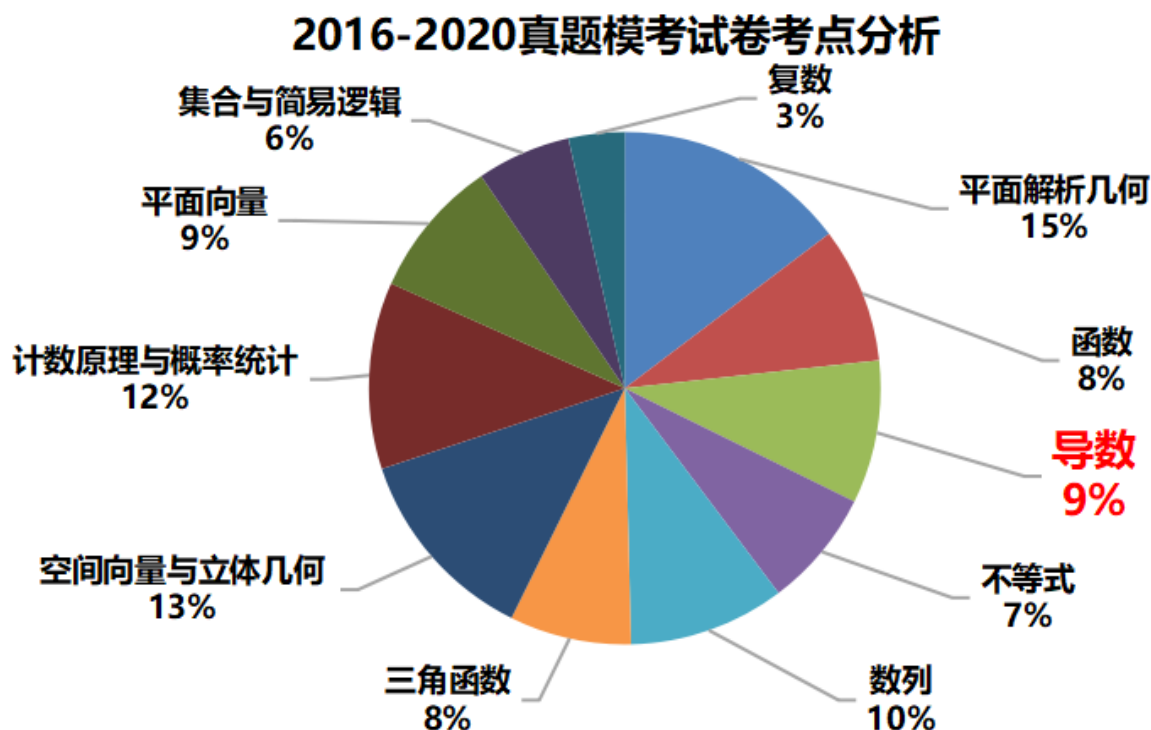


导数综合（一）

1. 知己知彼

📍 考点占比



📍 考点分析

2016-2020年真题及重要模考考点分析（48份试卷）			
模块	章节	考点	考察频次
导数	导数的应用	导数与单调性	58
		导数与最值	34
		导数与极值	25
		导数的实际应用	1
	导数的运算	利用公式和四则运算法则求导	56
		复合函数的求导法则	2
		导数的运算	1
	导数的概念及其意义	导数的几何意义	26
		函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率	5
		导数的定义	2

一、单变量证明不等式

1. 典型例题

直接构造函数证明不等式

1. 已知函数 $f(x) = (x^2 + ax)e^x$ 的两个极值点为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, $x_1 + x_2 = -2 - \sqrt{5}$.

当 $m \leq -e$ 时, 求证: $[f(x) + 2e^x] \cdot [(x-2)e^x - m + 1] > \frac{3}{4}e^x$.

2. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{a(x-1)}{x} (a \in \mathbf{R})$.

求证: $\forall x \in (1, 2)$, 不等式 $\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} < \frac{1}{2}$ 恒成立.

根据题干函数构造 $p(x)$ 最小值 $\geq q(x)$ 最大值的形式

3. 已知函数 $f(x) = e^x - a \ln x - a$, 其中常数 $a > 0$.

求证: $e^{2x-2} - e^{x-1} \ln x - x \geq 0$.

4. 函数 $f(x) = \frac{a + \ln x}{x}$, 若曲线 $f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线与直线 $e^2x - y + e = 0$ 垂直 (其中 e 为自然对数的底数).

求证: 当 $x > 1$ 时, $\frac{f(x)}{e+1} > \frac{2e^{x-1}}{(x+1)(xe^x+1)}$.

5. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax - ae^x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

求证: 当 $x \geq 0$ 时, $x^2 + 2x + 3 \leq e^{2x}(3 - 2 \sin x)$.

根据题干函数构造不等式进行放缩

6. 设函数 $f(x) = (x+1) \ln x - a(x-1)$.

(1) 当 $a \leq 2$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(2) 当 $1 < x < 2$ 时, 证明: $\frac{2}{x-1} > \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln(2-x)}$.

7. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + (a+2)x + 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 设 $a \in \mathbf{Z}$, 若对任意的 $x > 0$, $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求整数 a 的最大值.

(2) 求证: 当 $x > 0$ 时, $e^x - x \ln x + 2x^3 - x^2 + x - 1 > 0$.

8. 已知函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$.

(1) 当 $x \geq 0$ 时, 若不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(2) 若 $x > 0$, 证明 $(e^x - 1) \ln(x+1) > x^2$.

9. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + e^2 + \frac{1}{e} - \frac{\ln x}{x}$ (e 为自然对数的底数).

(1) 当 $a = e$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程.

(2) 证明: 当 $a \leq e$ 时, 不等式 $x^3 - 2ax^2 \geq \ln x - \left(e^2 + \frac{1}{e}\right)x$ 成立.

导数隐零点的应用

10. 已知函数 $f(x) = ax + b \ln x (a, b \in \mathbf{R})$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = \frac{1}{2}x - 1$.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 设 $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x$, 求证: 对于 $x \in (0, +\infty)$, $g(x) - f(x) > 2$ 恒成立.

11. 已知 $f(x) = ae^x - x \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, e 是自然对数的底数.

(1) 若 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上单调递增函数, 求实数 a 的取值范围.

(2) 若 $a \geq \frac{2}{e^2}$, 证明: $f(x) > 0$.

2. 巩固练习

直接构造函数证明不等式

12. 已知函数 $f(x) = x^3 + x^2 - ax + 1$, 且 $f'(1) = 4$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值.

(2) 当 $0 \leq x \leq a + 1$ 时, 证明: $\frac{e^x}{f(x) - x^3} > x$.

根据题干函数构造 $p(x)$ 最小值 $\geq q(x)$ 最大值的形式

13. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = \frac{m}{x} - \frac{3}{x^2} - 1$.

证明: 对一切 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $\ln x < \frac{2x}{e} - \frac{x^2}{e^x}$ 成立.

根据题干函数构造不等式进行放缩

14. 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x + m)$, 当 $m \leq 2$ 时, 证明: $f(x) > 0$.

15. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax - ae^x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

求证: 当 $x > 0$ 时, $xe^x - e \ln x > \frac{1}{2}x^3 + x^2$.

导数隐零点的应用

16. 设函数 $f(x) = ax - 2 - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

若 $g(x) = ax - e^x$, 求证: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > g(x)$.

二、双变量不等式证明

1. 典型例题

凹凸函数的应用

17. 已知函数 $f(x) = ax \ln x (a \in \mathbf{R})$ 的极小值为 $-\frac{1}{e}$.

(1) 求 a 的值.

(2) 任取两个不等的正数 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 若存在正数 x_0 , 使得 $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 成立, 求证: $x_1 < x_0 < x_2$.

双变量化单变量构造函数

18. 已知函数 $f(x) = x + x \ln x$.

(1) 若 $k \in \mathbf{Z}$, 且 $k(x-1) < f(x)$ 对任意 $x > 1$ 恒成立, 求 k 的最大值.

(2) 当 $n > m \geq 4$ 时, 证明: $(mn^n)^m > (nm^m)^n$.

19. 已知函数 $f(x) = e^x$, e 为自然对数的底数.

设 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 求证: $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

2. 巩固练习

双变量化单变量构造函数

20. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{a(x-1)}{x+1}$, $a \in \mathbf{R}$.

设 m, n 为正实数, 且 $m > n$, 求证: $\frac{m-n}{\ln m - \ln n} < \frac{m+n}{2}$.