

第一讲-基本不等式练习题

一、基本不等式基础应用

1. 已知 $a > 0, b > 0, b = \frac{1-a}{3}$, 若 $y = 3^a + 27^b$, 则 y 的最小值 _____ .

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】 $a > 0, b > 0, b = \frac{1-a}{3}$,

即为 $a + 3b = 1, y = 3^a + 27^b \geq 2\sqrt{3^a \cdot 27^b} = 2\sqrt{3^{a+3b}} = 2\sqrt{3}$,

当且仅当 $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ 时取得最小值 $2\sqrt{3}$.

故答案为: $2\sqrt{3}$.

【标注】 【知识点】 基本不等式的实际应用

2. 已知 $x, y \in \mathbf{R}$ 且 $x - 2y - 4 = 0$, 则 $2^x + \frac{1}{4^y}$ 的最小值为 () .

A. 4

B. 8

C. 16

D. 256

【答案】 B

【解析】 根据题意, $x, y \in \mathbf{R}$ 且 $x - 2y - 4 = 0$, 则 $x = 2y + 4$,

$$2^x + \frac{1}{4^y} = 2^{2y+4} + \frac{1}{4^y} = 16 \times 4^y + \frac{1}{4^y} \geq 2\sqrt{16 \times 4^y \times \frac{1}{4^y}} = 8,$$

当且仅当 $x = 2y$ 时等号成立, 即 $2^x + \frac{1}{4^y}$ 的最小值为 8.

故选: B.

【标注】 【知识点】 利用基本不等式求最值; 基本不等式的实际应用

3. 已知 $3a^2 + 2b^2 = 5$, 则 $y = (2a^2 + 1) \cdot (b^2 + 2)$ 的最大值为 _____ .

【答案】 $\frac{147}{16}$

【解析】 方法一: $y = (2a^2 + 1)(b^2 + 2) = \frac{2}{3} \left(3a^2 + \frac{3}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} (2b^2 + 4)$

$$\leq \frac{1}{3} \left(\frac{3a^2 + \frac{3}{2} + 2b^2 + 4}{2} \right)^2 = \frac{21^2}{3 \times 4^2} = \frac{147}{16},$$

当且仅当 $3a^2 + \frac{3}{2} = 2b^2 + 4$ 取到等号, 此时 $a^2 = \frac{5}{4}$, $b^2 = \frac{5}{8}$.

方法二: $3a^2 + 2b^2 = 5$, 故 $b^2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}a^2$. 代入得:

$$y = (2a^2 + 1) \cdot (b^2 + 2) = (2a^2 + 1) \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}a^2 + 2 \right) = 2 \left(a^2 + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{3}{2} (3 - a^2) \\ \leq 3 \cdot \left(\frac{a^2 + \frac{1}{2} + 3 - a^2}{2} \right)^2 = \frac{147}{16},$$

当且仅当 $a^2 + \frac{1}{2} = 3 - a^2$ 时等号成立, 此时 $a^2 = \frac{5}{4}$, $b^2 = \frac{5}{8}$.

故答案为: $\frac{147}{16}$.

【标注】【素养】逻辑推理

【知识点】基本不等式的实际应用

4. 若实数 x, y 满足 $x > 0, y > 0$, 且 $x + 4y = 40$, 则 $\lg x + \lg y$ 的最大值为 _____.

【答案】2

【解析】 $\because x > 0, y > 0, x + 4y = 40$,

$$\therefore 40 \geq 2\sqrt{4xy},$$

$$\therefore xy \leq 100,$$

当且仅当 $x = 20, y = 5$ 时取等号,

$$\therefore \lg x + \lg y = \lg(xy) \leq \lg 100 = 2.$$

【标注】【知识点】基本不等式的概念

二、“1”的替换

5. 若实数 $a, b \in \mathbf{R}^+$, 且 $a + b = 1$, 则 $\frac{1}{1-a} + \frac{2}{1-b}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $3 + 2\sqrt{2}$

【解析】方法一: 由题设可知:

由实数 $a, b \in \mathbf{R}^+$, 且 $a + b = 1$,

则 $0 < a < 1, 0 < b < 1$,

即 $0 < 1 - a < 1, 0 < 1 - b < 1$, 且易知 $(1 - a) + (1 - b) = 1$,

$$\text{则 } \frac{1}{1-a} + \frac{2}{1-b} = \left(\frac{1}{1-a} + \frac{2}{1-b} \right) [(1-a) + (1-b)],$$

$$= 1 + 2 + \frac{1-b}{1-a} + \frac{2(1-a)}{1-b},$$

$$\geq 3 + 2\sqrt{\frac{1-b}{1-a} \cdot \frac{2(1-a)}{1-b}} = 3 + 2\sqrt{2},$$

当且仅当 $(1-b)^2 = 2(1-a)^2$ 时等号成立，

即 $b = \sqrt{2} - 1$ ， $a = 2 - \sqrt{2}$ 时等号成立，

故 $\frac{1}{1-a} + \frac{2}{1-b}$ 的最小值为 $3 + 2\sqrt{2}$ 。

方法二：由实数 $a, b \in \mathbf{R}^+$ ，且 $a + b = 1$ ，

则 $1-a = b$ ，且 $1-b = a$ ，

$$\text{则原式 } \frac{1}{1-a} + \frac{2}{1-b} = \frac{1}{b} + \frac{2}{a} = \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{a}\right)(a+b),$$

$$= 1 + 2 + \frac{a}{b} + \frac{2b}{a},$$

$$\geq 3 + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{2b}{a}} = 3 + 2\sqrt{2},$$

当且仅当 $a^2 = 2b^2$ 时等号成立，即 $b = \sqrt{2} - 1$ ， $a = 2 - \sqrt{2}$ 时等号成立，

故 $\frac{1}{1-a} + \frac{2}{1-b}$ 的最小值为 $3 + 2\sqrt{2}$ 。

【标注】【知识点】倒数和形式；利用基本不等式求最值；基本不等式的概念

6. 已知 $a > 0$ ， $b > 0$ ，且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，则 $\frac{4}{a-1} + \frac{16}{b-1}$ 的最小值为 _____。

【答案】 16

【解析】 方法一：因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，所以 $b = \frac{a}{a-1}$ ；代入

$$\frac{4}{a-1} + \frac{16}{b-1} = \frac{4}{a-1} + 16(a-1) \geq 16,$$

等号成立当且仅当 $\frac{4}{a-1} = 16(a-1)$ ，即 $a = 3$ ， $b = \frac{3}{2}$ ；

故 $\frac{4}{a-1} + \frac{16}{b-1}$ 最小值为 16。

方法二：因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，所以 $a + b - ab = 0$ ；

$$\frac{4}{a-1} + \frac{16}{b-1} = \frac{16a + 4b - 20}{ab - a - b + 1} = 16a + 4b - 20, \text{ 往求 } 16a + 4b \text{ 的最小值；}$$

$$(16a + 4b) = 1 \cdot (16a + 4b) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(16a + 4b)$$

$$= 16 + 4 + \frac{4b}{a} + \frac{16a}{b} \geq 20 + 2\sqrt{64} = 36,$$

等号成立当且仅当 $\frac{4b}{a} = \frac{16a}{b}$ ，与 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ 联立，得 $a = \frac{3}{2}$ ， $b = 3$ 。

因此 $16a + 4b$ 最小值为 36；故 $\frac{4}{a-1} + \frac{16}{b-1}$ 最小值为 16。

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

7. 已知实数 x, y 满足 $x > y > 0$ 且 $x + y = 1$, 则 $\frac{4}{x+3y} + \frac{1}{x-y}$ 的最小值是 _____ .

【答案】 $\frac{9}{2}$

【解析】
$$\begin{aligned} & \frac{4}{x+3y} + \frac{1}{x-y} \\ &= \frac{2(x+3y+x-y)}{2(x+3y)(x-y)} + \frac{x+3y+x-y}{2(x-y)(x+3y)} \\ &= 2 + 2 \cdot \frac{x-y}{x+3y} + \frac{1}{2} + \frac{x+3y}{2(x-y)} \\ &= 2 \cdot \frac{x-y}{x+3y} + \frac{x+3y}{2(x-y)} + \frac{5}{2} \\ &\geq 2 + \frac{5}{2} \\ &= \frac{9}{2}, \end{aligned}$$

 (当且仅当 $2 \cdot \frac{x-y}{x+3y} = \frac{x+3y}{2(x-y)}$, 即 $x = \frac{5}{6}, y = \frac{1}{6}$ 时, 等号成立),
 故答案为: $\frac{9}{2}$.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用; 利用基本不等式求最值

8. 已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 3$, 则 $\frac{1}{(2x+y)^2} + \frac{4}{(x-2y)^2}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】 设 $(2x+y)^2 = m, (x-2y)^2 = n$, 可知
 $n+m = (2x+y)^2 + (x-2y)^2 = 5(x^2+y^2) = 15$,
 则

$$\frac{1}{(2x+y)^2} + \frac{4}{(x-2y)^2} = \frac{m+n}{15} \left(\frac{1}{m} + \frac{4}{n} \right) = \frac{1}{15} \left(5 + \frac{n}{m} + \frac{4m}{n} \right) \geq \frac{1}{15} (5+4) = \frac{3}{5}$$

 .
 当且仅当 $\frac{n}{m} = \frac{4m}{n}$, 即 $n = 2m$, 也即 $n = 10, m = 5$ 时取等号.
 故答案为: $\frac{3}{5}$.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值; 基本不等式的实际应用

9. 设 $a+b=2020, b>0$, 则当 $a=$ _____ 时, $\frac{1}{2020|a|} + \frac{|a|}{b}$ 取得最小值.

【答案】 $-\frac{2020}{2019}$

【解析】

$$\begin{aligned}
 &\because a+b=2020, \therefore \text{原式} = \frac{a+b}{2020^2 \cdot |a|} + \frac{|a|}{b}, \\
 &= \frac{a}{2020^2 |a|} + \frac{b}{2020^2 |a|} + \frac{|a|}{b} \\
 &\geq \frac{a}{2020^2 |a|} + 2\sqrt{\frac{1}{2020^2}} \geq \frac{-1}{2020^2} + \frac{1}{1010}, \\
 &\text{令} \begin{cases} a+b=2020 \\ b=2020|a| \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{2020}{2019}, \\
 &\therefore \text{当 } a = -\frac{2020}{2019} \text{ 时, 原式有最小值.}
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】基本不等式成立的条件；基本不等式的实际应用；利用基本不等式求最值

10. 设 $x > 0, y > 0$ 且 $x+y=4$, 则 $\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+2}$ 的最小值是 ().
- A. $\frac{16}{7}$ B. $\frac{7}{3}$ C. $\frac{23}{10}$ D. $\frac{9}{4}$

【答案】 A

【解析】 $\because x+y=4$, 则 $(x+1)+(y+2)=7$,

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+2} &= \frac{(x+1)^2 - 2(x+1) + 1}{x+1} + \frac{(y+2)^2 - 4(y+2) + 4}{y+2} \\
 &= 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{y+2} = 1 + \left(\frac{1}{x+1} + \frac{4}{y+2} \right) \left(\frac{x+1}{7} + \frac{y+2}{7} \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{y+2}{7(x+1)} + \frac{4(x+1)}{7(y+2)} \geq \frac{12}{7} + 2 \times \frac{2}{7} = \frac{16}{7}.
 \end{aligned}$$

故选A.

【标注】【知识点】倒数和形式

11. 已知 $a > b$, 二次三项式 $ax^2 + 2x + b \geq 0$ 对一切实数恒成立, 又 $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使 $ax_0^2 + 2x_0 + b = 0$, 则 $\frac{a^2 + b^2}{a - b}$ 的最小值为 ____.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】 $\because$ 已知 $a > b$, 二次三项式 $ax^2 + 2x + b \geq 0$ 对于一切实数 x 恒成立,

$$\therefore a > 0 \text{ 且 } \Delta = 4 - 4ab \leq 0, \therefore ab \geq 1.$$

再由 $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使 $ax_0^2 + 2x_0 + b = 0$ 成立, 可得 $\Delta = 0$,

$$\therefore ab = 1,$$

$$\therefore a > 1,$$

∴

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b} = \frac{a^2 + \frac{1}{a^2}}{a - \frac{1}{a}} = \frac{(a - \frac{1}{a})^2 + 2}{a - \frac{1}{a}} = \left(a - \frac{1}{a}\right) + \frac{2}{a - \frac{1}{a}} \geq 2\sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{2}{a - \frac{1}{a}}} = 2\sqrt{2}$$

, 当且仅当 $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 时取等号

故 $\frac{a^2 + b^2}{a - b}$ 的最小值为: $2\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】基本不等式的概念

12. 已知 a, b 均为正数, 且 $a + b = 1$, 则当 $a =$ _____ 时, 代数式 $\frac{a^2 + 1}{2ab} - 1$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\sqrt{2} - 1; \sqrt{2}$

【解析】 因为 $a + b = 1$, 所以 $a^2 + b^2 + 2ab = 1$,

$$\text{则 } \frac{a^2 + 1}{2ab} - 1 = \frac{a^2 + a^2 + b^2 + 2ab}{2ab} - 1 = \frac{a}{b} + \frac{b}{2a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{2a}} = \sqrt{2},$$

当且仅当 $\frac{a}{b} = \frac{b}{2a}$ 且 $a + b = 1$ 即 $a = \sqrt{2} - 1$ 时取等号, 此时取得最小值 $\sqrt{2}$.

故答案为: $\sqrt{2} - 1, \sqrt{2}$.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值; 基本不等式的概念

三、二次均值

13. 已知 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2\sqrt{ab}$ 的最小值是 ()

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. 4

D. 5

【答案】 C

【解析】 方法一: $\because \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}} + 2\sqrt{ab} \geq 2\sqrt{2 \times 2} = 4$.

当且仅当 $a = b, \sqrt{ab} = 1$ 时, 等号成立, 即 $a = b = 1$ 时, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2\sqrt{ab}$ 取最小值 4.

方法二: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2\sqrt{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \sqrt{ab} + \sqrt{ab} \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}} = 4$. 故选 C

【标注】【知识点】基本不等式的概念

14. 设 $a > b > 0$, 则 $a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值是 _____.

【答案】4

【解析】方法一： $\because a > b > 0$ ，故 $ab > 0$ ， $a(a-b) > 0$ ，

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} &= a^2 - ab + ab + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} \\ &= ab + \frac{1}{ab} + a(a-b) + \frac{1}{a(a-b)} \geq 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

当且仅当 $ab = 1$ ， $a(a-b) = 1$ 时等号成立，解得 $a = \sqrt{2}$ ， $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

$$\text{方法二：} a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} = a^2 + \frac{a-b+b}{ab(a-b)} = a^2 + \frac{1}{b(a-b)},$$

$\because a > 0$ ， $a-b > 0$ ， $\therefore b(a-b) \leq \left(\frac{b+a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$ ，当 $b = a-b$ ，即 $a = 2b$ 时取到等号。

$$\text{从而 } a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} \geq a^2 + \frac{4}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{4}{a^2}} = 4,$$

当且仅当 $a^2 = \frac{4}{a^2}$ ，即 $a = \sqrt{2}$ 时取到等号。

从而当 $a = \sqrt{2}$ ， $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号同时取到，此时 $a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)}$ 有最小值4。

故答案为：4。

【标注】【素养】逻辑推理

【知识点】基本不等式的实际应用

15. 若 $a, b \in \mathbf{R}^+$ ，则 $\frac{a^2 + b^2 + 9}{\sqrt{2a+b}}$ 的最小值为_____。

【答案】 $2\sqrt{3}$

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的概念

16. 若 x, y 是正数，则 $\left(x + \frac{1}{2y}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2x}\right)^2$ 的最小值为（ ）

A. 3

B. $\frac{7}{2}$

C. 4

D. $\frac{9}{2}$

【答案】C

$$\begin{aligned} \text{【解析】} & \left(x + \frac{1}{2y}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2x}\right)^2 = x^2 + \frac{x}{y} + \frac{1}{4y^2} + y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{4x^2} \\ &= x^2 + \frac{1}{4x^2} + y^2 + \frac{1}{4y^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\ &\geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{4x^2}} + 2\sqrt{y^2 \cdot \frac{1}{4y^2}} + 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} \end{aligned}$$

$$= 1 + 1 + 2 = 4 .$$

当且仅当 $x^2 = \frac{1}{4x^2}$ 且 $y^2 = \frac{1}{4y^2}$ 且 $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$ 时“=”成立，即 $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时。

∴最小值为4。

故选C。

【标注】【知识点】基本不等式成立的条件；利用基本不等式求最值

17. 已知 $a > 0, b > 0$ ，则 $\frac{(b+1)^2}{a} + \frac{(a+1)^2}{b}$ 的最小值为 _____。

【答案】 8

【解析】

$$\begin{aligned} & \frac{(b+1)^2}{a} + \frac{(a+1)^2}{b} \\ &= \left(\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b} \right) + \left(\frac{2b}{a} + \frac{2a}{b} \right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \\ &\geq 2\sqrt{\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b}} + 2\sqrt{\frac{2b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} + 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \\ &= 2\sqrt{ab} + \frac{2}{\sqrt{ab}} + 4 \\ &\geq 2\sqrt{2\sqrt{ab} \cdot \frac{2}{\sqrt{ab}}} + 4 \\ &= 8, \end{aligned}$$

当且仅当 $a = b = 1$ 时，取得等号。

故最小值为8。

【标注】【知识点】基本不等式成立的条件；利用基本不等式求最值

四、综合创新

18. 若 $a, b > 0$ ，且 $b > 2a$ ，则 $\frac{b^2 - 2ab + a^2}{ab - 2a^2}$ 的最小值为 ()。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 D

【解析】 由 $a, b > 0$ 且 $b > 2a$ 得 $\frac{b}{a} > 2$ ，
令 $t = \frac{b}{a} (t > 2)$ ，

$$\begin{aligned}\text{则 } \frac{b^2 - 2ab + a^2}{ab - 2a^2} &= \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{b}{a} + 1}{\frac{b}{a} - 2} = \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2} \\ &= \frac{(t-2)^2 + 2(t-2) + 1}{t-2} = t - 2 + \frac{1}{t-2} + 2,\end{aligned}$$

$$\because t > 2,$$

$$\therefore t - 2 > 0,$$

$$\therefore t - 2 + \frac{1}{t-2} + 2 \geq 2\sqrt{(t-2) \cdot \frac{1}{t-2}} + 2 = 4,$$

当且仅当 $t - 2 = \frac{1}{t-2}$, 即 $t = 3$ 时, 等号成立, 则 $\frac{b^2 - 2ab + a^2}{ab - 2a^2}$ 的最小值为 4.

故选: D.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值; 基本不等式成立的条件

19. 已知 $a + b = 4$, 且 $a > 0$ 、 $b > 0$, 则 $\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$

【解析】 原式 $= \frac{ab^2 + a + ba^2 + b}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}$
 $= \frac{ab(a+b) + a + b}{a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1} = \frac{4ab + 4}{a^2b^2 + (a+b)^2 - 2ab + 1}$
 $= \frac{4(ab+1)}{a^2b^2 - 2ab + 17} = \frac{4(ab+1)}{(ab+1)^2 - 4(ab-1) + 20}$
 $= \frac{4}{(ab+1) + \frac{20}{ab+1} - 4} \leq \frac{4}{4\sqrt{5} - 4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$
 故答案为: $\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用; 利用基本不等式求最值

20. 若 a, b 均为正实数, 则 $\frac{ab+b}{a^2+b^2+1}$ 的最大值为 _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】 方法一: $\because a^2 + \frac{1}{2}b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{b^2}{2}} = \sqrt{2}ab$, 当且仅当 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}b$ 时取等号,
 $\frac{1}{2}b^2 + 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}b^2} = \sqrt{2}b$, 当且仅当 $b = \sqrt{2}$ 时取等号,

$$\therefore \frac{ab+b}{a^2+b^2+1} = \frac{ab+b}{a^2+\frac{b^2}{2}+\frac{b^2}{2}+1^2} \leq \frac{ab+b}{\sqrt{2}ab+\sqrt{2}b} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 当且仅当 } a=1$$

, $b=\sqrt{2}$ 时取等号,

故 $\frac{ab+b}{a^2+b^2+1}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

方法二: $\frac{ab+b}{a^2+b^2+1} = \frac{a+1}{b+\frac{a^2+1}{b}} \leq \frac{a+1}{2\sqrt{a^2+1}}$, 当且仅当 $b = \frac{a^2+1}{b}$ 时等号成立.

$$\frac{a+1}{2\sqrt{a^2+1}} \leq \frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}}{2\sqrt{a^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 当且仅当 } a=1 \text{ 时等号成立.}$$

则当 $a=1, b=\sqrt{2}$ 时, 最大值为 $\sqrt{2}$.

$$\text{方法三: } \frac{ab+b}{a^2+b^2+1} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{1}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 + \frac{1}{b^2}}.$$

$$\text{令 } x = \frac{a}{b}, y = \frac{1}{b}.$$

则原式

$$= \frac{x+y}{x^2+y^2+1} \leq \frac{x+y}{\frac{(x+y)^2}{2}+1} = \frac{1}{\frac{x+y}{2} + \frac{1}{(x+y)}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+y}{2} \cdot \frac{1}{(x+y)}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} x=y \text{ 即 } \frac{a}{b} = \frac{1}{b} \\ \frac{x+y}{2} = \frac{1}{x+y}, \text{ 即 } \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{b}\right)^2 = 2 \end{cases} \text{ 等式成立.}$$

解得: $a=1, b=\sqrt{2}$.

故 $\frac{ab+b}{a^2+b^2+1}$ 最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用; 利用基本不等式求最值

21. 已知关于 x 的不等式 $\frac{1}{a}x^2 + bx + c < 0 (ab > 1)$ 的解集为空集, 则 $T = \frac{1}{2(ab-1)} + \frac{a(b+2c)}{ab-1}$ 的最小值为 ().

A. $\sqrt{3}$

B. 2

C. $2\sqrt{3}$

D. 4

【答案】 D

【解析】 方法一: 由题意得: $\frac{1}{a} > 0, b^2 - \frac{4c}{a} \leq 0$, 得 $c \geq \frac{ab^2}{4}$.

$$\therefore T = \frac{1}{2(ab-1)} + \frac{a(b+2c)}{ab-1} \geq \frac{1+2ab+a^2b^2}{2(ab-1)},$$

令 $ab-1 = m$, 则 $m > 0$,

$$\text{所以 } T \geq \frac{1+2(m+1)+(m+1)^2}{2m} = \frac{m}{2} + \frac{2}{m} + 2 \geq 4.$$

则 $T = \frac{1}{2(ab-1)} + \frac{a(b+2c)}{ab-1}$ 的最小值为 4 .

故选 D .

方法二：易知 $a > 0$, 则原不等式的解集为空集等价于 $x^2 + abx + ac < 0$ 的解集为空集 ,

所以 $\Delta = a^2b^2 - 4ac \leq 0 \Rightarrow 4ac \geq a^2b^2$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } T &= \frac{1+2ab+4ac}{2(ab-1)} \geq \frac{1+2ab+a^2b^2}{2(ab-1)} = \frac{(ab-1)^2 + 4(ab-1) + 4}{2(ab-1)} \\ &= \frac{1}{2} \left[(ab-1) + \frac{4}{ab-1} + 4 \right] \geq \frac{1}{2} \times (4+4) = 4 , \end{aligned}$$

当且仅当 $ab-1 = \frac{4}{ab-1}$, 即 $ab = 3$ 时 , 等号成立 . 故选 D .

【标注】【知识点】基本不等式的概念

22. 若正实数 a, b 满足 $(2a+b)^2 = 1+6ab$, 则 $\frac{ab}{2a+b+1}$ 的最大值为 _____ , 此时 $a+b =$ _____ .

【答案】 $\frac{1}{6}; \frac{3}{2}$

【解析】 $\because$ 正实数 a, b 满足 $(2a+b)^2 = 1+6ab$,

$$\therefore ab = \frac{(2a+b)^2 - 1}{6} .$$

$$\because (2a+b)^2 = 1+6ab \leq 1+3 \times \left(\frac{2a+b}{2} \right)^2 ,$$

解得 $2a+b \leq 2$.

当且仅当 $b = 2a = 1$ 取等号 .

$$\text{则 } \frac{ab}{2a+b+1} = \frac{(2a+b)^2 - 1}{6(2a+b) + 6} = \frac{2a+b-1}{6} \leq \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6} ,$$

$$\therefore \frac{ab}{2a+b+1} \text{ 的最大值为 } \frac{1}{6} .$$

$$\text{此时 } a+b = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} .$$

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的概念

23. 设 a, b 为正实数 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2\sqrt{2}$, $(a-b)^2 = 4(ab)^3$, 则 $\log_a b =$ _____ .

【答案】 -1

【解析】 由 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2\sqrt{2}$, 得 $a+b \leq 2\sqrt{2ab}$.

$$\text{又 } (a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2 = 4ab + 4(ab)^3 \geq 4 \cdot 2\sqrt{ab \cdot (ab)^3} = 8(ab)^2 ,$$

$$\text{即 } a+b \geq 2\sqrt{2ab} , \text{ ①}$$

$$\text{于是 } a+b = 2\sqrt{2ab} , \text{ ②}$$

再由不等式①中等号成立的条件，得 $ab = 1$.

与②联立解得 $\begin{cases} a = \sqrt{2} - 1 \\ b = \sqrt{2} + 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = \sqrt{2} + 1 \\ b = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$.

故 $\log_a b = -1$.

【标注】【知识点】基本不等式的概念