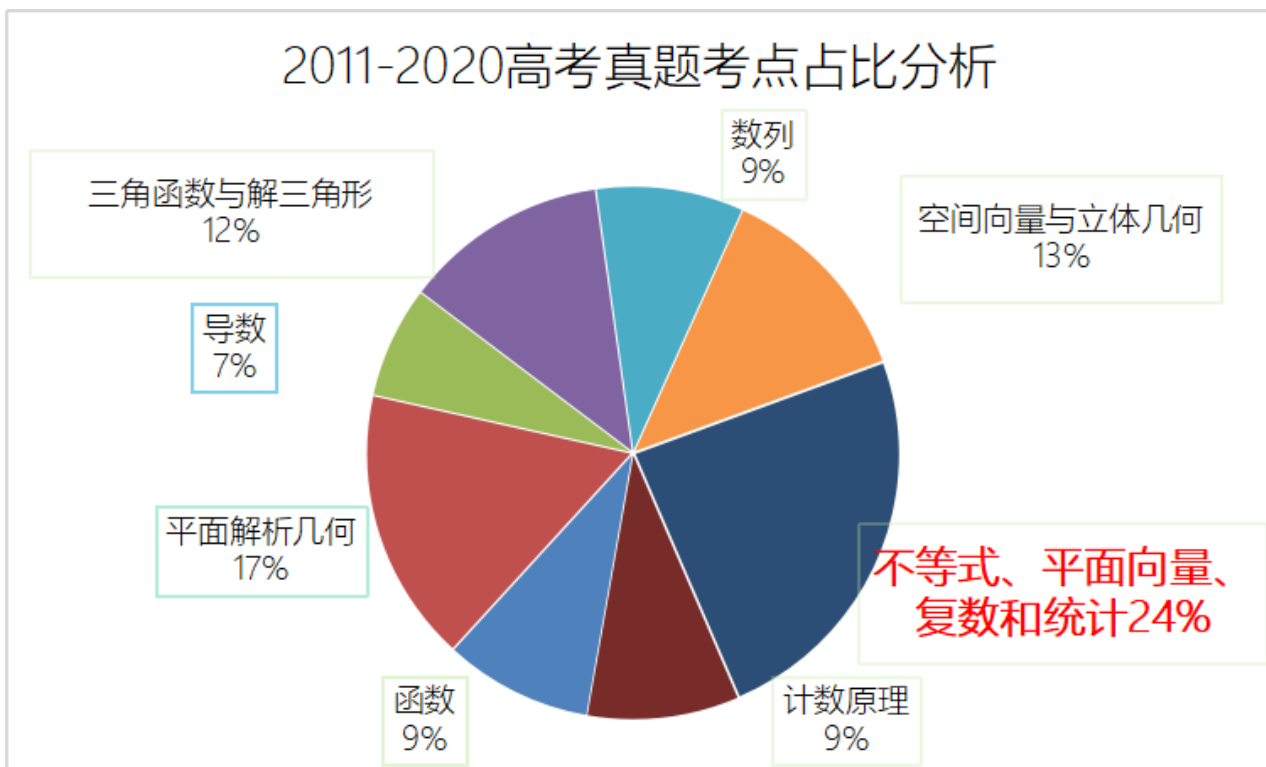


第一讲-基本不等式

1. 考点分析

📍 考点占比



📍 考点分析

2011-2020高考真题考点分析						
考点	平面向量	基本不等式	集合	简易逻辑	复数	统计
2011	14 (理)、14 (文)	12 (文)	13 (理)、9 (文)	2 (理)、4 (文)	1 (理)、1 (文)	9 (理)
2012	7 (理)、8 (文)		11 (理)、10 (文)	2 (理)、5 (文)	1 (理)、1 (文)	9 (理)
2013	12 (理)、12 (文)	14 (理)、14 (文)	1 (理)、1 (文)	4 (文)	9 (理)、9 (文)	
2014	8 (理)、13 (文)			7 (理)、3 (文)	1 (理)、1 (文)	9 (理)、9 (文)
2015	14 (理)、13 (文)	12 (文)	1 (理)、1 (文)	4 (理)、4 (文)	9 (理)、9 (文)	
2016	7 (理)、7 (文)		1 (理)、1 (文)	5 (理)、5 (文)	9 (理)、9 (文)	
2017	13 (理)、14 (文)	12 (理)、13 (文)	1 (理)、1 (文)	4 (理)、2 (文)	9 (理)、9 (文)	
2018	8 (理)、8 (文)	13 (理)、13 (文)	1 (理)、1 (文)	4 (理)、3 (文)	9 (理)、9 (文)	
2019	14 (理)、14 (文)	13 (理)、13 (文)	1 (理)、1 (文)	3 (理)、3 (文)	9 (理)、9 (文)	
2020	15	14	1	2	10	4
频次	19	10	17	17	19	5

2. 知识梳理



一、基本不等式基础应用

1. 真题分析

1. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a - 3b + 6 = 0$, 则 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】 $\because a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a - 3b + 6 = 0$,

$$\therefore a = 3b - 6,$$

$$2^a + \frac{1}{8^b} = 2^{3b-6} + \frac{1}{2^{3b}} = \frac{2^{3b}}{2^6} + \frac{1}{2^{3b}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2^6}} = \frac{1}{4},$$

$$\text{当且仅当 } \frac{2^{3b}}{2^6} = \frac{1}{2^{3b}},$$

即 $a = -3, b = 1$ 时取得最小值.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

备注：2018年高考真题天津卷理科第13题

分析：本题考察的是基本不等式基础应用-已知两个数乘积为定值求解和的最小值，首先我们需要判断出来 $2^a \cdot \frac{1}{8^b}$ 为定值，需要用到指数运算，将其变换为 $2^a \cdot \frac{1}{8^b} = 2^{a-3b} = 2^{-6}$ ，这样可使用基本不等式 $2^a + \frac{1}{8^b} \geq 2\sqrt{2^a \cdot \frac{1}{8^b}} = 2\sqrt{2^{a-3b}} = \frac{1}{4}$ 得出最小值。

2. 已知 $\log_2 a + \log_2 b \geq 1$, 则 $3^a + 9^b$ 的最小值为 _____ .

【答案】 18

【解析】 由 $\log_2 a + \log_2 b \geq 1$ 得 $ab \geq 2$, 且 $a > 0, b > 0$,
又 $3^a + 9^b = 3^a + 3^{2b} \geq 2\sqrt{3^a \cdot 3^{2b}} = 2\sqrt{3^{a+2b}}$,
因为 $a + 2b \geq 2\sqrt{a \cdot 2b} = 2\sqrt{2ab} \geq 2\sqrt{2 \times 2} = 4$,
所以 $3^a + 9^b \geq 2\sqrt{3^4} = 18$.
即 $3^a + 9^b$ 的最小值为 18.
故答案为: 18.

【标注】 【知识点】利用基本不等式求最值; 对数的运算

3. 已知 $a > 0, b > 0, ab = 8$, 则当 a 的值为 _____ 时, $\log_2 a \cdot \log_2(2b)$ 取得最大值.

【答案】 4

【解析】 方法一: 由题意得, 当 $a < 1$ 时, 则必有 $b > 1$, 此时 $\log_2 a \cdot \log_2(2b) < 0$,
当 $b < \frac{1}{2}$ 时, 则必有 $a > 1$, 此时 $\log_2 a \cdot \log_2(2b) < 0$,
当 $a > 1$ 且 $b > \frac{1}{2}$ 时, $\log_2 a \cdot \log_2(2b) > 0$,
故 $\log_2 a \cdot \log_2(2b)$ 的最大值在此范围取得,
而 $2\sqrt{\log_2 a \cdot \log_2(2b)} \leq \log_2 a + \log_2(2b) = \log_2(2ab) = \log_2 16 = 4$,
所以 $\log_2 a \cdot \log_2(2b) \leq 4$, 当且仅当 $\log_2 a = \log_2(2b)$, 即 $a = 2b = 4$ 时, 不等式取等号,
此时 $\log_2 a \cdot \log_2(2b)$ 取得最大值 4,
故答案为 4.

方法二: 当 $x, y \in \mathbf{R}^+$ 时, $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, 当且仅当 $x = y$ 时, 等号成立;

当 $x, y \in \mathbf{R}$ 时, $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, 当且仅当 $x = y$ 时, 等号成立.

$\log_2 a \cdot \log_2(2b) \leq \left[\frac{\log_2 a + \log_2(2b)}{2}\right]^2 = \left[\frac{\log_2(2ab)}{2}\right]^2 = \left[\frac{\log_2 16}{2}\right]^2 = 4$,

当且仅当 $a = 2, b = 4$ 时, 取等号, 即当 $a = 4$ 时, $\log_2 a \cdot \log_2(2b)$ 取得最大值,
故答案为: 4.

【标注】 【知识点】对数的运算

【素养】 数学运算

备注: 2015年高考真题天津卷文科第12题

分析：本题考察的是基本不等式基础应用-已知两个数和为定值求解积的最大值，首先我们需要判断出来 $\log_2 a + \log_2 2b$ 为定值，这个需要用到对数运算，将其变换为

$\log_2 a + \log_2 2b = \log_2 2ab = \log_2 16 = 4$ ，这样即可用基本不等式

$$\log_2 a \cdot \log_2 2b \leq \left(\frac{\log_2 a + \log_2 2b}{2} \right)^2 = \left(\frac{4}{2} \right)^2 = 4 \text{ 求出最大值，此时相应的取等条件即为}$$

$a = 2b$ ，结合 $ab = 8$ ，可求出 a 的值。

4. 设 $x > 0, y > 0, x + 2y = 5$ ，则 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为_____。

【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】 $x > 0, y > 0, x + 2y = 5$ ，

$$\text{则 } \frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}} = \frac{2xy + x + 2y + 1}{\sqrt{xy}} = \frac{2xy + 6}{\sqrt{xy}} = 2\sqrt{xy} + \frac{6}{\sqrt{xy}},$$

由基本不等式有：

$$2\sqrt{xy} + \frac{6}{\sqrt{xy}} \geq 2\sqrt{2\sqrt{xy} \cdot \frac{6}{\sqrt{xy}}} = 4\sqrt{3},$$

当且仅当 $2\sqrt{xy} = \frac{6}{\sqrt{xy}}$ 时，

即： $xy = 3, x + 2y = 5$ 时，

即 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$ 时，等号成立，

故 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$ 。

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

2. 思路总结

题型总结：

基本不等式基础题型：1、在已知和为定值的情况下可求乘积的最大值；2、在已知乘积为定值的情况下可求和的最小值，我们在处理过程中需要进行一定的恒等变换得出和为定值或者乘积为定值，需要的意识是在求解和的最小值时要优先考虑乘积是否为定值，在求解乘积的最大值的时候优先考虑乘积是否为定值。

3. 模拟演练

5. 若 a, b 均为大于1的正数，且 $ab = 100$ ，则 $\lg a \cdot \lg b$ 的最大值是（ ）。

A. 0

B. 1

C. 2

D. $\frac{5}{2}$

【答案】 B

【解析】 $\because a > 1, b > 1, \therefore \lg a > 0, \lg b > 0,$
 $\therefore \lg a \cdot \lg b \leq \left(\frac{\lg a + \lg b}{2} \right)^2 = \left(\frac{\lg(ab)}{2} \right)^2 = 1,$
当且仅当 $a = b = 10$ 时等号成立,
即 $\lg a \cdot \lg b$ 的最大值是 1.
故选 B.

【标注】 【知识点】 利用基本不等式求最值

6. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a + 2b - 4 = 0$, 则 $2^a + 4^b$ 的最小值为 ().

A. 2

B. 4

C. 8

D. 16

【答案】 C

【解析】 $\because a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a + 2b - 4 = 0$,
 $\therefore a + 2b = 4$,
 $2^a + 4^b = 2^a + (2)^{2b}$,
由基本不等式: $2^a + 2^{2b} \geq 2\sqrt{2^a \cdot 2^{2b}} = 2\sqrt{2^{a+2b}} = 2\sqrt{2^4} = 8$,
当 $a = 2, b = 1$ 时等号成立,
所以 $2^a + 2^{2b} \geq 8$,
 $2^a + 2^{2b}$ 最小值为 8,
故 C 选项正确.

【标注】 【知识点】 基本不等式的概念; 利用基本不等式求最值

7. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a - 2b + 2 = 0$, 则 $2^a + \frac{1}{4^b}$ 的最小值为 ().

A. 2

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{4}$

【答案】 B

【解析】 $2^a + \frac{1}{4^b}$
 $= 2^a + 2^{-2b}.$
由均值不等式:
 $2^a + 2^{-2b} \geq 2\sqrt{2^a \cdot 2^{-2b}}$
 $= 2\sqrt{2^{a-2b}}$

$$\begin{aligned}
 &= 2\sqrt{2^{-2}} \\
 &= 2\sqrt{\frac{1}{4}} \\
 &= 2 \times \frac{1}{2} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

取等条件： $2^a = 2^{-2b} \Rightarrow a = -2b$,

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{可以取到}.$$

故选B.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的实际应用

8. 设 $x > 0, y > 0, x + 2y = 4$, 则 $\frac{(x+1)(2y+1)}{xy}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{9}{2}$

【解析】 $x > 0, y > 0, x + 2y = 4$,

$$\text{则 } \frac{(x+1)(2y+1)}{xy} = \frac{2xy + x + 2y + 1}{xy} = \frac{2xy + 5}{xy} = 2 + \frac{5}{xy};$$

$x > 0, y > 0, x + 2y = 4$,

由基本不等式有： $4 = x + 2y \geq 2\sqrt{2xy}$,

$$\therefore 0 < xy \leq 2,$$

$$\frac{5}{xy} \geq \frac{5}{2},$$

$$\text{故 } 2 + \frac{5}{xy} \geq 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2};$$

(当且仅当 $x = 2y = 2$ 时, 即: $x = 2, y = 1$ 时, 等号成立),

故 $\frac{(x+1)(2y+1)}{xy}$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$;

故答案为: $\frac{9}{2}$.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

二、“1”的替换

1. 真题分析

9. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $ab = 1$, 则 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b}$ 的最小值为 _____.

【答案】4

【解析】
$$\begin{aligned} & \frac{1}{\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b}} \\ &= \frac{1}{\frac{b+a}{2ab} + \frac{8}{a+b}} \\ &= \frac{a+b}{2} + \frac{8}{a+b} \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{8}{a+b}} = 4, \\ & \text{当且仅当 } a = 2 + \sqrt{3}, b = 2 - \sqrt{3}, \\ & \text{或 } a = 2 - \sqrt{3}, b = 2 + \sqrt{3} \text{ 时等号成立.} \\ & \text{故答案为: 4.} \end{aligned}$$

【标注】【知识点】倒数和形式；利用基本不等式求最值

备注：2020年高考真题天津卷理科第14题

分析：本题考察“1”的替换，只需要将 $\frac{1}{2a}, \frac{1}{2b}$ 中的1替换成 ab 即可得 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} = \frac{a+b}{2}$ ，原式变为 $\frac{a+b}{2} + \frac{8}{a+b}$ ，然后使用基本不等式可得 $\frac{a+b}{2} + \frac{8}{a+b} \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{8}{a+b}} = 4$ 。

10. 设 $a+b=2, b>0$ ，则 $\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b}$ 的最小值为_____。

【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】方法一：因为 $a+b=2$ ，所以

$$\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b} = \frac{a+b}{4|a|} + \frac{|a|}{b} = \frac{a}{4|a|} + \frac{b}{4|a|} + \frac{|a|}{b} \geq 1 + \frac{a}{4|a|}.$$

显然当 $a < 0$ ，且 $b = 2|a|$ 时，上式取等号，

此时 $b = -2a$ ，联立 $a+b=2$ ，解得 $a = -2$ ，

此时 $1 + \frac{a}{4|a|} = 1 - \frac{2}{4 \times 2} = \frac{3}{4}$ 。所以 $\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b}$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$ 。

方法二： $\because a+b=2, b>0$ ，

$$\therefore b = 2 - a > 0, \text{ 得 } a < 2, \text{ 令 } t = \frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b} = \frac{a+b}{4|a|} + \frac{|a|}{b}.$$

(1) 当 $0 < a < 2$ 时，

$$t = \frac{a+b}{4a} + \frac{a}{b} = \frac{1}{4} + \frac{b}{4a} + \frac{a}{b} \geq \frac{1}{4} + 2\sqrt{\frac{b}{4a} \cdot \frac{a}{b}} = \frac{1}{4} + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4},$$

当且仅当 $\frac{b}{4a} = \frac{a}{b}$ ，即 $b = 2a, a = \frac{2}{3}$ 时， t 取得最小值 $\frac{5}{4}$ ；

(2) 当 $a < 0$ 时，

$$t = -\frac{a+b}{4a} - \frac{a}{b} = -\frac{1}{4} + \left(-\frac{b}{4a}\right) + \left(-\frac{a}{b}\right) \geq -\frac{1}{4} + 2 \cdot \sqrt{\left(-\frac{b}{4a}\right) \cdot \left(-\frac{a}{b}\right)} = -\frac{1}{4} + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}$$

当且仅当 $-\frac{b}{4a} = -\frac{a}{b}$ ，即 $b = -2a, a = -2$ 时， t 取得最小值 $\frac{3}{4}$ ，

$$\because \frac{5}{4} > \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b} \text{ 的最小值为 } \frac{3}{4}.$$

【标注】【知识点】基本不等式的概念

备注：2013年高考真题天津卷文科第14题

分析：本题考察的是“1”的替换，若去掉绝对值符号来看，是我们常见的“1”的替换模型，故而我们需要使用分类讨论的方法去掉绝对值符号，这样将其作为常见的“1”的替换模型来处理即可。

2. 思路总结

题型总结：

常见的“1”的替换模型：已知 $ax + by = c$ $\left[\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c \right]$ 的情况下，求解

$\frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{y}, \frac{\lambda y}{x} + \frac{\mu}{y}, \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu x}{y} (\lambda x + \mu y)$ 的最小值，这个过程中可能会将 x 或者 y 复杂化，例如令 $x = 3m + 2n, y = 2m + 5n, a = 1, b = 2, c = 2, \lambda = 2, \mu = 3$ 则问题变化为已知 $7m + 12n = 2$ ，求解 $\frac{2}{3m + 2n} + \frac{3}{2m + 5n}$ 的最小值。我们在处理过程中需要将 λ 和 μ 替换成 $\frac{\lambda}{c}(ax + by), \frac{\mu}{c}(ax + by)$ 。

3. 模拟演练

11. 已知正实数 x, y 满足 $xy = 1$ ，则 $\left(\frac{x}{y} + y\right)\left(\frac{y}{x} + x\right)$ 的最小值为 _____。

【答案】4

【解析】依题意， $\left(\frac{x}{y} + y\right)\left(\frac{y}{x} + x\right) = 1 + \frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y} + 1 \geq 2 + 2\sqrt{\frac{y^2}{x} \times \frac{x^2}{y}} = 4$ ，

当且仅当 $x = y = 1$ 时取等号。

故答案为：4。

【标注】【知识点】基本不等式的概念

12. 设 $a + b = -2, b < 0$ ，则当 $a =$ _____ 时， $\frac{1}{2|a|} - \frac{|a|}{b}$ 取得最小值。

【答案】2

【解析】由题意： $a + b = -2, b < 0$ 知 $b = -2 - a < 0$ ，

$$\therefore a > -2.$$

$$\therefore \frac{1}{2|a|} = -\frac{-2}{4|a|},$$

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, 则: } \frac{1}{2|a|} - \frac{|a|}{b} = -\frac{-2}{4|a|} - \frac{|a|}{b} = -\frac{a+b}{4|a|} + \frac{|a|}{b} = -\frac{1}{4} - \frac{b}{4|a|} - \frac{|a|}{b},$$

$$\therefore b < 0,$$

$$\therefore -\frac{b}{4|a|} - \frac{|a|}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{4|a|} \cdot \frac{|a|}{b}} = 1, \text{ 当且仅当 } -b = 2a \text{ 时取等号.}$$

$$\text{所以 } -\frac{1}{4} - \frac{b}{4|a|} - \frac{|a|}{b} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\text{此时: } \begin{cases} -b = 2a \\ a + b = -2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } a = 2.$$

$$\text{当 } -2 < a < 0 \text{ 时, 则:}$$

$$\frac{1}{2|a|} - \frac{|a|}{b} = -\frac{-2}{4|a|} - \frac{|a|}{b} = -\frac{a+b}{4|a|} + \frac{|a|}{b} = \frac{1}{4} - \frac{b}{4|a|} - \frac{|a|}{b},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{4} - \frac{b}{4|a|} - \frac{|a|}{b} \geq 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \text{ 当且仅当 } b = 2a \text{ 时取等号.}$$

$$\text{此时: } \begin{cases} b = 2a \\ a + b = -2 \end{cases},$$

$$a = -\frac{2}{3},$$

$$\text{综上所述: 当 } a = 2 \text{ 时, } \frac{1}{2|a|} - \frac{|a|}{b} \text{ 取得最小值为 } \frac{3}{4}.$$

故答案为2.

【标注】【知识点】基本不等式的概念

13. 已知 $a + 2b = ab$, $b > 0$, 则 $3|a| + \frac{b}{|a|}$ 的取值的集合为 _____.

【答案】 $\left\{a \mid a > \frac{1}{2}\right\}$

【解析】 $\because a + 2b = ab,$

$$\therefore b = \frac{a}{a-2} > 0,$$

$$\therefore a(a-2) > 0, \text{ 则 } a > 2 \text{ 或 } a < 0,$$

$$\text{① } a > 2 \text{ 时, } 3a + \frac{b}{a} = 3a + \frac{1}{a-2}$$

$$= 3(a-2) + \frac{1}{a-2} + 6$$

$$\geq 2\sqrt{3(a-2) \cdot \frac{1}{a-2}} + 6$$

$$\geq 2\sqrt{3} + 6,$$

$$\text{当且仅当 } 3(a-2) = \frac{1}{a-2},$$

即 $a = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $a = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立；

② $a < 0$ 时，即 $a - 2 < -2$ ，

$$3|a| + \frac{b}{|a|} = -3a - \frac{b}{a} = -\left(3a + \frac{b}{a}\right) \\ = -\left[3(a-2) + \frac{1}{a-2}\right] - 6,$$

令 $f(x) = -3x - \frac{1}{x}$ ， $x \in (-\infty, -2)$ ，

$$f'(x) = -3 + \frac{1}{x^2} = \frac{1-3x^2}{x^2},$$

$x \in (-\infty, -2)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减，

$$\therefore f(x) > f(-2) = \frac{13}{2} \text{ 恒成立，}$$

$$\therefore 3|a| + \frac{b}{|a|} > \frac{13}{2} - 6 = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } 3|a| + \frac{b}{|a|} > \frac{1}{2}.$$

综合①②所述：

$$3|a| + \frac{b}{|a|} \text{ 的取值的集合为 } \left\{a \mid a > \frac{1}{2}\right\}.$$

$$\text{故答案为 } \left\{a \mid a > \frac{1}{2}\right\}.$$

【标注】【知识点】基本不等式的概念；利用基本不等式求最值

14. 若正数 a, b 满足 $4a + 3b - 1 = 0$ ，则 $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+b}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $3 + 2\sqrt{2}$

【解析】 由题意，设 $\begin{cases} m = 2a + b \\ n = a + b \end{cases}$ ，

$$\text{解得 } a = m - n, b = 2n - m,$$

$$\text{其中 } m > 0, n > 0,$$

$$\therefore 4a + 3b - 1 = 0,$$

$$\therefore 4(m - n) + 3(2n - m) = 1,$$

$$\text{整理得 } m + 2n = 1,$$

$$\text{又由 } \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+b} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \\ = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)(m + 2n) = 3 + \frac{2n}{m} + \frac{m}{n}$$

$$3 + 2\sqrt{\frac{2n}{m} \cdot \frac{m}{n}} = 3 + 2\sqrt{2},$$

$$\text{当且仅当 } \frac{2n}{m} = \frac{m}{n}, \text{ 即 } m = \sqrt{2n} \text{ 等号成立，}$$

$$\therefore \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+b} \text{ 的最小值为 } 3 + 2\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】基本不等式的概念；利用基本不等式求最值；倒数和形式

15. 已知 x, y 为正实数, 若 $x + 2y = 1$, 则 $\frac{x^2 + y^2 + x}{xy}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $2\sqrt{2} + 2$

【解析】
$$\begin{aligned}\frac{x^2 + y^2 + x}{xy} &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{y} \\ &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x + 2y}{y} = 2 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 \geq 2\sqrt{2} + 2 . \\ &(\text{当且仅当} 2 \cdot \frac{x}{y} = \frac{y}{x}, \text{即} x = \frac{1}{2\sqrt{2} + 2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 2})\end{aligned}$$

【标注】【知识点】已知等式关系求最值

16. 已知 $\log_2(x + y) = \log_2 x + \log_2 y$, 则 $\frac{4x}{x-1} + \frac{9y}{y-1}$ 的最小值是 _____ .

【答案】25

【解析】 $\log_2(x + y) = \log_2 x + \log_2 y$,
可得 $x, y > 0, x + y = xy$.
$$\begin{aligned}\frac{4x}{x-1} + \frac{9y}{y-1} &= 4 + \frac{4}{x-1} + 9 + \frac{9}{y-1} \\ &= 13 + \frac{4y + 9x - 13}{xy - x - y + 1} \\ &= 4y + 9x, \\ &= (4y + 9x) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \\ &= 13 + \frac{4y}{x} + \frac{9x}{y} \\ &\geq 13 + 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{9x}{y}} \\ &= 25, \\ &\text{当且仅当} x = \frac{5}{3}, y = \frac{5}{2} \text{时表达式取得最小值.} \\ &\text{故答案为: } 25.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】基本不等式的概念；倒数和形式

17. 已知 $ab > 0, a + b = 3$, 则 $\frac{b^2}{a+2} + \frac{a^2}{b+1}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $\frac{3}{2}$ 或 1.5

【解析】 原式 = $\left(\frac{b^2}{a+2} + \frac{a^2}{b+1}\right)[(a+2) + (b+1)] \times \frac{1}{6}$
 $= \frac{1}{6} \left[b^2 + a^2 + \frac{a^2(a+2)}{b+1} + \frac{b^2(b+1)}{a+2} \right]$
 $\geq \frac{1}{6} [a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2b^2}]$
 $= \frac{1}{6} (a+b)^2$
 $= \frac{3}{2}.$
 故答案为: $\frac{3}{2}.$

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

18. 若实数 x, y 满足 $x > y > 0$, 且 $\log_2 x + \log_2 y = 1$, 则 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值是 _____, $\frac{x-y}{x^2+y^2}$ 的最大值为 _____.

【答案】 $2; \frac{1}{4}$

【解析】 由题设可知:

由 $x > y > 0$, 且 $\log_2 x + \log_2 y = \log_2(xy) = 1$,

即 $xy = 2$,

$$\text{则 } \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2y+x}{xy} \geq \frac{2\sqrt{2xy}}{xy} = 2,$$

当仅当 $2y = x$ 时, 即 $y = 1, x = 2$ 时, 等号成立,

故 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 2,

又 $x - y > 0$, 则

$$\frac{x-y}{x^2+y^2} = \frac{x-y}{(x-y)^2+2xy} = \frac{1}{(x-y) + \frac{4}{x-y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{(x-y) \cdot \frac{4}{x-y}}} = \frac{1}{4},$$

当仅当 $x-y = \frac{4}{x-y}$, 即 $(x-y)^2 = 4$ 时等号成立 ($x = \sqrt{3} + 1, y = \sqrt{3} - 1$),

故 $\frac{x-y}{x^2+y^2}$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】 指对化简求值; 利用基本不等式求最值

【方法】 均值不等式法

三、二次均值

1. 真题分析

19. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, $ab > 0$, 则 $\frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 4

【解析】 $\frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab} \geq \frac{4a^2b^2 + 1}{ab} \geq 4$, 当且仅当 $a^2 = 2b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号.

【标注】【知识点】基本不等式的概念

2. 模拟演练

20. 已知 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{a^2 + 4b^2 + a^3b^3}{a^2b^2}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 4

【解析】 $\because a > 0, b > 0$,

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{a^2 + 4b^2 + a^3b^3}{a^2b^2} \\ &= \frac{1}{b^2} + \frac{4}{a^2} + ab \geq 2\sqrt{\frac{4}{a^2b^2}} + ab \\ &= \frac{4}{ab} + ab \geq 2\sqrt{\frac{4}{ab} \cdot ab} \\ &= 4, \end{aligned}$$

$$\text{当且仅当} \begin{cases} \frac{1}{b^2} = \frac{4}{a^2} \\ \frac{4}{ab} = ab \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \text{时, 等号成立,}$$

故 $\frac{a^2 + 4b^2 + a^3b^3}{a^2b^2}$ 的最小值为 4.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式成立的条件；基本不等式的概念

21. 若 $a + b \neq 0$, 则 $a^2 + b^2 + \frac{1}{(a+b)^2}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 根据题意, 若 $a + b \neq 0$, 即 $a \neq -b$, 则有 $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } a^2 + b^2 + \frac{1}{(a+b)^2} &\geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{1}{(a+b)^2} \geq 2\sqrt{\frac{(a+b)^2}{2} \times \frac{1}{(a+b)^2}} = \sqrt{2}, \text{ 即} \\ a^2 + b^2 + \frac{1}{(a+b)^2} \text{ 最小值为 } \sqrt{2}. \\ \text{故答案为: } \sqrt{2}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；二元不等式链的应用；基本不等式的实际应用

22. 已知 $a > 2b > 0$, 则 $a^2 + \frac{1}{2ab} + \frac{1}{a(a-2b)}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 4

【解析】 由于: $a > 2b > 0$,

$$\text{则: } a - 2b > 0,$$

$$\begin{aligned} \text{则: } a^2 + \frac{1}{2ab} + \frac{1}{a(a-2b)} \\ = a^2 - 2ab + \frac{1}{a(a-2b)} + 2ab + \frac{1}{2ab} \geq 2 + 2 = 4, \end{aligned}$$

$$\text{当且仅当: } \begin{cases} 4a^2b^2 = 1 \\ a^2 - 2ab = 1 \end{cases}$$

$$\text{即: } \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \text{ 时, 数式的最小值为 } 4.$$

故答案为: 4.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

23. 设正实数 x, y 满足 $x > \frac{1}{2}$, $y > 1$, 不等式 $\frac{4x^2}{y-1} + \frac{y^2}{2x-1} \geq m$ 恒成立, 则 m 的最大值为 () .

A. $2\sqrt{2}$

B. $4\sqrt{2}$

C. 8

D. 16

【答案】 C

【解析】 设 $y - 1 = b$, 则 $y = b + 1$, 令 $2x - 1 = a$, $x = \frac{1}{2}(a + 1)$, $a > 0$, $b > 0$.

$$\begin{aligned} \text{那么: } \frac{4x^2}{y-1} + \frac{y^2}{2x-1} \\ = \frac{(b+1)^2}{a} + \frac{(a+1)^2}{b} \geq 2 \frac{(a+1)(b+1)}{\sqrt{ab}} \\ = 2 \frac{ab + (a+b) + 1}{\sqrt{ab}} \\ = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \sqrt{ab} + \frac{a+b}{\sqrt{ab}} \right) \geq 2 \left(2\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}}} + \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} \right) \end{aligned}$$

$= 2(2+2) = 8$ (当且仅当 $a = b = 1$ 即 $x = 2, y = 1$ 时取等号.)

$\therefore \frac{4x^2}{y-1} + \frac{y^2}{2x-1}$ 的最小值为8,

则 m 的最大值为8.

故选C.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

四、综合创新

24. 已知实数 x, y 满足 $x > y \geq 0$, 则 $\frac{4x+2y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}$ 的取值范围是 _____.

【答案】 $[5, +\infty)$

【解析】 $\because x > y \geq 0, \therefore x+y > x-y > 0, 4x+2y = 3(x+y) + (x-y),$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{4x+2y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} &= \frac{3(x+y) + (x-y)}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} \\&= \frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} + 3 \geq 2\sqrt{\frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{x+y}{x-y}} + 3 = 5,\end{aligned}$$

当且仅当 $x-y = x+y$, 即 $y = 0$ 时, 等号成立.

因此, $\frac{4x+2y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}$ 的最小值为5.

故答案为: $[5, +\infty)$.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值; 基本不等式的概念

25. 已知 $a, b \in \mathbf{R}, a+b=4$, 则 $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1}$ 的最大值为 _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}+2}{4}$

【解析】 $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} = \frac{a^2+b^2+2}{a^2+b^2+1+a^2b^2} = \frac{(a+b)^2+2-2ab}{(a+b)^2+2-2ab+1-a^2b^2} = \frac{18-2ab}{17-2ab-a^2b^2}$

,

令 $t = 9 - ab$, 即 $ab = 9 - t$,

$$\begin{aligned}\therefore \text{原式} &= 2 \cdot \frac{t}{17-2(9-t)+(9-t)^2} = \frac{2t}{t^2-16t+18} \\&= \frac{2}{t+\frac{80}{t}-16} \leq \frac{2}{8\sqrt{5}-16} = \frac{1}{4\sqrt{5}-8} = \frac{\sqrt{5}+2}{4},\end{aligned}$$

等号成立的条件: $t = 4\sqrt{5}$ 得 $ab = 9 - 4\sqrt{5}$.

【标注】【知识点】基本不等式的概念

26. 若 $x, y > 0$, 且 $x + 2y = 1$, 则 $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{4y}\right)$ 的最小值是() .

A. $\frac{25}{2}$

B. $\frac{25}{4}$

C. $\frac{25}{8}$

D. $\frac{25}{16}$

【答案】C

【解析】设 $2y = A$,

$$\therefore x + A = 1,$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{4y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2y + \frac{1}{2y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(A + \frac{1}{A}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(xA + \frac{A}{x} + \frac{x}{A} + \frac{1}{xA}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(xA + \frac{1}{xA}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x} + \frac{x}{A}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(xA + \frac{1}{xA}\right) + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{A}{x} \cdot \frac{x}{A}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(xA + \frac{1}{xA}\right),$$

$$\because x + A = 1,$$

$$\text{又} \because x + A \geq 2\sqrt{xA},$$

$$\therefore xA \leq \frac{1}{4},$$

$$\because f(x) = \frac{1}{x} + x \text{ 在 } \left(0, \frac{1}{4}\right] \text{ 为减函数,}$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{2}\left(xA + \frac{1}{xA}\right) \geq 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + 4\right) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{17}{4} = \frac{25}{8}.$$

当且仅当 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$ 时, 取得最小值.

故选C.

【标注】【知识点】利用单调性求函数最值；基本不等式的实际应用；利用基本不等式求最值；不等式的性质

27. 已知 $x, y, z \in \mathbf{R}^+$, 求 $\frac{3xz + 4yz}{x^2 + y^2 + z^2}$ 的最大值为_____.

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】 x, y, z 均为正数,

$$\text{可设 } x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + kz^2 + mz^2 + y^2 \geq 2\sqrt{k}xz + 2\sqrt{m}yz,$$

$$\text{可得 } k + m = 1, \text{ 且 } k, m > 0, \sqrt{k} : \sqrt{m} = 3 : 4,$$

$$\text{解得 } k = \frac{9}{25}, m = \frac{16}{25},$$

$$\text{则 } \frac{3xz + 4yz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{3xz + 4yz}{(x^2 + \frac{9}{25}z^2) + (\frac{16}{25}z^2 + y^2)} \leq \frac{3xz + 4yz}{\frac{6}{5}xz + \frac{8}{5}yz} = \frac{5}{2},$$

$$\text{当且仅当 } x = \frac{3}{5}z, \frac{4}{5}z = y \text{ 时取得等号,}$$

$$\text{则 } \frac{3xz + 4yz}{x^2 + y^2 + z^2} \text{ 的最大值为 } \frac{5}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{5}{2}.$$

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的概念

28. 已知二次函数 $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + bx^2 + cx + d (a < b)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 $\frac{3a + 2b + 4c}{b - a}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $\frac{15 + 2\sqrt{7}}{9}$

【解析】 由题意得，

$$f'(x) = ax^2 + bx + c \geq 0, \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{则 } a > 0, \Delta = b^2 - 4ac \leq 0,$$

$$\therefore \frac{3a + 2b + 4c}{b - a} = \frac{a^2 + \frac{2}{3}ab + \frac{4}{3}ac}{3(ab - a^2)} \geq \frac{a^2 + \frac{2}{3}ab + \frac{1}{3}b^2}{3(ab - a^2)}$$

$$= \frac{1 + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a}\right)^2}{3\left(\frac{b}{a} - 1\right)},$$

$$\text{令 } t = \frac{b}{a} (t > 1),$$

$$\therefore \frac{3a + 2b + 4c}{b - a} \geq \frac{1 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}t^2}{3(t - 1)}$$

$$= \frac{1}{9}(t - 1) + \frac{7}{9} \frac{1}{t - 1} + \frac{5}{3} \geq \frac{15 + 2\sqrt{7}}{9}.$$

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

29. 已知正实数 x, y 满足 $4x^2 + y^2 = 1 + 2xy$ ，则当 $x =$ _____ 时， $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{xy}$ 的最小值是- _____ .

【答案】 $\frac{1}{2}; 6$

【解析】 $\because 4x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{4x^2 \cdot y^2} = 4xy,$

$$\text{即 } 1 + 2xy \geq 4xy, xy \leq \frac{1}{2},$$

当且仅当 $2x = y$ 即 $x = \frac{1}{2}$ 取等 .

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{xy} \geq 2\sqrt{\frac{2}{xy} + \frac{1}{xy}} \geq 2 \times 2 + 2 \geq 6 ,$$

当且仅当 $2x = y$ 取等 .

故答案为 : $\frac{1}{2} ; 6$.

【标注】【知识点】利用两次基本不等式求最值

30. 设 $x > 0, y > 0$, 且 $\left(x - \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{16y}{x}$, 则当 $x + \frac{1}{y}$ 取最小值时 , $x^2 + \frac{1}{y^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 12

【解析】 $\because x > 0, y > 0$,

$\therefore$ 当 $x + \frac{1}{y}$ 取最小值时 , $\left(x + \frac{1}{y}\right)^2$ 取最小值 ,

$$\therefore \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{2x}{y} , \left(x - \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{16y}{x} ,$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{y^2} = \frac{2x}{y} + \frac{16y}{x} ,$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{4x}{y} + \frac{16y}{x}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{16y}{x}} = 16$$

$$\therefore x + \frac{1}{y} \geq 4 ,$$

当且仅当 $\frac{4x}{y} = \frac{16y}{x}$ 即 $x = 2y$ 时取等号 ,

$$\therefore x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{2x}{y} = 16 ,$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{2 \cdot 2y}{y} = 16 ,$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{y^2} = 16 - \frac{2 \cdot 2y}{y} = 12 ,$$

故答案为 : 12 .

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用