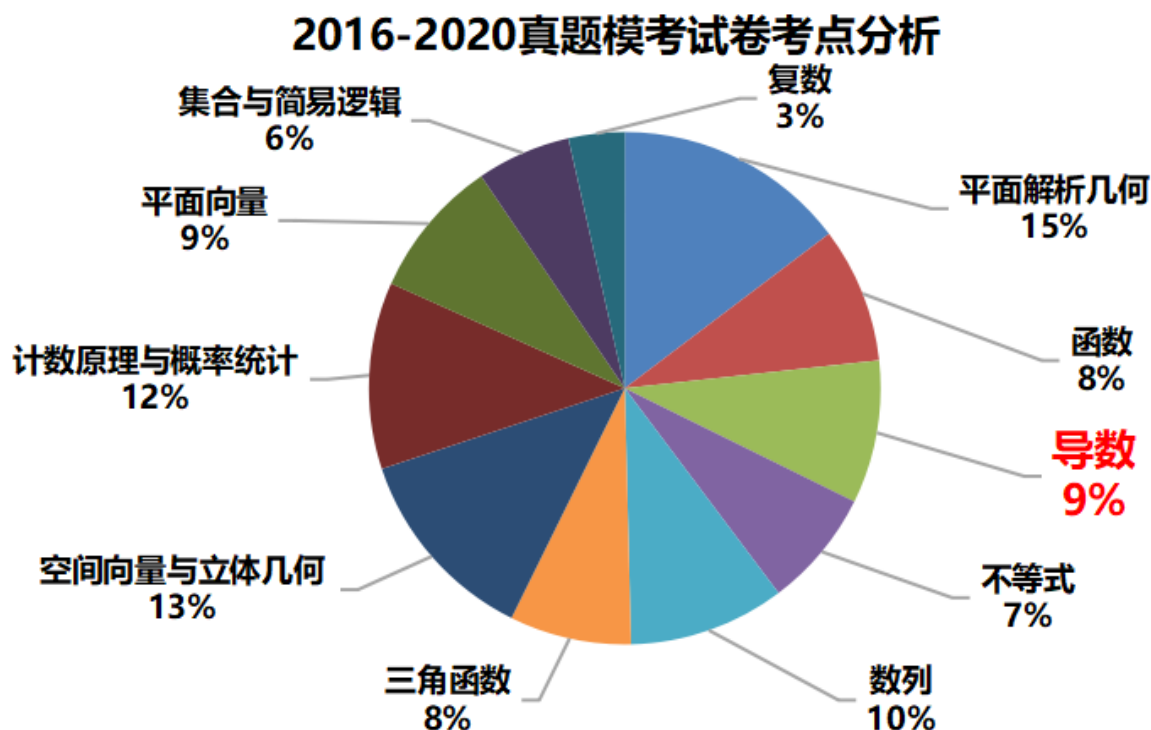


导数综合（一）

1. 知己知彼

📍 考点占比



📍 考点分析

2016-2020年真题及重要模考考点分析（48份试卷）			
模块	章节	考点	考察频次
导数	导数的应用	导数与单调性	58
		导数与最值	34
		导数与极值	25
		导数的实际应用	1
	导数的运算	利用公式和四则运算法则求导	56
		复合函数的求导法则	2
		导数的运算	1
	导数的概念及其意义	导数的几何意义	26
		函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率	5
		导数的定义	2

一、单变量证明不等式

1. 典型例题

 直接构造函数证明不等式

1. 已知函数 $f(x) = (x^2 + ax)e^x$ 的两个极值点为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, $x_1 + x_2 = -2 - \sqrt{5}$.
当 $m \leq -e$ 时, 求证: $[f(x) + 2e^x] \cdot [(x-2)e^x - m + 1] > \frac{3}{4}e^x$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 设 $g(x) = (x-2)e^x - m + 1$, 则 $g'(x) = (x-1)e^x$,

令 $g'(x) > 0$ 得 $x > 1$,

令 $g'(x) < 0$ 得 $x < 1$,

$\therefore g(x)_{\min} = g(1) = -e - m + 1 \geq 1$,

$\therefore g(x) \geq 1$,

$\therefore f(x) + 2e^x = (x^2 + \sqrt{5}x + 2)e^x = \left[\left(x + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] e^x \geq \frac{3}{4}e^x$ (当

$x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时取等号),

$\therefore$ 不等式成立 (因为取等条件不相同, 所以等号取不到).

【标注】 【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题; 已知单调性求参数的取值范围; 利用导数求函数的最值

备注: 2017~2018学年10月天津宝坻区宝坻区第一中学高三上学期月考文科第20题

2. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{a(x-1)}{x} (a \in \mathbf{R})$.
求证: $\forall x \in (1, 2)$, 不等式 $\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} < \frac{1}{2}$ 恒成立.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) $\because 1 < x < 2$,

$\therefore \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} < \frac{1}{2}$ 等价于 $(x+1)\ln x - 2(x-1) > 0$,

令 $F(x) = (x+1)\ln x - 2(x-1)$, 则

$F'(x) = \ln x + \frac{(x+1)}{x} - 2 = \ln x + \frac{1}{x} - 1$,

由 (1) 知当 $x = 1$ 时 $f_{\min}(x) = f(1) = 0$,

$$\therefore f(x) > f(1), \text{ 即 } \ln x + \frac{1}{x} - 1 \geq 0,$$

所以 $F'(x) \geq 0$, 则 $F(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, 所以 $F(x) > F(1) = 0$,

$$\text{即有 } 1 < x < 2 \text{ 时 } \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} < \frac{1}{2}.$$

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式

 根据题干函数构造 $p(x)$ 最小值 $\geq q(x)$ 最大值的形式

3. 已知函数 $f(x) = e^x - a \ln x - a$, 其中常数 $a > 0$.

求证: $e^{2x-2} - e^{x-1} \ln x - x \geq 0$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 方法一: 由 (1) 知当 $a = e$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立,

$$f(x) = e^x - e \ln x - e \geq 0, \text{ 所以 } e^x - e \ln x \geq e,$$

$$\text{设 } h(x) = \frac{x}{e^x} (x > 0), \text{ 则 } h'(x) = \frac{1-x}{e^x},$$

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增; 当 $x > 1$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

$$h(x)_{\max} = h(1) = \frac{1}{e}, \text{ 即 } \frac{x}{e^x} \leq \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{x}{e^{x-2}} \leq e,$$

$$\text{所以 } e^x - e \ln x \geq e \geq \frac{x}{e^{x-2}}, \text{ 即 } e^{2x-2} - e^{x-1} \ln x - x \geq 0.$$

方法二: 欲证 $e^{2x-2} - e^{x-1} \ln x - x \geq 0$,

$$\text{即证 } e^{2(x-1)} - x \geq e^{x-1} \ln x,$$

$$\text{即证 } e^{x-1} - \frac{x}{e^{x-1}} \geq \ln x,$$

$$\text{又易证得 } e^x \geq x+1, e^{x-1} \geq x, \frac{x}{e^{x-1}} \leq 1, e^{x-1} - \frac{x}{e^{x-1}} \geq x-1,$$

且易证得 $\ln x \leq x-1$,

$$\therefore e^{x-1} - \frac{x}{e^{x-1}} \geq \ln x \text{ 成立, 证毕.}$$

【标注】【知识点】求解函数极值; 导数与单调性; 二阶导问题; 通过构造函数证明不等式; 已知零点或根情况求参数范围; 导数与最值; 函数零点存在定理

备注: 2018年天津南开区天津市南开中学高三下学期高考模拟理科第20题

4. 函数 $f(x) = \frac{a + \ln x}{x}$, 若曲线 $f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线与直线 $e^2 x - y + e = 0$ 垂直 (其中 e 为自然对数的底数).

$$\text{求证: 当 } x > 1 \text{ 时, } \frac{f(x)}{e+1} > \frac{2e^{x-1}}{(x+1)(xe^x+1)}.$$

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) 不等式 $\frac{f(x)}{e+1} > \frac{2e^{x-1}}{(x+1)(xe^x+1)}$
即为 $\frac{1}{e+1} \cdot \frac{(x+1)(\ln x+1)}{x} > \frac{2e^{x-1}}{xe^x+1}$
令 $g(x) = \frac{(x+1)(\ln x+1)}{x}$
则 $g'(x) = \frac{x - \ln x}{x^2}$,
再令 $\Phi(x) = x - \ln x$, 则 $\Phi'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$,
 $\because x > 1, \Phi'(x) > 0$, $\Phi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数,
 $\therefore \Phi(x) > \Phi(1) = 1 > 0, g'(x) > 0$,
 $\therefore g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数,
 $\therefore x > 1$ 时, $g(x) > g(1) = 2$.
故 $\frac{g(x)}{e+1} > \frac{2}{e+1}$.
令 $h(x) = \frac{2e^{x-1}}{xe^x+1}$, 则 $h'(x) = \frac{2e^{x-1}(1-e^x)}{(xe^x+1)^2}$,
 $\because x > 1, 1-e^x < 0, h'(x) < 0$, 即 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是减函数
 $\therefore x > 1$ 时, $h(x) < h(1) = \frac{2}{e+1}$,
所以 $\frac{g(x)}{e+1} > h(x)$, 即 $\frac{f(x)}{e+1} > \frac{2e^{x-1}}{(x+1)(xe^x+1)}$.

【标注】【知识点】已知极值情况求参数范围；二阶导问题；导数与最值

备注：2016年天津河西区高三二模文科第20题14分

5. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax - ae^x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

求证：当 $x \geq 0$ 时, $x^2 + 2x + 3 \leq e^{2x}(3 - 2\sin x)$.

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) 由(2)可知, 若 $a = 1$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq -1$, 即 $\frac{1}{2}x^2 + x - e^x \leq -1$,
可得 $x^2 + 2x \leq 2e^x - 2$,
 $x^2 + 2x + 3 - e^{2x}(3 - 2\sin x) \leq 2e^x - 2 + 3 - e^{2x}(3 - 2\sin x)$,
令 $F(x) = e^{2x}(2\sin x - 3) + 2e^x + 1 = e^x[e^x(2\sin x - 3) + 2] + 1$, 即证
 $F(x) \leq 0$
令 $G(x) = e^x(2\sin x - 3) + 2$,
 $G'(x) = e^x(2\sin x + 2\cos x - 3) = e^x\left[2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 3\right]$,
 $\because \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$,

$$\begin{aligned} &\therefore 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 3 < 0, \text{ 又 } e^x > 0, \therefore e^x \left[2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 3 \right] < 0, \\ &\therefore G'(x) < 0, G(x) \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上单调递减}, G(x) \leq G(0) = -1, \\ &\therefore F(x) \leq -e^x + 1 \leq 0, \text{ 当且仅当 } x = 0 \text{ 时等号成立}, \\ &\therefore x^2 + 2x + 3 \leq e^{2x}(3 - 2\sin x). \end{aligned}$$

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式；直接求函数的最值（不含参）

根据题干函数构造不等式进行放缩

6. 设函数 $f(x) = (x+1)\ln x - a(x-1)$.

(1) 当 $a \leq 2$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(2) 当 $1 < x < 2$ 时, 证明: $\frac{2}{x-1} > \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln(2-x)}$.

【答案】 (1) 当 $a \leq 2$ 时, 函数 $f(x)$ 的定义域上为增函数.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) $f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 - a$, 记 $g(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 - a$,

$$g'(x) = \frac{x-1}{x^2}, \text{ 令 } g'(x) = 0, x = 1,$$

$$\therefore g(x)_{\min} = g(1) = 2 - a,$$

$$\therefore a \leq 2,$$

$$\therefore 2 - a \geq 0,$$

$$\therefore g(x) \geq g(1) = 0, f'(x) \geq 0,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域上为增函数.

(2) 由 (2) 知当 $a = 2$ 时, $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上是增函数,

$$\therefore f(x) > f(1) = 0, \text{ 即 } (x+1)\ln x > 2(x-1),$$

$$\therefore \frac{1}{\ln x} < \frac{x+1}{2(x-1)} \quad \text{①},$$

$$\therefore 1 < x < 2,$$

$$\therefore 0 < 2 - a < 1, \frac{1}{2-x} > 1,$$

$$\therefore \frac{1}{\ln \frac{1}{2-x}} < \frac{\frac{1}{2-x} + 1}{2\left(\frac{1}{2-x} - 1\right)} = \frac{3-x}{2(x-1)},$$

$$\text{即 } -\frac{1}{\ln(2-x)} < \frac{3-x}{2(x-1)} \quad \text{②},$$

$$\text{①+②得: } \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln(2-x)} < \frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{3-x}{2(x-1)} = \frac{2}{x-1},$$

$\therefore$ 原式成立.

【标注】【知识点】分析法；已知切线方程求参数；导数的几何意义；利用导数求函数的单调性、单调区间

备注：2019~2020学年9月天津静海县静海一中高三上学期月考第20题14分

7. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + (a+2)x + 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 设 $a \in \mathbf{Z}$ ，若对任意的 $x > 0$ ， $f(x) \leq 0$ 恒成立，求整数 a 的最大值.

(2) 求证：当 $x > 0$ 时， $e^x - x \ln x + 2x^3 - x^2 + x - 1 > 0$.

【答案】 (1) -2 .

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 若 $a \geq 0$ ，则 $f(1) = 2a + 3 > 0$ ，

$\therefore$ 不满足 $f(x) \leq 0$ 恒成立，

若 $a < 0$ ，由 (1) 可知，函数 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增；在 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max} = f(-\frac{1}{a}) = \ln(-\frac{1}{a}) - \frac{1}{a}$ ，又 $f(x) \leq 0$ 恒成立，

$\therefore f(x)_{\max} \leq 0$ ，即 $\ln(-\frac{1}{a}) - \frac{1}{a} \leq 0$ ，

设 $g(x) = \ln x + x$ ，则 $g(-\frac{1}{a}) \leq 0$ ，

$\therefore g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ ，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，且 $g(1) = 1 > 0$ ， $g(\frac{1}{2}) = -\ln 2 + \frac{1}{2} < 0$ ，

$\therefore$ 存在唯一的 $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ ，使得 $g(x_0) = 0$ ，

当 $x \in (0, x_0)$ 时， $g(x) < 0$ ，当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时， $g(x) > 0$ ，

$\therefore 0 < -\frac{1}{a} \leq x_0$ ，解得 $a \leq -\frac{1}{x_0} \in (-2, -1)$ ，又 $a \in \mathbf{Z}$ ，

$\therefore a \leq -2$ ，整数 a 的最大值为 -2 。

(2) 由 (2) 可知， $a = -2$ 时， $f(x) = \ln x - 2x^2 + 1 < 0$ ，

$\therefore \ln x < 2x^2 - 1$ ，

$\therefore -x \ln x > -2x^3 + x$ ，

$\therefore e^x - x \ln x + 2x^3 - x^2 + x - 1 > e^x - 2x^3 + x + 2x^3 - x^2 + x - 1$

$= e^x - x^2 + 2x - 1$ ，

记 $u(x) = e^x - x^2 + 2x - 1 (x > 0)$ ，则 $u'(x) = e^x - 2x + 2$ ，

记 $h(x) = e^x - 2x + 2 (x > 0)$ ，则 $h'(x) = e^x - 2$ ，当 $x \in (0, \ln 2)$ 时， $h'(x) < 0$

；当 $x \in (\ln 2, +\infty)$ 时， $h'(x) > 0$ ，

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上单调递减；在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增，
 所以 $h(x)_{\min} = h(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 + 2 = 4 - 2\ln 2 > 0$ ，
 $\therefore h(x) > 0$ ，即 $u'(x) > 0$ ，故函数 $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，
 $\therefore u(x) > u(0) = e^0 - 1 = 0$ ，即 $e^x - x^2 + 2x - 1 > 0$ ，
 所以 $e^x - x \ln x + 2x^3 - x^2 + x - 1 > 0$ 。

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式；二阶导问题；利用导数解决不等式恒成立问题；求函数单调区间（含参二次型导函数）

备注：2018~2019学年3月高三下学期月考理科第21题12分

8. 已知函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$.
- (1) 当 $x \geq 0$ 时，若不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围 .
- (2) 若 $x > 0$ ，证明 $(e^x - 1) \ln(x + 1) > x^2$.

【答案】 (1) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) $f'(x) = e^x - 1 - 2ax$ ，

令 $h(x) = e^x - 1 - 2ax$ ，则 $h'(x) = e^x - 2a$ ，

① 当 $2a \leq 1$ 时，在 $[0, +\infty)$ 上， $h'(x) \geq 0$ ， $h(x)$ 递增， $h(x) \geq h(0)$ ，

即 $f'(x) \geq f'(0) = 0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 为增函数，

$\therefore f(x) \geq f(0) = 0$ ，

$\therefore a \leq \frac{1}{2}$ 时满足条件；

② 当 $2a > 1$ 时，令 $h'(x) = 0$ ，解得 $x = \ln 2a$ ，

当 $x \in [0, \ln 2a)$ 上， $h'(x) < 0$ ， $h(x)$ 单调递减，

$\therefore x \in [0, \ln 2a)$ 时，有 $h(x) < h(0) = 0$ ，即 $f'(x) < f'(0) = 0$ ，

$\therefore f(x)$ 在区间 $[0, \ln 2a)$ 为减函数，

$\therefore f(x) < f(0) = 0$ ，不合题意，

综上得实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

(2) 由 (2) 得，当 $a = \frac{1}{2}$ 时， $x > 0$ ， $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ ，

即 $e^x - 1 > x + \frac{x^2}{2}$ ，

欲证不等式 $(e^x - 1) \ln(x + 1) > x^2$ ，只需证 $\ln(x + 1) > \frac{2x}{x + 2}$ ，

$$\text{设 } F(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2},$$

$$\text{则 } F'(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2},$$

$\because x > 0$ 时, $F'(x) > 0$ 恒成立, 且 $F(0) = 0$,

$\therefore F(x) > 0$ 恒成立,

所以原不等式得证.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题；通过构造函数证明不等式；二阶导问题

9. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + e^2 + \frac{1}{e} - \frac{\ln x}{x}$ (e 为自然对数的底数).

(1) 当 $a = e$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程.

(2) 证明: 当 $a \leq e$ 时, 不等式 $x^3 - 2ax^2 \geq \ln x - \left(e^2 + \frac{1}{e}\right)x$ 成立.

【答案】 (1) $y = 0$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 由题意知, 当 $a = e$ 时, $f(x) = x^2 - 2ex + e^2 + \frac{1}{e} - \frac{\ln x}{x}$,

$$\text{解得 } f(e) = 0, \text{ 又 } f'(x) = 2x - 2e - \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$k = f'(e) = 0$, 即曲线 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程为: $y = 0$.

(2) 当 $a \leq e$ 时, 得 $-2ax^2 \geq -2ex^2$,

要证明不等式 $x^3 - 2ax^2 \geq \ln x - \left(e^2 + \frac{1}{e}\right)x$ 成立, 即证

$$x^3 - 2ex^2 \geq \ln x - \left(e^2 + \frac{1}{e}\right)x \text{ 成立,}$$

即证 $x^2 - 2ex \geq \frac{\ln x}{x} - \left(e^2 + \frac{1}{e}\right)$ 成立, 即证 $x^2 - 2ex + e^2 + \frac{1}{e} \geq \frac{\ln x}{x}$ 成立,

令 $g(x) = x^2 - 2ex + e^2 + \frac{1}{e}$, $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ ($x > 0$), 易知 $g(x) \geq g(e) = \frac{1}{e}$,

由 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 知 $h(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, $(e, +\infty)$ 上单调递减,

$$h(x) \leq h(e) = \frac{1}{e},$$

所以 $g(x) \geq h(x)$ 成立,

即原不等式成立.

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式

导数隐零点的应用

10. 已知函数 $f(x) = ax + b \ln x$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = \frac{1}{2}x - 1$.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 设 $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x$, 求证: 对于 $x \in (0, +\infty)$, $g(x) - f(x) > 2$ 恒成立.

【答案】(1) $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$.

(2) 证明见解析.

【解析】(1)

$$f(x) \text{ 的导函数 } f'(x) = a + \frac{b}{x},$$

$$\text{由切线方程知 } \begin{cases} f(1) = a = -\frac{1}{2} \\ f'(1) = a + b = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}.$$

(2) 令 $F(x) = g(x) - f(x) = e^x - \ln x$,

则 $f(x)$ 的导函数 $F'(x) = e^x - \frac{1}{x}$,

则 $F'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

$$\because F'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0, f'(1) = e - 10,$$

$$\therefore \exists x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ s.t. }, F'(x_0) = 0, \text{ 即 } e^{x_0} = \frac{1}{x_0},$$

则在 $(0, x_0)$, $F'(x_0) < 0$, 即 $F(x)$ 单调递减,

$(x_0, +\infty)$, $F'(x_0) > 0$, 即 $F(x)$ 单调递增,

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0, +\infty)$
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	↓	极小值	↗

故 $F(x_0)$ 为 $F(x)$ 的极小值, 也为 $F(x)$ 的最小值,

$$\text{故 } F(x)_{\min} = F(x_0)$$

$$= e^{x_0} - \ln x_0$$

$$= \frac{1}{x_0} + \ln(e^{x_0}) = \frac{1}{x_0} + x_0,$$

$$\because x_0 > 0,$$

$$\therefore \frac{1}{x_0} + x_0 > 2\sqrt{x_0 \cdot \frac{1}{x_0}} = 2,$$

当且仅当 $x_0 = \frac{1}{x_0}$ 时取等号,

$$\because x_0 < 1,$$

$$\therefore \frac{1}{x_0} + x_0 \neq 2, \text{ 即 } \frac{1}{x_0} + x_0 > 2,$$

即 $F(x) > 2$ 恒成立.

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式; 利用导数解决不等式恒成立问题; 利用导数求函数

的最值；隐零点问题；函数零点存在定理；利用基本不等式证明其它不等式

备注：2019~2020学年10月天津和平区高三上学期月考第20题15分

11. 已知 $f(x) = ae^x - x \ln x$ ，其中 $a \in \mathbf{R}$ ， e 是自然对数的底数．
- (1) 若 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上单调递增函数，求实数 a 的取值范围．
- (2) 若 $a \geq \frac{2}{e^2}$ ，证明： $f(x) > 0$ ．

【答案】 (1) $a \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ ．

(2) 证明见解析．

【解析】 (1) $f'(x) = ae^x - (\ln x + 1) \geq 0$ 恒成立，得 $a \geq \frac{1 + \ln x}{e^x}$ ，

$$\text{令 } g(x) = \frac{\ln x + 1}{e^x} (x > 0),$$

$$\text{则 } g'(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \ln x - 1 \right),$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1 (x > 0),$$

$$\text{则 } h'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0,$$

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递减，

又 $\because h(1) = 0$ ， $\therefore x = 1$ 是 $h(x)$ 唯一零点，

当 $x \in (0, 1)$ ， $h(x) > 0$ ， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 递增，

当 $x \in (1, +\infty)$ ， $h(x) < 0$ ， $g'(x) < 0$ ， $f(x)$ 递减，

$$\therefore \text{当 } x = 1 \text{ 时，} g(x)_{\max} = g(1) = \frac{1}{e},$$

$$\therefore a \geq \frac{1}{e}.$$

$$\text{综上 } a \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right).$$

(2) $\because f(x) > 0$ ，

$$\therefore \frac{ae^x}{x} - \ln x > 0,$$

$$\text{令 } F(x) = \frac{ae^x}{x} - \ln x (x > 0),$$

$$\text{当 } a \geq \frac{2}{e^2} \text{ 时，} F(x)_{\min} > 0,$$

$$\text{得 } F'(x) = \frac{1}{x^2} [a(x-1)e^x - x],$$

$$\text{① 当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时，} F'(x) < 0, F(x) \geq F(1) = ae > 0,$$

$$\text{② 当 } x > 1 \text{ 时，} F'(x) = \frac{a(x-1)}{x^2} \left[e^x - \frac{x}{a(x-1)} \right],$$

$$\text{令 } G(x) = e^x - \frac{x}{a(x-1)}, G'(x) = e^x + \frac{1}{a(x-1)^2} > 0,$$

$$\text{又 } \because G(2) = \frac{ae^2 - 2}{a} \geq 0,$$

当 $m \in (1, 2)$ 时, $\frac{m}{a(m-1)} > e^x$,
 即 $1 < m < \frac{ae^2}{ae^2 - 1}$, 则 $G(m) = e^m - \frac{m}{a(m-1)} < e^2 - e^2 = 0$,
 则 $G(m)G(2) < 0$,
 $\therefore G(x)$ 存在唯一零点 $x_0 \in (1, 2)$, 即 $F(x)$ 有唯一的极值点且为极小值点,
 又 $\because F(x_0) = \frac{ae^{x_0}}{x_0} - \ln x_0$,
 且 $G(x_0) = e^{x_0} - \frac{x_0}{a(x_0 - 1)} = 0$,
 即 $e^{x_0} = \frac{x_0}{a(x_0 - 1)}$,
 $\therefore F(x_0) = \frac{1}{x_0 - 1} - \ln x_0$,
 $\therefore F'(x_0) = \frac{1}{(x_0 - 1)^2} - \frac{1}{x_0} < 0$,
 $\therefore F(x_0)$ 是 $(1, 2)$ 上是减函数,
 $\therefore F(x_0) > F(2) = 1 - \ln 2 > 0$,
 $\therefore F(x) > 0$.
 综上, 当 $a \geq \frac{2}{e^2}$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立.

【标注】【知识点】二阶导问题；通过构造函数证明不等式；隐零点问题；利用导数求函数的单调性、单调区间；已知单调性求参数的取值范围

备注：2017~2018学年天津南开区天津市南开中学高三上学期周测理科第一周第20题14分

2. 巩固练习

直接构造函数证明不等式

12. 已知函数 $f(x) = x^3 + x^2 - ax + 1$, 且 $f'(1) = 4$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值.

(2) 当 $0 \leq x \leq a + 1$ 时, 证明: $\frac{e^x}{f(x) - x^3} > x$.

【答案】 (1) 极大值 2, 极小值 $\frac{22}{27}$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 依题意, $f'(x) = 3x^2 + 2x - a$, $f'(1) = 3 + 2 - a = 4$, $a = 1$,

故 $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x - 1)(x + 1)$,

令 $f'(x) > 0$, 则 $x < -1$ 或 $x > \frac{1}{3}$, 令 $f'(x) < 0$, 则 $-1 < x < \frac{1}{3}$,

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, +\infty)$
-----	-----------------	------	---------------------	---------------	--------------------------

$f'(x)$	+	0	-	0	+
		极大值			
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-1) = 2$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{22}{27}$	$\nearrow$

故当 $x = -1$ 时, 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-1) = 2$,

当 $x = \frac{1}{3}$ 时, 函数 $f(x)$ 有极小值 $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{22}{27}$.

(2) 由(1)知 $a = 1$,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{e^x}{f(x) - x^3} = \frac{e^x}{x^2 - x + 1}, \\ \text{则 } \varphi'(x) &= \frac{e^x(x^2 - x + 1) - (2x - 1)e^x}{(x^2 - x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x(x - 1)(x - 2)}{(x^2 - x + 1)^2},\end{aligned}$$

可知 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 令 $g(x) = x$,

①当 $x \in [0, 1]$ 时, $\varphi(x)_{\min} = \varphi(0) = 1$, $g(x)_{\max} = 1$,

所以函数 $\varphi(x)$ 的图象在 $g(x)$ 图象的上方;

②当 $x \in [1, 2]$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 单调递减,

所以其最小值为 $\varphi(2) = \frac{e^2}{3}$, $g(x)$ 最大值为2, 而 $\frac{e^2}{3} > 2$,

所以函数 $\varphi(x)$ 的图象也在 $g(x)$ 图象的上方,

综上所述, 当 $0 \leq x \leq a + 1$ 时, $\frac{e^x}{f(x) - x^3} > x$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题; 求解函数极值; 利用导数求函数的最值; 利用导数求函数的单调性、单调区间

 根据题干函数构造 $p(x)$ 最小值 $\geq q(x)$ 最大值的形式

13. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = \frac{m}{x} - \frac{3}{x^2} - 1$.

证明: 对一切 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $\ln x < \frac{2x}{e} - \frac{x^2}{e^x}$ 成立.

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) $\ln x < \frac{2x}{e} - \frac{x^2}{e^x}$, 等价于 $\frac{\ln x}{x} < \frac{2}{e} - \frac{x}{e^x}$,

即证 $f(x) < \frac{2}{e} - \frac{x}{e^x}$,

由(1)知 $f(x) \leq f(e) = \frac{1}{e}$ (当 $x = e$ 时取等号),

令 $\varphi(x) = \frac{2}{e} - \frac{x}{e^x}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{x-1}{e^x}$,

易知 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增,

$$\begin{aligned} \therefore \varphi(x) &\geq \varphi(1) = \frac{1}{e} \quad (\text{当 } x=1 \text{ 时取等号}), \\ \therefore f(x) &\leq \frac{1}{e}, \varphi(x) \geq \frac{1}{e} \text{ 取等号的条件不同}, \\ \therefore f(x) &< \varphi(x) \text{ 对任意 } x \in (0, +\infty) \text{ 都成立}, \\ \text{即对任意 } x &\in (0, +\infty), \text{ 都有 } \ln x < \frac{2x}{e} - \frac{x^2}{e^x} \text{ 成立}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

根据题干函数构造不等式进行放缩

14. 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x+m)$, 当 $m \leq 2$ 时, 证明: $f(x) > 0$.

【答案】 证明见解析.

【解析】 由 $e^x \geq 1+x$, ($x \in \mathbf{R}$), $\ln(1+x) \leq x$ ($x > -1$), 得 $x+1 \geq \ln(x+2)$,
故当 $m \leq 2$ 时, $e^x \geq 1+x \geq \ln(x+2) \geq \ln(x+m)$, 不等式中前两个等号成立的条件
 $x=0$, $x=-1$ 不能同时取得,
故由传递性得 $e^x > \ln(x+m)$, 即当 $m \leq 2$ 时, $f(x) > 0$.

【标注】【知识点】放缩法; 通过构造函数证明不等式; 利用导数证明不等式恒成立问题; 利用导数求函数的最值

15. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax - ae^x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

求证: 当 $x > 0$ 时, $xe^x - e \ln x > \frac{1}{2}x^3 + x^2$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 由 (2) 可知, 若 $a=1$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) < -1$, 即 $\frac{1}{2}x^2 + x - e^x < -1$,
 $\therefore \frac{1}{2}x^3 + x^2 - xe^x < -x$,
 $\therefore \frac{1}{2}x^3 + x^2 - xe^x + e \ln x < e \ln x - x$,
令 $F(x) = e \ln x - x$, $F'(x) = \frac{e}{x} - 1 = \frac{e-x}{x}$,
当 $0 < x < e$ 时, $F'(x) > 0$; 当 $x > e$ 时, $F'(x) < 0$,
 $\therefore F(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,
 $\therefore F(x) \leq F(e) = 0$, 即 $e \ln x - x \leq 0$, $\frac{1}{2}x^3 + x^2 - xe^x + e \ln x < 0$.
 $\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $xe^x - e \ln x > \frac{1}{2}x^3 + x^2$.

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式

导数隐零点的应用

16. 设函数 $f(x) = ax - 2 - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

若 $g(x) = ax - e^x$, 求证: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > g(x)$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 当 $x > 0$ 时, 要证 $f(x) - ax + e^x > 0$, 即证 $e^x - \ln x - 2 > 0$,

令 $h(x) = e^x - \ln x - 2 (x > 0)$, 只需证 $h(x) > 0$,

$\therefore h'(x) = e^x - \frac{1}{x}$, 由指数函数及幂函数的性质知:

$h'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 又 $h'(1) = e - 1 > 0$,

$h'\left(\frac{1}{3}\right) = e^{\frac{1}{3}} - 3 < 0$,

$\therefore h'(x)$ 在 $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 内存在唯一的零点,

设 $h'(x)$ 的零点为 t ,

则 $h'(t) = e^t - \frac{1}{t} = 0$,

即 $e^t = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{3} < t < 1\right)$,

由 $h'(x)$ 的单调性知:

当 $x \in (0, t)$ 时, $h'(x) < h'(t) = 0$, $h(x)$ 为减函数,

当 $x \in (t, +\infty)$ 时, $h'(x) > h'(t) = 0$, $h(x)$ 为增函数,

所以当 $x > 0$ 时,

$h(x) \geq h(t) = e^t - \ln t - 2 = \frac{1}{t} - \ln \frac{1}{e^t} - 2 = \frac{1}{t} + t - 2 \geq 2 - 2 = 0$, 当且仅

当 $t = 1$ 时, 等号成立.

又 $\frac{1}{3} < t < 1$, 等号不成立.

$\therefore h(x) > 0$,

即当 $x > 0$ 时, $f(x) > g(x)$.

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式

二、双变量不等式证明

1. 典型例题

凹凸函数的应用

17. 已知函数 $f(x) = ax \ln x (a \in \mathbf{R})$ 的极小值为 $-\frac{1}{e}$.

(1) 求 a 的值.

(2) 任取两个不等的正数 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 若存在正数 x_0 , 使得 $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 成立, 求证: $x_1 < x_0 < x_2$.

【答案】 (1) $a = 1$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) $\because f(x) = ax \ln x$,

$$\therefore f'(x) = a \ln x + a, \text{ 令 } f'(x) = 0,$$

$$\text{则 } x = \frac{1}{e},$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{e}\right) = x \cdot \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}, \text{ 得 } a = 1.$$

(2) 由 $f(x) = x \ln x (x \in (0, +\infty))$ 得 $f'(x) = \ln x + 1$,

$$\therefore \ln x_0 + 1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$\therefore \ln x_0 - \ln x_2 = \frac{\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} - \ln x_2 - 1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1}{x_2 - x_1} - \ln x_2 - 1$$

$$= \frac{x_1 \ln x_2 - x_1 \ln x_1}{x_2 - x_1} - 1$$

$$= \frac{\ln \frac{x_2}{x_1}}{\frac{x_2}{x_1} - 1} - 1.$$

$$\text{令 } \frac{x_2}{x_1} = t (t > 1).$$

$$\text{则 } h(t) = \frac{\ln t}{t} - 1 = \frac{\ln t - t + 1}{t - 1}.$$

$\because t - 1 > 0$, 只需证明 $\ln t - t + 1 < 0$,

$$\text{令 } s(t) = \ln t - t + 1.$$

$$\text{则 } s'(t) = \frac{1}{t} - 1 < 0,$$

$\therefore s(t)$ 在 $t \in (1, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore s(t) < s(1) = 0,$$

$$\therefore h(t) < 0, \text{ 即 } \ln x_0 < \ln x_2.$$

故 $x_0 < x_2$.

同理可证 $x_1 < x_0$.

故 $x_1 < x_0 < x_2$.

【标注】【知识点】已知极值情况求函数解析式；双变量问题；通过构造函数证明不等式

 双变量化单变量构造函数

18. 已知函数 $f(x) = x + x \ln x$.

(1) 若 $k \in \mathbf{Z}$, 且 $k(x-1) < f(x)$ 对任意 $x > 1$ 恒成立, 求 k 的最大值.

(2) 当 $n > m \geq 4$ 时, 证明: $(mn^n)^m > (nm^m)^n$.

【答案】 (1) k 的最大值为 3.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 由 (1) 知, $f(x) = x + x \ln x$,

$$\therefore k < \frac{f(x)}{x-1} \text{ 对任意 } x > 1 \text{ 恒成立,}$$

$$\text{即 } k < \frac{x + x \ln x}{x-1} \text{ 对任意 } x > 1 \text{ 恒成立,}$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{x + x \ln x}{x-1},$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{x - \ln x - 2}{(x-1)^2},$$

$$\text{令 } h(x) = x - \ln x - 2, (x > 1),$$

$$\text{则 } h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0,$$

所以函数 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{因为 } h(3) = 1 - \ln 3 < 0,$$

$$h(4) = 2 - \ln 2 > 0,$$

所以方程 $h(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上存在唯一实根 x_0 , 且满足 $x_0 \in (3, 4)$,

当 $1 < x < x_0$ 时, $h(x) < 0$, 即 $g'(x) < 0$,

当 $x > x_0$ 时, $h(x) > 0$, 即 $g'(x) > 0$,

所以函数 $g(x) = \frac{x + x \ln x}{x-1}$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore [g(x)]_{\min} = g(x_0) = \frac{x_0(1 + \ln x_0)}{x_0 - 1}$$

$$= \frac{x_0(1 + x_0 - 2)}{x_0 - 1}$$

$$= x_0 \in (3, 4),$$

$$\therefore k < [g(x)]_{\min} = x_0 \in (3, 4),$$

故整数 k 的最大值为 3.

(2) 由 (2) 知, $g(x) = \frac{x + x \ln x}{x-1}$ 是 $[4, +\infty)$ 上的增函数,

$\therefore$ 当 $n > m \geq 4$ 时,

$$\frac{n + n \ln n}{n-1} > \frac{m + m \ln m}{m-1},$$

$$\text{即 } n(m-1)(1 + \ln n) > m(n-1)(1 + \ln m),$$

整理得:

$$mn \ln n + m \ln m > mn \ln m + n \ln n + (n - m),$$

$$\therefore n > m,$$

$$\therefore mn \ln n + m \ln m > mn \ln m + n \ln n,$$

$$\text{即} \ln n^{mn} + \ln m^m > \ln m^{mn} + \ln n^n,$$

$$\text{即} \ln(n^{mn} m^m) > \ln(m^{mn} n^n),$$

$$\therefore (mn^n)^m > (nm^m)^n.$$

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题；二阶导问题；双变量问题；隐零点问题

备注：2019年天津和平区天津市耀华中学高三一模文科第20题14分

19. 已知函数 $f(x) = e^x$ ， e 为自然对数的底数。

$$\text{设 } x_1, x_2 \in \mathbf{R}, \text{ 且 } x_1 < x_2, \text{ 求证: } \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

【答案】 (1) 证明见解析。

【解析】 (1) 要证: $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

$$\text{只证 } \frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2} > \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1},$$

$$\text{即证 } \frac{1 + e^{x_2 - x_1}}{2} > \frac{1 - e^{x_2 - x_1}}{x_1 - x_2},$$

$$\text{令 } x_2 - x_1 = t, t > 0,$$

$$\text{可得 } \frac{1 + e^t}{2} > \frac{e^t - 1}{t},$$

$$\text{即 } (t - 2)e^t + t + 2 > 0,$$

$$\text{令 } M(t) = (t - 2)e^t + t + 2, (t > 0),$$

$$\text{则 } M'(t) = (t - 1)e^t + 1,$$

$$M'(t) = te^t > 0,$$

$$\therefore M'(t) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 递增, 而 } M'(0) = 0.$$

$$\therefore M(t) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 递增,}$$

$$\text{即 } M(t) > M(0) = 0,$$

$$\text{即 } (t - 2)e^t + t + 2 > 0, \text{ 故原不等式成立.}$$

【标注】【题型】已知单调性求参数的取值范围；利用导数证明不等式恒成立问题；通过构造函数证明不等式；导数的几何意义的实际应用

【知识点】 导数与最值；导数与单调性；导数的几何意义

2. 巩固练习

双变量化单变量构造函数

20. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{a(x-1)}{x+1}$, $a \in \mathbf{R}$.

设 m, n 为正实数, 且 $m > n$, 求证: $\frac{m-n}{\ln m - \ln n} < \frac{m+n}{2}$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) $\because m, n$ 为正实数, 且 $m > n$,

$$\therefore \text{要证 } \frac{m-n}{\ln m - \ln n} < \frac{m+n}{2},$$

$$\text{只需证 } \frac{\frac{m}{n} - 1}{\ln \frac{m}{n}} < \frac{\frac{m}{n} + 1}{2}.$$

$$\text{即证 } \ln \frac{m}{n} > \frac{2\left(\frac{m}{n} - 1\right)}{\frac{m}{n} + 1},$$

$$\text{只需证 } \ln \frac{m}{n} - \frac{2\left(\frac{m}{n} - 1\right)}{\frac{m}{n} + 1} > 0.$$

$$\text{设 } h(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}, x \in (0, +\infty),$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geq 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{即函数 } h(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上是单调递增,}$$

$$\text{又 } \because \frac{m}{n} > 1,$$

$$\therefore h\left(\frac{m}{n}\right) > h(1) = 0,$$

$$\text{即 } \ln \frac{m}{n} - \frac{2\left(\frac{m}{n} - 1\right)}{\frac{m}{n} + 1} > 0 \text{ 成立,}$$

$$\text{也即 } \frac{m-n}{\ln m - \ln n} < \frac{m+n}{2} \text{ 成立,}$$

【标注】【知识点】已知单调性求参数的取值范围；导数与极值；通过构造函数证明不等式