

第四讲-函数零点综合（二）

一、恒成立问题

1. 真题分析

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \leq 1 \\ x + \frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$, 设 $a \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq |\frac{x}{2} + a|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值范围是 ().
- A. $[-\frac{47}{16}, 2]$ B. $[-\frac{47}{16}, \frac{39}{16}]$
C. $[-2\sqrt{3}, 2]$ D. $[-2\sqrt{3}, \frac{39}{16}]$

【答案】 A

【解析】 满足题意时 $g(x) = |\frac{x}{2} + a|$ 的图象恒在 $f(x)$ 函数图像的下方,

当 $a = \frac{9}{4}$ 时, $f(2) = 3$, $g(2) = \frac{13}{4} > f(2)$, 不合题意, 故排除 B, D.

当 $a = -2\sqrt{3}$ 时, $f(0) = 3$, $g(0) = 2\sqrt{3} > f(0)$, 不合题意, 故排除 C; 故选 A.

【标注】 【知识点】 函数零点的概念; 已知零点情况求参数的取值范围

备注: 2017年高考真题天津卷理科第8题

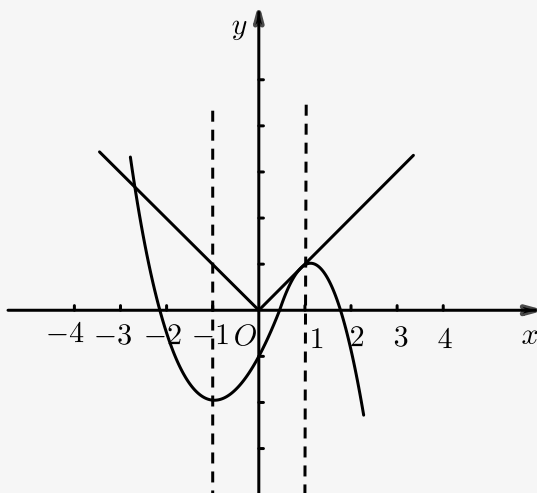
分析: 本题考察函数相关的恒成立问题, 我们可以采取数形结合的思想解决问题, 问题可以转化成函数

$f(x)$ 的图像始终在函数 $y = |\frac{x}{2} + a|$ 的图像之上, 函数 $f(x)$ 解析式给出, 故而可以画出其图像, $y = |\frac{x}{2} + a|$ 可以看作函数 $y = |\frac{x}{2}|$ 向左平移 $2a$ 个单位得到, 故而我们只需要左右平移 $y = |\frac{x}{2}|$, 始终保证 $y = |\frac{x}{2}|$ 图像在函数 $f(x)$ 的图像之下, 在平移过程中确定临界位置, 我们确定临界位置的方法是寻找两个函数相切的位置或者 $y = |\frac{x}{2} + a|$ 经过函数 $f(x)$ 端点或者极值点的位置.

2. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a - 2, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x - 2a, & x > 0 \end{cases}$, 若对任意 $x \in [-3, +\infty)$, $f(x) \leq |x|$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $[\frac{1}{8}, 2]$

【解析】 方法一:



当 $x \leq 0$ 时, 函数 $f(x) = x^2 + 2x + a - 2$ 的对称轴为 $x = -1$, 抛物线开口向上,

要使 $x \leq 0$ 时, 对任意 $x \in [-3, 0]$, $f(x) \leq |x|$ 恒成立,

则只需要 $f(-3) \leq |-3| = 3$, 即 $9 - 6 + a - 2 \leq 3$, 得 $a \leq 2$.

当 $x > 0$ 时, 要使 $f(x) \leq |x|$ 恒成立,

即 $f(x) = -x^2 + 2x - 2a$ 在直线 $y = x$ 的下方或在 $y = x$ 上,

由 $-x^2 + 2x - 2a = x$, 得 $x^2 - x + 2a = 0$,

由判别式 $\Delta = 1 - 8a \leq 0$, 得 $a \geq \frac{1}{8}$.

综上, a 的取值范围为 $\frac{1}{8} \leq a \leq 2$.

方法二: 当 $-3 \leq x \leq 0$ 时, $f(x) \leq |x| \Rightarrow x^2 + 2x + a - 2 \leq -x$, 对 $x \in [-3, 0]$ 恒成立

$\Leftrightarrow a \leq -x^2 - 3x + 2$ 对 $x \in [-3, 0]$ 恒成立.

令 $y = -x^2 - 3x + 2 = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$, $x \in [-3, 0]$, $y_{\min} = 2$,

$\therefore a \leq 2$.

当 $x > 0$ 时, $f(x) \leq |x| \Rightarrow -x^2 + 2x - 2a \leq x$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

即 $a \geq -\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2}$ 对 $x > 0$ 恒成立.

令 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}$, $y_{\max} = \frac{1}{8}$,

$\therefore a \geq \frac{1}{8}$.

综上所述, a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{8}, 2\right]$.

【标注】【知识点】二次函数相关的恒成立问题; 利用函数单调性解不等式

备注: 2018年高考真题天津卷文科第14题

分析: 本题考察的是函数相关的恒成立问题, 我们可以采取数形结合的思想来解决问题, 转化为 $y = |x|$ 的图像始终在函数 $f(x)$ 的图像之下, 其中 $y = |x|$ 图像确定, $f(x)$ 是由两个二次函数构成的分

段函数，随着参数 a 的变化， $f(x)$ 的图像会上下平移，我们需要做的是在 a 变化过程中找到满足函数 $y = |x|$ 的图像始终在函数 $f(x)$ 的图像之下的临界位置。

3. 已知 $a \in \mathbf{R}$ ，设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 2a, & x \leq 1 \\ x - a \ln x, & x > 1 \end{cases}$ ，若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 a 的取值范围为（ ）。

A. $[0, 1]$ B. $[0, 2]$ C. $[0, e]$ D. $[1, e]$

【答案】 C

【解析】 当 $x = 1$ 时， $f(1) = 1 - 2a + 2a = 1 > 0$ 恒成立；

当 $x < 1$ 时， $f(x) = x^2 - 2ax + 2a \geq 0 \Leftrightarrow 2a \geq \frac{x^2}{x-1}$ 恒成立，

$$\begin{aligned} \text{令 } g(x) &= \frac{x^2}{x-1} = -\frac{x^2}{1-x} \\ &= -\frac{(1-x-1)^2}{(1-x-1)^2} \\ &= -\frac{1-x}{(1-x)^2 - 2(1-x) + 1} \end{aligned}$$

$$= -(1-x + \frac{1}{1-x} - 2) \leq -(2\sqrt{(1-x) \cdot \frac{1}{1-x}} - 2) = 0,$$

$$\therefore 2a \geq g(x)_{\max} = 0, \therefore a \geq 0.$$

当 $x > 1$ 时， $f(x) = x - a \ln x \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{x}{\ln x}$ 恒成立，

$$\text{令 } h(x) = \frac{x}{\ln x}, \text{ 则 } h'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2},$$

当 $x > e$ 时， $h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 递增，

当 $1 < x < e$ 时， $h'(x) < 0$ ， $h(x)$ 递减，

$\therefore x = e$ 时， $h(x)$ 取得最小值 $h(e) = e$ ，

$$\therefore a \leq h(x)_{\min} = e,$$

综上 a 的取值范围是 $[0, e]$ 。

故选C。

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

备注：2019年高考真题天津卷理科第8题

分析：本题考察的是函数相关的恒成立问题，题目所给函数为分段函数，问题可以转化成

$\begin{cases} x^2 - 2ax + 2a \geq 0 (x \leq 1) \\ x - a \ln x \geq 0 (x > 1) \end{cases}$ 恒成立，观察式子形式，此时满足参变分离的条件。只需要采取参变分

离的方法将参数和变量分离，然后转化成最值问题即可。

2. 思路总结

处理恒成立问题的思路：

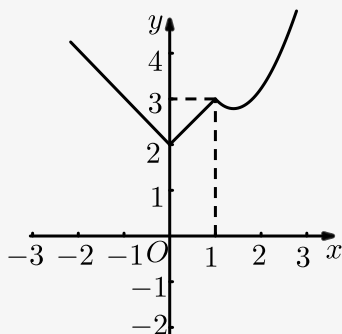
- 1、可以采取数形结合的思想解决问题，这个过程里面需要清楚的是随着参数的变化函数图像的变化趋势以及临界位置该如何寻找；
- 2、可以采取代数计算的方式解决问题，那么我们可以采取分类讨论或者参变分离的思路解决问题。

3. 模拟演练

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x| + 2, & x < 1 \\ x + \frac{2}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ ，设 $a \in \mathbf{R}$ ，若关于 x 的不等式 $f(x) \geq \left| \frac{x}{2} + a \right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 a 的取值范围是 _____。

【答案】 $[-2, 2]$

【解析】 根据题意函数 $f(x) = \begin{cases} |x| + 2, & x < 1 \\ x + \frac{2}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ 的图象如图：



令 $g(x) = \left| \frac{x}{2} + a \right|$ ，其图象与 x 轴相交于点 $(-2a, 0)$ ，
 在区间 $(-\infty, -2a)$ 上为减函数，在 $(-2a, +\infty)$ 为增函数，
 若不等式 $f(x) \geq \left| \frac{x}{2} + a \right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，
 则函数 $f(x)$ 在图象在 $g(x)$ 上的上方或相交，
 则必有 $f(0) \geq g(0)$ ，
 即 $2 \geq |a|$ ，
 解可得 $-2 \leq a \leq 2$ 。
 故答案为： $[-2, 2]$ 。

【标注】【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题；分段函数

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ ，若 $|f(x)| + a \geq ax$ ，则 a 的取值范围是 ()。
- A. $[-2, 0]$ B. $[-2, 1]$ C. $(-\infty, -2]$ D. $(-\infty, 0]$

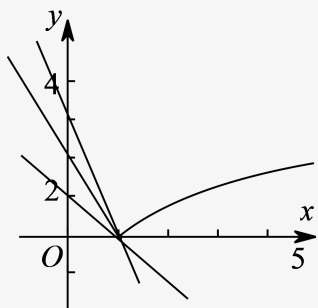
【答案】 A

【解析】 $|f(x)| + a \geq ax$ 即为 $|f(x)| \geq a(x-1)$,

作出函数 $y = |f(x)|$ 的图象和直线 $y = a(x-1)$,

直线恒过定点 $(1, 0)$,

当 $a = 0$ 时, 直线为 $y = 0$, 即有 $y = |f(x)|$ 的图象恒在直线的上方,



当 $a < 0$, 且直线和 $y = |f(x)|$ 的图象相切时,

由 $y = a(x-1)$ 和 $y = x^2 - 4x + 3 (x < 1)$, 联立,

可得 $x^2 - (4+a)x + 3+a = 0$, 由 $\Delta = 0$,

即 $(4+a)^2 - 4(3+a) = 0$, 解得 $a = -2$,

由图象即可得到 $-2 \leq a < 0$,

综上可得 a 的范围是 $[-2, 0]$.

故选 A.

【标注】 【知识点】 已知零点情况求参数的取值范围; 分段函数

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x, & x < 0 \\ \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$, 若 $|f(x)| \geq ax$, 则 a 取值范围是 ().

A. $(-\infty, 0]$

B. $(-\infty, 1]$

C. $[-3, 0]$

D. $[-3, 1]$

【答案】 C

【解析】 当 $x > 0$ 时, 根据 $\ln(x+1) > 0$ 恒成立, 则此时 $a \leq 0$,

当 $x \leq 0$ 时, 根据 $-x^2 + 3x$ 的取值为 $(-\infty, 0]$, $|f(x)| = x^2 - 3x \geq ax$,

当 $x = 0$ 时, 不等式恒成立,

当 $x < 0$ 时, 有 $a \geq x - 3$, 即 $a \geq -3$.

综上可得, a 的取值范围是 $[-3, 0]$.

故选 C.

【标注】 【知识点】 分段函数

二、与不等式解集综合

1. 真题分析

7. 已知函数 $f(x) = x(1 + a|x|)$ ，设关于 x 的不等式 $f(x + a) < f(x)$ 的解集为 A ，若 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subseteq A$ ，则实数 a 的取值范围是（ ）。

- A. $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0\right)$
B. $\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, 0\right)$
C. $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)$
D. $\left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$

【答案】 A

【解析】 取 $a = -\frac{1}{2}$ 时， $f(x) = -\frac{1}{2}x|x| + x$ ， $\therefore f(x+a)x|x|$ ，
(1) $x < 0$ 时，解得 $-\frac{3}{4} < x < 0$ ；(2) $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时，解得 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ；(3) $x > \frac{1}{2}$ 时，解得 $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{4}$ ，综上知， $a = -\frac{1}{2}$ 时， $A = \left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ ，符合题意，排除 B、D；取 $a = 1$ 时， $f(x) = x|x| + x$ ， $\therefore f(x+a) < f(x)$ ， $\therefore (x+1)|x+1| + 1 < x|x|$ ，(1) $x < -1$ 时，解得 $x > 0$ ，矛盾；(2) $-1 \leq x \leq 0$ ，解得 $x < 0$ ，矛盾；(3) $x > 0$ 时，解得 $x < -1$ ，矛盾。综上， $a = 1$ ， $A = \emptyset$ ，不符合题意，排除 C，故选 A。

【标注】【素养】数学运算

【知识点】 含绝对值的不等式

【知识点】 一元二次不等式

【特色题型】 选择压轴

【思想】 分类讨论思想

备注：2013年高考真题天津卷理科第8题

分析：本题考察了含参不等式解集的问题，我们可以采取的思路是直接采取分类讨论的方式写出不等式的解集，并且用该解集与题目所给解集比较，求出参数范围；或者可以采取数形结合的思想来处理问题，例如本题可以转化为 $y = f(x)$ 的图像在 $y = f(x+a)$ 之下的部分，那么就需要寻找两个函数图像交点，因为题目给的函数均为二次函数，故而交点坐标可以计算出来。

2. 思路总结

与不等式解集综合问题的解决思路：

- 1、采取分类讨论的思路计算出来不等式的解集；
- 2、采取数形结合的思路，转化为图像之间的位置关系来处理；

3. 模拟演练

8. 已知函数 $f(x) = x(1 + |x|)$ ，设关于 x 的不等式 $f(x^2 + 1) > f(ax)$ 的解集为 A ，若 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subseteq A$ ，则实数 a 的取值范围为（ ）。

- A. $(-2, 2)$
B. $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$
C. $\left(-\frac{5}{2}, -1\right) \cup \left(1, \frac{5}{2}\right)$
D. $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

【答案】 B

【解析】 $f(x) = x(1 + |x|) = \begin{cases} x + x^2 & x \geq 0 \\ x - x^2 & x < 0 \end{cases}$ ，易知 $f(x)$ 为增函数，

若 $f(x^2 + 1) > f(ax) \Rightarrow x^2 + 1 > ax$ 的解集为 A ，

$\because \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subseteq A$ ， $\therefore (x^2 + 1 - ax)_{\min} > 0$ ，在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上恒成立。

令 $g(x) = x^2 + 1 - ax$ ，对称轴 $x = \frac{a}{2}$ ，

①当 $\frac{a}{2} \leq -\frac{1}{2}$ ，即 $a \leq -1$ 时，

$$g(x)_{\min} = g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}a > 0 \Rightarrow a > -\frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2} < a \leq -1；$$

②当 $\frac{a}{2} \geq \frac{1}{2}$ ，即 $a \geq 1$ ， $g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}a > 0 \Rightarrow a < \frac{5}{2} \Rightarrow 1 \leq a < \frac{5}{2}；$

③当 $-\frac{1}{2} < \frac{a}{2} < \frac{1}{2}$ ，即 $-1 < a < 1$ ，

$$g(x)_{\min} = g\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + 1 > 0 \Rightarrow -2 < a < 2 \Rightarrow -1 < a < 1；$$

综上： $a \in \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 。

【标注】【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题

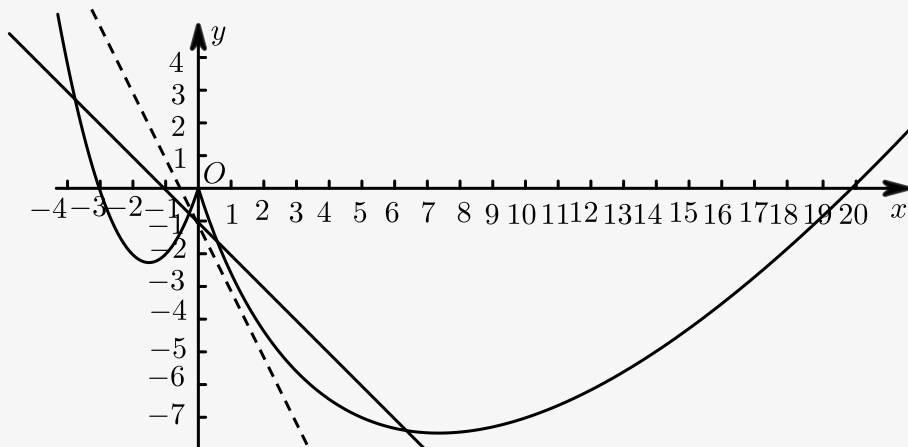
三、 综合创新

对称点问题

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 3x, & x > 0 \\ x^2 + 3x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图象上有且仅有四个不同的点关于直线 $y = -1$ 的对称点在 $y = kx - 1$ 的图象上，则实数 k 的取值范围是（ ）.
- A. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$
- C. $(-1, 2)$ D. $(-1, 3)$

【答案】 C

【解析】取 $y=f(x)$ 上一点 (x, y) ，则 (x, y) 关于 $y=-1$ 对称的点为 $(x, -2-y)$ ，



即 $-2 - y = kx - 1$, 即 $y = -kx - 1$, 直线过定点 $(0, -1)$,

当 $x > 0$ 时, $f(x) = x \ln x - 3x$, $f'(x) = \ln x - 2$,

函数在 $(0, e^2)$ 上单调递减, 在 $[e^2, +\infty)$ 上单调递增,

当 $y = -kx - 1$ 与 $f(x)$ 相切时, 设切点为 (x_0, y_0) ,

则 $\ln x_0 - 2 = -k$, $-kx_0 - 1 = x_0 \ln x_0 - 3x_0$, 解得 $k = 2$, 故 $k < 2$,

当 $x \leq 0$ 时, $x^2 + 3x = -kx - 1$, 即 $x^2 + (3+k)x + 1 = 0$,

则 $\begin{cases} 3+k>0 \\ \Delta=(3+k)^2-4>0 \end{cases}$, 解得 $k>-1$,

综上所述： $-1 < k < 2$.

故选C.

【标注】【知识点】两个函数的互对称问题；函数零点的概念

10. 已知函数 $g(x) = a - \frac{1}{2}x^2$ ($\frac{1}{e} \leq x \leq e$, e 为自然对数的底数) 与 $h(x) = \ln x$ 的图象上存在关于 x 轴对称的点, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^2 - 1 \right]$
- B. $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2e^2} + 1 \right]$

- C. $\left[\frac{1}{2e^2} + 1, \frac{1}{2}e^2 - 1\right]$
 D. $\left[\frac{1}{2}e^2 - 1, +\infty\right)$

【答案】 A

【解析】 令 $f(x) = h(x) + g(x) = \ln x + a - \frac{1}{2}x^2$,
 因为函数 $g(x) = a - \frac{1}{2}x^2 \left(\frac{1}{e} \leq x \leq e\right)$ 与 $h(x) = \ln x$ 的图象上存在关于 x 轴对称的点 ,
 所以函数 $f(x)$ 在 $\frac{1}{e} \leq x \leq e$ 时有零点 , $f'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x}$,
 当 $\frac{1}{e} \leq x < 1$ 时 , $f'(x) > 0$;
 当 $1 < x \leq e$ 时 , $f'(x) < 0$, 又 $f(e) - f\left(\frac{1}{e}\right) < 0$, 即 $f(e) < f\left(\frac{1}{e}\right)$,
 所以 $f(e) \leq 0$ 且 $f(1) \geq 0$, 解得 $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}e^2 - 1$.

【标注】 【知识点】 导数与单调性 ; 已知零点或根情况求参数范围 ; 函数零点的概念

存在性问题

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax, & x \leq 1 \\ 2ax - 5, & x > 1 \end{cases}$ 若始终存在实数 b , 使得函数 $g(x) = f(x) - b$ 的零点不唯一 , 则 a 的取值范围是 () .
 A. $[2, 4)$ B. $(-\infty, 2)$
 C. $(-\infty, 4)$ D. $(-\infty, 4]$

【答案】 C

【解析】 由题可知函数 $g(x) = f(x) - b$ 的零点不唯一 ,
 等价于两函数 $y = f(x)$ 与 $y = b$ 图象的交点个数不唯一 ,
 因为 $m(x) = -x^2 + ax$ 的图象是开口向下、对称轴 $x = \frac{a}{2}$ 的抛物线 ,
 $n(x) = 2ax - 5$ 的图象是恒过 $(0, -5)$ 的直线 ,
 注意到 $m(1) = a - 1$ 、 $n(1) = 2a - 5$,
 所以分 $a \leq 0$ 、 $0 < a \leq 2$ 、 $a > 2$ 三种情况讨论 :
 ① 当 $a \leq 0$ 时 , $m(1) > n(1)$,
 又因为 $y = m(x)$ 在 $(-\infty, \frac{a}{2})$ 上单调递增、在 $(\frac{a}{2}, 1)$ 上单调递减 ,
 $y = n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 , (当 $a = 0$ 时为常数函数) ,
 所以 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{a}{2})$ 上单调递增、在 $(\frac{a}{2}, 1)$ 上单调递减 ,
 所以始终存在实数 b 使得在 $(-\infty, 0)$ 上 $y = f(x)$ 的图象与 $y = b$ 图象的交点个数不唯一 ;

②当 $0 < a \leq 2$ 时, $y = m(x)$ 在 $(-\infty, \frac{a}{2})$ 上单调递增、在 $(\frac{a}{2}, 1)$ 上单调递减, 由于 $y = n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $n(1) \leq 0$, 所以始终存在正实数 b 使得在 $(-\infty, +\infty)$ 上 $y = f(x)$ 的图象与 $y = b$ 图象的交点个数不唯一;

③当 $a > 2$ 时, $y = m(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, $y = n(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 欲使始终存在实数 b 使得在 $(-\infty, 0)$ 上 $y = f(x)$ 的图象与 $y = b$ 图象的交点个数不唯一, 则必有 $m(1) > n(1)$, 即 $a - 1 > 2a - 5$, 解得: $a < 4$.

综上所述, a 的取值范围是 $(-\infty, 4)$.

故选: C.

【标注】【知识点】函数零点的概念; 已知零点情况求参数的取值范围

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq a \\ x^2 - 4ax + 4a, & x > a \end{cases}$, 记函数 $g(x) = f(x) - t$, 若存在实数 t , 使得函数 $g(x)$ 有四个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $(\frac{3}{4}, \frac{4}{3})$

【解析】 若存在实数 t , 使得函数 $g(x)$ 有四个零点,

则函数 $y = f(x)$ 与 $y = t$ 有四个交点,

即 $|x| = t, x \leq a$, 与 $x^2 - 4ax + 4a = t$ 各有两个解,

故 $a \geq t > 0$, 且 $a^2 - 4a^2 + 4a > t > 0$ 且 $\frac{16a - 16a^2}{4} < a$

解得: $a \in (\frac{3}{4}, \frac{4}{3})$,

故答案为: $(\frac{3}{4}, \frac{4}{3})$.

【标注】【知识点】函数的值域; 单调性; 函数零点存在定理; 已知零点情况求参数的取值范围

整体换元

13. 对于任意的正实数 x, y 都有 $(2x - \frac{y}{e}) \ln \frac{y}{x} \leq \frac{x}{me}$ 成立, 则实数 m 的取值范围为 ().

- A. $(\frac{1}{e}, 1]$
 B. $(\frac{1}{e^2}, 1]$
 C. $(\frac{1}{e^2}, e]$
 D. $(0, \frac{1}{e}]$

【答案】D

【解析】因为 $x > 0, y > 0$ ，所以不等式两边同乘 $\frac{e}{x}$ ，

得 $\left(2e - \frac{y}{x}\right) \ln \frac{y}{x} \leq \frac{1}{m}$ ，设 $\frac{y}{x} = t, t > 0$ ，

$$f(t) = (2e - t) \ln t,$$

由题意转化为 $\frac{1}{m} \geq f(t)$ 在 $t \in (0, +\infty)$ 上恒成立，即 $\frac{1}{m} \geq f(t)_{\max}$ ，

$$\text{则 } f'(t) = -\ln t + (2e - t) \cdot \frac{1}{t} = \frac{2e}{t} - \ln t - 1, t > 0,$$

$$f''(t) = \frac{-2e}{t^2} - \frac{1}{t} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上小于 } 0 \text{ 恒成立，}$$

所以 $f'(t)$ 在 $t \in (0, +\infty)$ 上单调递减，

$$\text{又因为 } f'(e) = 2 - 1 - 1 = 0,$$

所以当 $0 < t < e$ 时， $f'(t) > 0$ ，

当 $t > e$ 时， $f'(t) < 0$ ，

所以 $f(t)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增，

在 $(e, +\infty)$ 上单调递减，

$$\text{所以 } f(t)_{\max} = f(e) = e \ln e = e,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{m} \geq e, \text{ 即 } 0 < m \leq \frac{1}{e},$$

选D.

【标注】【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题；二阶导问题

14. 若存在正实数 m ，使得关于 x 的方程 $x + a(2x + 2m - 4ex) \cdot [\ln(x + m) - \ln x] = 0$ 有2个不同的实根，则实数 a 的取值范围为_____.

【答案】 $(-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{2e}, +\infty\right)$

【解析】由 $x + a(2x + 2m - 4ex)[\ln(x + m) - \ln x] = 0$ ，

$$\text{得 } x + 2a(x + m - 2ex) \ln \frac{x + m}{x} = 0,$$

$$\text{即 } 1 + 2a\left(\frac{x + m}{x} - 2e\right) \ln \frac{x + m}{x} = 0,$$

$$\text{即设 } t = \frac{x + m}{x}, \text{ 则 } t > 0,$$

$$\text{则条件等价于 } 1 + 2a(t - 2e) \ln t = 0,$$

$$\text{即 } (t - 2e) \ln t = -\frac{1}{2a} \text{ 有解，}$$

$$\text{设 } g(t) = (t - 2e) \ln t,$$

$$g'(t) = \ln t + 1 - \frac{2e}{t} \text{ 为增函数，}$$

$$\therefore g'(e) = \ln e + 1 - \frac{2e}{e} = 1 + 1 - 2 = 0,$$

$\therefore$ 当 $t > e$ 时, $g'(t) > 0$,

当 $0 < t < e$ 时, $g'(t) < 0$,

即当 $t = e$ 时, 函数 $g(t)$ 取得极小值为: $g(e) = (e - 2e)\ln e = -e$,

即 $g(t) \geq g(e) = -e$,

若 $(t - 2e)\ln t = -\frac{1}{2a}$ 有解,

则 $-\frac{1}{2a} \geq -e$, 即 $\frac{1}{2a} \leq e$,

则 $a < 0$ 或 $a \geq \frac{1}{2e}$,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{2e}, +\infty\right)$.

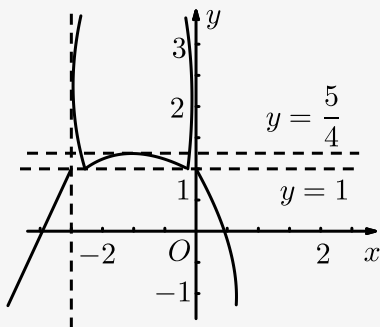
【标注】【知识点】已知零点或根情况求参数范围；导数与单调性；导数与极值；函数零点的概念

复合函数零点

15. 已知函数 $f(x) = -x^2 - 2x$, $g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{4x}, & x > 0 \\ x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 若方程 $g[f(x)] - a = 0$ 的实数根的个数有 4 个, 则 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $\left[1, \frac{5}{4}\right)$

【解析】 由题意可得函数 $y = g[f(x)]$ 与函数 $y = a$ 有 4 个交点, 如图所示:



结合图象可得 $1 \leq a < \frac{5}{4}$,

故答案为: $\left[1, \frac{5}{4}\right)$.

【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；已知零点情况求参数的取值范围

16. 已知实数 $a > 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \frac{a}{2}, & x < 0 \\ e^{x-1} + \frac{a}{2}x^2 - (a+1)x + \frac{a}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f[-f(x)] = e^{-a} + \frac{a}{2}$ 有三个不等的实根, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $\left(1, 2 + \frac{2}{e}\right)$
 C. $\left(1, 1 + \frac{1}{e}\right)$

B. $\left(2, 2 + \frac{2}{e}\right)$
 D. $\left(2, 2 + \frac{1}{e}\right)$

【答案】 B

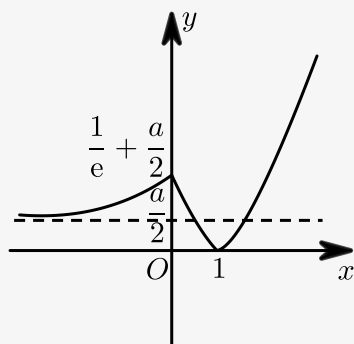
【解析】 当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 为增函数,

当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) = e^{x-1} + ax - a - 1$, $f'(x)$ 为增函数,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$,

故函数在 $(0, 1)$ 上递减, 在 $(1, +\infty)$ 上递增, 最小值为 $f(1) = 0$,

由此画出函数图象如图所示,



令 $t = -f(x)$,

因为 $f(x) \geq 0$,

所以 $t \leq 0$,

$$\text{则有 } \begin{cases} f(t) = e^{-a} + \frac{a}{2} \\ f(t) = e^{t-1} + \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow -a = t - 1,$$

所以 $t = -a + 1 \leq 0$,

所以 $f(x) = a - 1$ 要有三个不同实数根,

$$\text{则需 } \frac{a}{2} < a - 1 < \frac{1}{e} + \frac{a}{2},$$

$$\text{解得 } 2 < a < \frac{2}{e} + 2.$$

故选 B.

【标注】 【知识点】 求参数范围 (含参指对型导函数)

整数解问题

17. 若关于 x 不等式 $xe^x - ax + a < 0$ (e 为自然对数的底数) 的解集为 (m, n) , 且 (m, n) 中只有一个整数, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $\left(\frac{2}{3e^2}, \frac{1}{2e}\right)$

- B. $\left(\frac{2}{3e^2}, \frac{1}{e}\right)$
 C. $\left[\frac{2}{3e^2}, \frac{1}{e}\right)$
 D. $\left[\frac{2}{3e^2}, \frac{1}{2e}\right)$

【答案】D

【解析】设 $g(x) = xe^x$, $y = ax - a = a(x - 1)$,

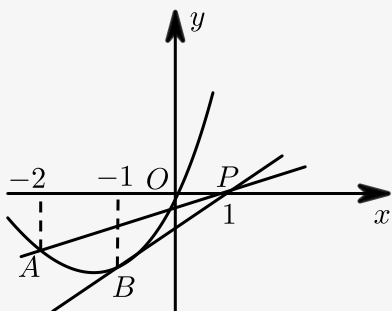
不等式有唯一整数解, 即函数 $g(x) = xe^x$ 在直线 $y = ax - a$ 的下方有唯一整数,

$$g'(x) = (x + 1)e^x,$$

则 $g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 递减, 在 $(-1, +\infty)$ 递增,

故 $g(x)_{\min} = g(-1) = -\frac{1}{e}$, 函数 $y = ax - a$ 恒过定点 $P(1, 0)$,

其图象如下:



结合函数图象得 $k_{PA} \leq a < k_{PB}$,

$$\text{即 } \frac{2}{3e^2} \leq a < \frac{1}{2e}.$$

故选:D

【标注】【知识点】不等式相关的整数解问题

【素养】数学抽象; 数学运算

【思想】数形结合思想

18. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2 - \left| \left(\frac{k+17}{4} \right)x + 2 \right|, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = k\left(x - \frac{4}{3}\right)$, 其中 $k > 0$, 若存在唯一的整数 x , 使得 $f(x) < g(x)$, 则实数 k 的取值范围是 _____.

【答案】 $\frac{17}{3} \leq k < 6$

【解析】令这个唯一整数为 x_0 ,

$$\therefore f(x_0) < g(x_0),$$

$$\text{若 } x_0 > 0, \text{ 则 } k\left(x_0 - \frac{4}{3}\right) - x_0^2 > 0,$$

$$\because k > 0,$$

$$\therefore x_0 \geq 2,$$

$$\therefore k > \frac{x_0^2}{x_0 - \frac{4}{3}} = x_0 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9x_0 - 12},$$

$$\text{令 } P(x_0) = x_0 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9x_0 - 12}, (x_0 \geq 2),$$

$$P'(x_0) = \frac{3(3x_0 - 8)x_0}{(3x_0 - 4)^2},$$

$$\therefore x_0 \text{ 在 } \left[2, \frac{8}{3}\right) \text{ 内 } P'(x_0) < 0, P(x_0) \downarrow,$$

$$x_0 \text{ 在 } \left(\frac{8}{3}, +\infty\right) \text{ 内 } P'(x_0) > 0, P(x_0) \uparrow,$$

$$\text{而 } P(2) = 6, P(3) = \frac{27}{5}, P(4) = 6,$$

$$\therefore \frac{27}{5} \leq k < 6 \text{ ①},$$

再考虑 $x_0 \leq 0$ 情形,

$$\text{明显 } x_0 \neq 0, \left(g(0) = -\frac{4}{3}k < 0, f(0) = 0\right),$$

$$\therefore 2 - \left|\frac{k+17}{4}x_0 + 2\right| = 4 + \frac{k+17}{4}x_0,$$

$$\therefore f(x_0) < g(x_0) \Leftrightarrow 4 + \frac{4}{3}k < \frac{3k-17}{4}x_0 \text{ ②},$$

若 $\frac{3k-17}{4} < 0$ 时, 明显②有无数个整数满足方程,

$$\therefore \frac{3k-11}{4} \geq 0,$$

$$\therefore \frac{17}{3} \leq k \text{ ③},$$

综上所述有 $\frac{17}{3} \leq k < 6$.

故答案为: $\frac{17}{3} \leq k < 6$.

【标注】【知识点】导数与单调性；单调性；已知零点情况求参数的取值范围