m \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$, 函数 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$, 求证: $h(m)h(x_0) < 0$.

(3) 求证: 存在大于0的常数 A , 使得对于任意的正整数 p, q , 且 $\frac{p}{q} \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$, 满足

$$\left| \frac{p}{q} - x_0 \right| \geq \frac{1}{Aq^4}.$$

10. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax + \frac{1}{4}$, $g(x) = -\ln x$.

(1) 当 a 为何值时, x 轴为曲线 $y = f(x)$ 的切线;

(2) 用 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最小值, 设函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\} (x > 0)$, 讨论 $h(x)$ 零点的个数.

不等式证明问题

11. 设函数 $f(x) = \ln x - x + 1$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性 .
- (2) 证明 : 当 $x \in (1, +\infty)$ 时 , $1 < \frac{x-1}{\ln x} < x$.
- (3) 设 $c > 1$, 证明 : 当 $x \in (0, 1)$ 时 , $1 + (c-1)x > c^x$.

12. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x \sin 2x$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的单调性 .
- (2) 证明 : $|f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.
- (3) 设 $n \in \mathbf{N}^*$, 证明 : $\sin^2 x \sin^2 2x \sin^2 4x \cdots \sin^2 2^n x \leq \frac{3^n}{4^n}$.

13. 已知 a 为正实数 , n 为自然数 , 抛物线 $y = -x^2 + \frac{a^n}{2}$ 与 x 轴正半轴相交于点 A . 设 $f(n)$ 为该抛物线在点 A 处的切线在 y 轴上的截距 .

- (1) 用 a 和 n 表示 $f(n)$;
- (2) 求对所有 n 都有 $\frac{f(n)-1}{f(n)+1} \geq \frac{n^3}{n^3+1}$ 成立的 a 的最小值 ;
- (3) 当 $0 < a < 1$ 时 , 比较 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)-f(2k)}$ 与 $\frac{27}{4} \cdot \frac{f(1)-f(n)}{f(0)-f(1)}$ 的大小 , 并说明理由 .

2. 巩固练习

恒成立求参数范围

14. 设函数 $f(x) = ax + \cos x$, $x \in [0, \pi]$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性 ;
- (2) 设 $f(x) \leq 1 + \sin x$, 求 a 的取值范围 .

15. 设函数 $f(x) = (1-x^2) \cdot e^x$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性 .
- (2) 当 $x \geq 0$ 时 , $f(x) \leq ax + 1$, 求 a 的取值范围 .

绝对值相关最值处理技巧

16. 已知 $a > 0, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = 4ax^3 - 2bx - a + b$.

- (1) 证明 : 当 $0 \leq x \leq 1$ 时 ,
 - (i) 函数 $f(x)$ 的最大值为 $|2a-b| + a$;
 - (ii) $f(x) + |2a-b| + a \geq 0$;
- (2) 若 $|f(x)| \leq 1$ 对 $x \in [0, 1]$ 恒成立 , 求 $a+b$ 的取值范围 .

 不等式证明问题

17. 设函数 $f(x) = x^3 + \frac{1}{1+x}$, $x \in [0, 1]$. 证明:

(1) $f(x) \geq 1 - x + x^2$;

(2) $\frac{3}{4} < f(x) \leq \frac{3}{2}$.

18. 已知函数 $f(x) = x^3 + k \ln x$ ($k \in \mathbf{R}$), $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 当 $k = 6$ 时,

① 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

② 求函数 $g(x) = f(x) - f'(x) + \frac{9}{x}$ 的单调区间和极值.

(2) 当 $k \geq -3$ 时, 求证: 对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$, 有

$$\frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$