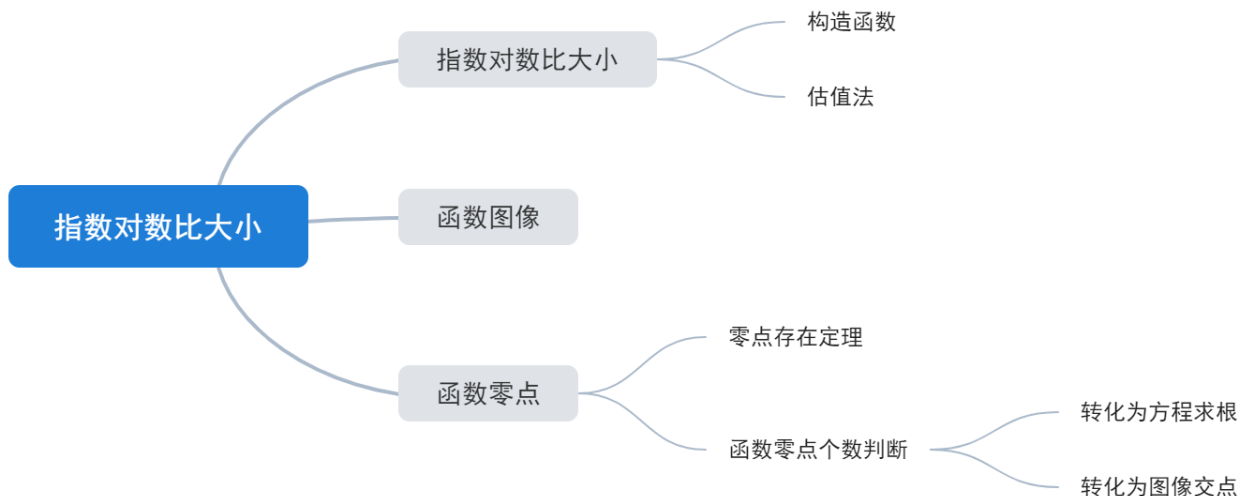


第二讲-指数对数比大小

1. 考点梳理



一、指数对数比大小

1. 真题分析

1. 已知 $a = 5^{\log_2 3.4}$, $b = 5^{\log_4 3.6}$, $c = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3}$, 则 () .

A. $a > b > c$

B. $b > a > c$

C. $a > c > b$

D. $c > a > b$

【答案】 C

【解析】 $\because \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3} = 5^{\log_3 \frac{10}{3}}$, $1 < \log_2 3.4 < 2$, $0 < \log_4 3.6 < 1$, $1 < \log_3 \frac{10}{3} < 2$, 且 $\log_2 3.4 > \log_2 \frac{10}{3} > \log_3 \frac{10}{3}$.
 $\therefore \log_2 3.4 > \log_3 \frac{10}{3} > \log_4 3.6$,
 $\therefore 5^{\log_2 3.4} > 5^{\log_3 \frac{10}{3}} > 5^{\log_4 3.6}$.

【标注】 【知识点】 指数函数的图象及性质

备注：2011天津高考真题第7题

分析：首先本题给的三个比较大小的数都是指数的形式，而且均可以化成同底的形式，需要我们构造指数函数 $y = 5^x$ ，需要结合指数函数单调性来解决问题，此题的指数函数为增函数，故而自变量越大，函数值越大，所以问题转化成我们去比较自变量，也就是指数的大小关系。此时的三个指数分别为

$\log_2 3.4, \log_4 3.6, -\log_2 0.3$ ，这三个数可以化成底数相同的三个对数，分别为

$\log_2 3.4, \log_2 \sqrt{3.6}, \log_2 \frac{10}{3}$ ，如果构造出来 $y = \log_2 x$ ，即可借助对数函数 $y = \log_2 x$ 的单调性来比较大小，此时对数函数为增函数，所以真数越大，函数值越大，即可判断出来 $a > c > b$ 。

本题是非常典型的通过构造指数函数或者对数函数，借助于函数单调性来比较大小的题型，这也是我们指数对数比较大小题型中非常典型的一类问题。

2. 已知 $a = \log_2 e, b = \ln 2, c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ ，则 a, b, c 的大小关系为（ ）。

A. $a > b > c$

B. $b > a > c$

C. $c > b > a$

D. $c > a > b$

【答案】 D

【解析】 $\because b = \ln 2 < 1, a = \log_2 e > 1, c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > 1$ 。

$\therefore b$ 最小，

又 $\because c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3, y = \log_2 x$ 是单调递增函数， $e < 3$ ，

$\therefore c > a$ ，

综上所述 $c > a > b$ ，故选D。

【标注】【知识点】实数指数幂运算

备注：2018天津高考真题第5题

分析：本题所给的三个数值均是对数的形式，还可以发现两个对数可以化成底数相同的对数，那么首先可以构造出来对数函数 $y = \log_2 x$ ，判断出来 $c > a$ ，因为 b 的底数并不为2，所以此时就没法借助对数函数单调性来解决问题，此时我们需要借助于指数对数比较大小的第二个思路（估值法）来解决问题，我们可以判断出来 $c > a > 1; 1 > b$ ，故而 $c > a > b$ 。

本题是典型的需要借助于估值法比较大小的问题。

3. 已知 $a = \log_5 2, b = \log_{0.5} 0.2, c = 0.5^{0.2}$ ，则 a, b, c 的大小关系为（ ）。

A. $a < c < b$

B. $a < b < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

【答案】 A

【解析】 $a = \log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$ ，
而 $c = 0.5^{0.2} > 0.5^1 = \frac{1}{2}$ ，

故 $a < c$;

$$b = \log_{0.5} 0.2 > \log_{0.5} 0.25 = 2 ,$$

$$\text{而 } c = 0.5^{0.2} < 0.5^0 = 1 ,$$

故 $c < b$,

所以 $a < c < b$.

故选A .

【标注】【知识点】指对幂比较大小

备注：2019天津高考真题第6题

分析：本题所给的三个数既含有对数形式的，又含有指数形式的，而且对数形式的两个数不太好化成同底对数的形式，此时我们的处理思路是估值法，我们可以判断出来

$$0 < a = \log_5 2 < \log_4 2 = 0.5; b = \log_{0.5} 0.2 = \log_2 5 > 2; c = 0.5^{0.2} > 0.5^1 = 0.5 , \text{ 故而 } b > c > a .$$

4. 设 $a = 3^{0.7}$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}$, $c = \log_{0.7} 0.8$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

【答案】 D

【解析】 $\because a = 3^{0.7} > 3^0 = 1$,

$$b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8} = 3^{0.8} > 3^{0.7} = a ,$$

$$c = \log_{0.7} 0.8 < \log_{0.7} 0.7 = 1 ,$$

$$\therefore c < a < b .$$

故选D .

【标注】【知识点】指对幂比较大小

【素养】数学运算；逻辑推理

备注：2020天津高考真题第6题

分析：首先观察三个数值的形式，其中 a, b 均为指数的形式，而且可以化成同底的指数， c 为对数的形式，故而 a, b 之间的大小可以根据函数单调性判断，若要进一步比较大小需要进一步估值，故而有

$$c = \log_{0.7} 0.8 < \log_{0.7} 0.7 = 1 < a = 3^{0.7} < b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8} = 3^{0.8} .$$

2. 思路总结

通过上面三道真题的总结，我们处理指数对数比大小的问题的常用思路有两种：对于可以化成同底对数或者同底指数的数值，可以借助于函数单调性比较大小；对于没法化成同底指数或者同底对数的数值，我们需要估算出来这些数值所在的区间。常用的临界值为 $-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ 等等。

3. 模拟演练

5. 已知 $a = 2^{\log_3 4.1}$ ， $b = 2^{\log_3 2.7}$ ， $c = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 0.1}$ ，则 a, b, c 的大小关系为（ ）。
- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $a > c > b$ D. $c > a > b$

【答案】 D

【解析】 $a = 2^{\log_3 4.1}$ ， $b = 2^{\log_3 2.7}$ ， $c = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 0.1} = 2^{\log_3 10}$ ，
 $\because y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，
 $\therefore \log_3 10 > \log_3 4.1 > \log_3 2.7$ ，
 又 $\because y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，
 $\therefore c > a > b$ 。

【标注】【知识点】复合函数；指对幂比较大小

6. 已知 $a = 2^{\ln 3}$ ， $b = 2^{\ln 2}$ ， $c = \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}}$ ，则（ ）。
- A. $c > a > b$ B. $a > b > c$ C. $a > c > b$ D. $b > c > a$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 由于 $c = \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_3 2} = 2^{-2\log_3 2}$ ，又 $\ln 3 > 1$ ，则 $a > b > c$ 。

【标注】【知识点】指数函数与对数函数的关系；指对幂比较大小；指数函数的图象及性质

7. 若 $a = \log_2 3$ ， $b = \log_4 7$ ， $c = 0.7^4$ ，则实数 a, b, c 的大小关系为（ ）。
- A. $a > b > c$ B. $c > a > b$ C. $b > a > c$ D. $c > b > a$

【答案】 A

【解析】 $1 < \log_4 7 = \log_2 \sqrt{7} < \log_2 3$ ， $0.7^4 < 1$ ，
 $\therefore a > b > c$ 。
 故选A。

【标注】【知识点】指对幂比较大小；指数函数的图象及性质；对数函数的图象及性质

8. 已知 $a = \log_2 3.4$, $b = \log_4 3.6$, $c = \log_3 0.3$, 则() .

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $a > c > b$ D. $c > a > b$

【答案】A

【解析】由对数函数的性质可知 $\log_3 0.3 < 0 < \log_4 3.6 < 1 < \log_2 3.4$, 即 $a > b > c$.

【标注】【知识点】实数指数幂运算

9. 设 $a = \log_3 6$, $b = \log_5 10$, $c = \log_7 14$, 则() .

- A. $c > b > a$ B. $b > c > a$ C. $a > b > c$ D. $a > c > b$

【答案】C

【解析】 $a = \log_3 6 = 1 + \log_3 2$,

$$b = \log_5 10 = 1 + \log_5 2,$$

$$c = \log_7 14 = 1 + \log_7 2,$$

$\because y = \log_2 x$ 是增函数,

$$\therefore \log_2 7 > \log_2 5 > \log_2 3 > 0,$$

$$\therefore \log_2 7 = \frac{1}{\log_7 2}, \log_2 5 = \frac{1}{\log_5 2}, \log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2},$$

$$\therefore \log_3 2 > \log_5 2 > \log_7 2,$$

$$\therefore a > b > c.$$

故选C.

【标注】【知识点】对数的概念及其运算；指对幂比较大小

10. 设 x_1, x_2, x_3 为实数, $\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1} = \log_2(x_1 + 1)$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2} = \log_3 x_2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{x_3} = \log_2 x_3$, 则() .

- A. $x_2 < x_1 < x_3$ B. $x_3 < x_2 < x_1$
C. $x_3 < x_1 < x_2$ D. $x_1 < x_3 < x_2$

【答案】D

【解析】假设 $x_2 < x_3$,

$$\text{则} \left(\frac{1}{3}\right)^{x_2} = \log_3 x_2 > \left(\frac{1}{3}\right)^{x_3} = \log_2 x_3,$$

$$\therefore \frac{\ln x_2}{\ln 3} > \frac{\ln x_3}{\ln 2},$$

$$\therefore \ln 3 > \ln 2, \ln x_2 < \ln x_3,$$

$$\text{又} \because 0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{x^3} = \log_2 x_3,$$

$$\therefore x_3 > 1,$$

$$\therefore \ln x_3 > 0,$$

$$\text{同理: } \ln x_2 > 0,$$

$$\therefore \frac{\ln x_2}{\ln 3} > \frac{\ln x_3}{\ln 2} \text{ 不成立,}$$

$$\therefore x_2 > x_3,$$

$$\text{则} \left(\frac{1}{3}\right)^{x_1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x_3},$$

$$\text{且} \log_2(x_1 + 1) > \log_2(x_3 + 1) > \log_2 x_3 \text{ 与已知不符,}$$

$$\therefore x_1 < x_3,$$

$$\therefore x_1 < x_3 < x_2.$$

故选D.

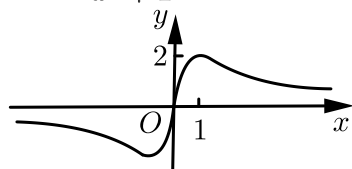
【标注】【知识点】指对幂比较大小；对数函数的图象及性质

二、函数图像

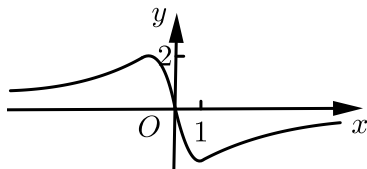
1. 真题分析

11. 函数 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 的图象大致为 ().

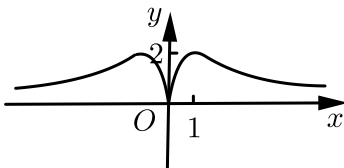
A.



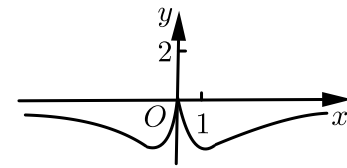
B.



C.



D.



【答案】 A

【解析】 由题意知 $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$$f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-4x}{x^2 + 1} = -f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数，故排除 C、D.

当 $x > 0$ 时， $f(x) > 0$ ，故排除 B.

故选 A.

【标注】【知识点】函数图象的识别问题

备注：2020 天津高考真题第 3 题

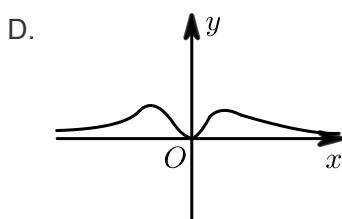
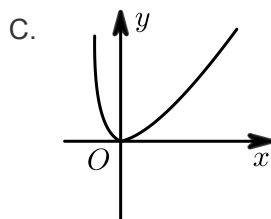
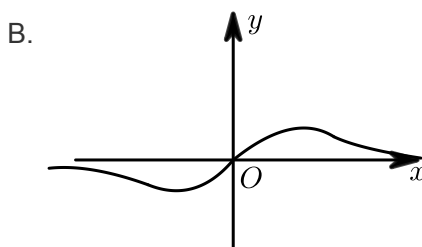
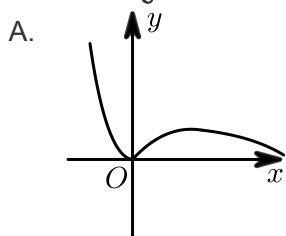
分析：我们判断函数解析式的图像往往需要根据函数的奇偶性、单调性、特殊值的函数值等等来进行判断，例如本题所给的 $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 为奇函数，故而图像关于原点中心对称，排除了选项 C、D，再进一步观察 A 和 B 选项图像，发现差别主要在于函数值正负的区别，例如在 $x = 1$ 时函数值一正一负，解析式算出来的为正，故而可得出结果。

2. 思路总结

我们判断函数图像的依据主要是根据函数的性质（单调性与奇偶性）以及零点、纵截距、最值或者极值点等特殊位置，题目中主要以选择题的形式呈现，故而要采取边判断边排除的策略。

3. 模拟演练

12. 函数 $y = \frac{x^2}{e^x}$ 的图象大致是 ().



【答案】A

【解析】由 $y = \frac{x^2}{e^x}$ 得 $y' = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{x(2-x)}{e^x}$,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 时， $y' < 0$ ，函数单调减，

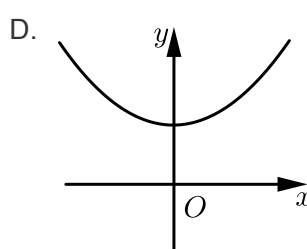
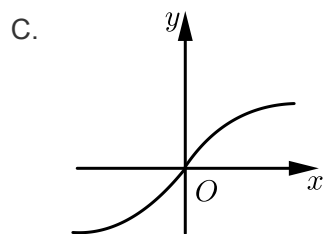
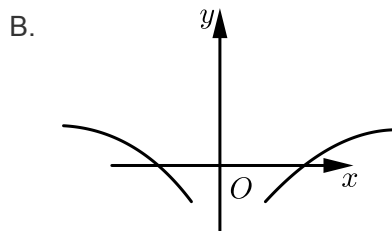
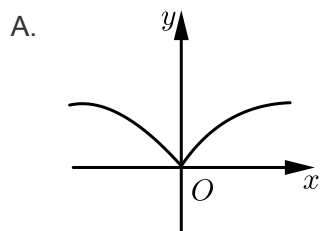
当 $x \in (0, 2)$ 时， $y' > 0$ ，函数单调递增，

只有 A 项图象符合条件.

故选A.

【标注】【知识点】利用导数确定函数的图象；函数图象的识别问题；图象法

13. 函数 $f(x) = 1 + \ln\left(\frac{x^2 + 2}{e}\right)$ 的图象大致是 ().



【答案】D

【解析】 $\because f(x) = 1 + \ln\left(\frac{x^2 + 2}{e}\right) = 1 + \ln(x^2 + 2) - \ln e = \ln(x^2 + 2)$,

函数定义域为 $\mathbf{R}$, 排除B,

又 $f(-x) = f(x)$, 函数为偶函数, 排除C,

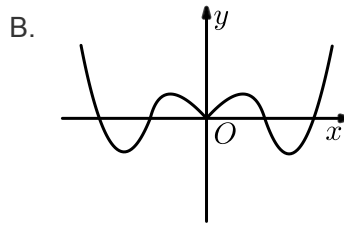
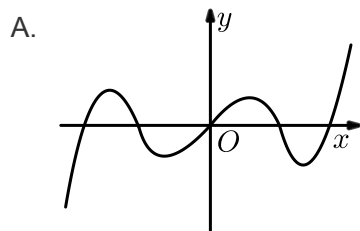
当 $x = 0$ 时,

$\because f(0) = \ln(0^2 + 2) = \ln 2 > 0$, 排除A.

故选D.

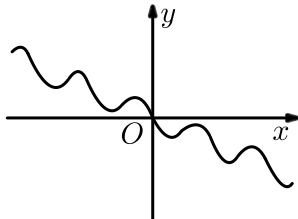
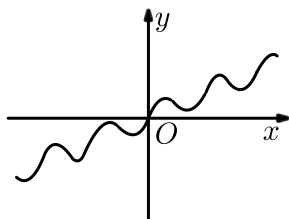
【标注】【知识点】图象法；函数图象的识别问题

14. 函数 $y = \frac{x}{3} + \sin x$ 的图象大致是 ().



C.

D.



【答案】C

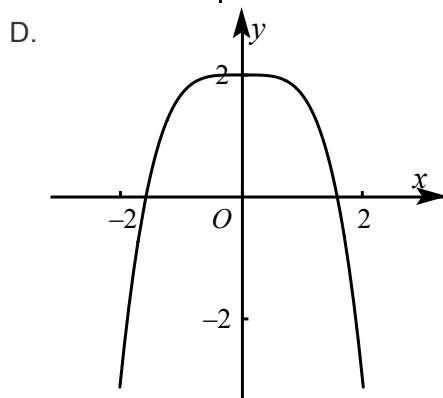
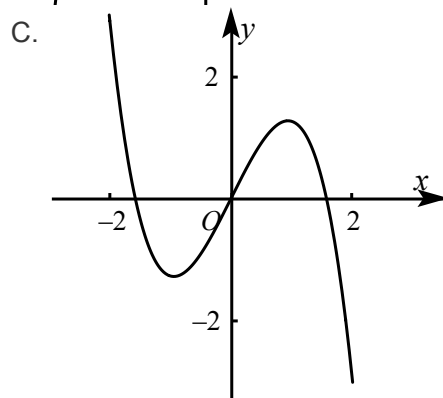
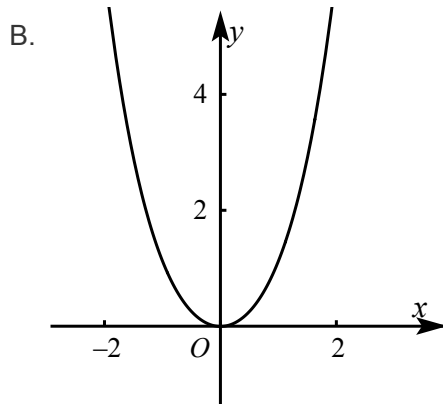
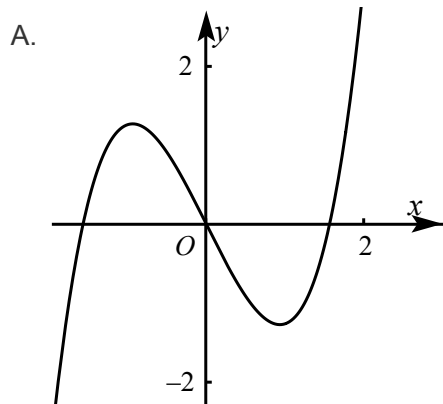
【解析】函数 $y = \frac{x}{3} + \sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$\because f(-x) = \frac{-x}{3} + \sin(-x) = -\left(\frac{x}{3} + \sin x\right) = -f(x)$, $\therefore$ 函数为奇函数,

$\because f'(x) = \frac{1}{3} + \cos x$, $\therefore$ 函数在原点右侧, 靠近原点处单调递增, 导函数有多个零点, 从而原函数有多个极值点, 经检验, 函数图象在原点右边第一个极小值大于零, 排除A, 故选C.

【标注】【知识点】图象法; 函数图象的识别问题

15. 函数 $f(x) = (e^x - e^{-x}) \cdot \cos x$ 在 $[-2, 2]$ 上的图象大致为 ().



【答案】C

【解析】当 $x \in [-2, 2]$ 上时,

$$f(-x) = (e^{-x} - e^x) \cdot \cos(-x) = -(e^x - e^{-x}) \cos x = -f(x),$$

故函数 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上是奇函数，又排除B，D选项，

$$\text{当 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}) \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\text{当 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 时, } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = (e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}}) \cdot \cos \frac{\pi}{4} > 0,$$

故选项A不符合题意，选项C符合题意。

故选C。

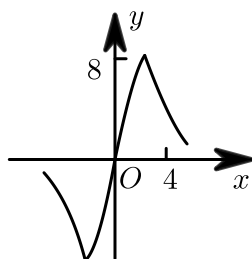
【标注】【思想】数形结合思想

【素养】数学运算；逻辑推理

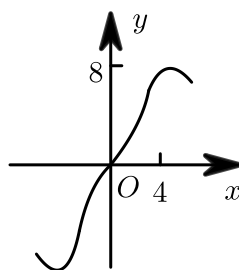
【知识点】函数图象的识别问题

16. 函数 $y = \frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}}$ 在 $[-6, 6]$ 的图象大致为()。

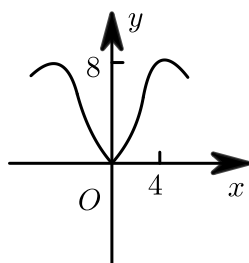
A.



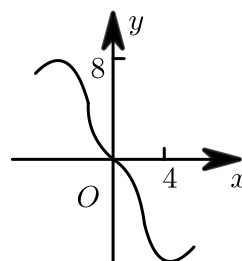
B.



C.



D.



【答案】 B

【解析】 $y = \frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}}$ 为奇函数，故C错，

当 $x = 4$ 时，

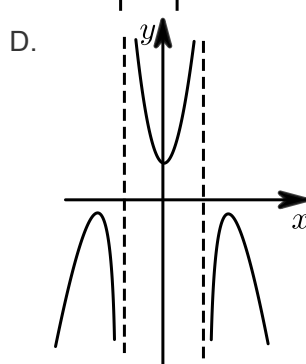
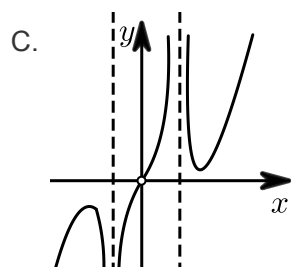
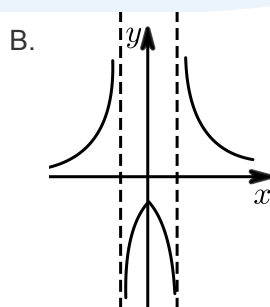
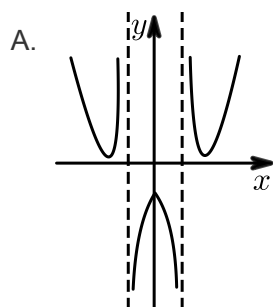
$$\begin{aligned} y &= \frac{2 \cdot 4^3}{16 + \frac{1}{16}} \\ &= \frac{2 \cdot 4^3 \cdot 4^2}{257}, \end{aligned}$$

$$7 < y < 8,$$

故选B。

【标注】【知识点】函数图象的识别问题

17. 函数 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{x^3 - x}$ 的图象大致是()。



【答案】A

【解析】令 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^3 - x}$,

$$\text{则 } f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{(-x)^3 - (-x)} = \frac{e^{-x} - e^x}{x - x^3} = \frac{e^x - e^{-x}}{x^3 - x},$$

$\therefore f(-x) = f(x)$, 即 $f(x)$ 为偶函数,

$\therefore f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,

故C选项错误;

$$\therefore \text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(x) = \frac{e^{+\infty} - e^{-\infty}}{+\infty \cdot (+\infty^2 - 1)} \approx \frac{e^{+\infty}}{+\infty^3},$$

$\therefore$ 指数函数呈爆炸式增长,

$$\therefore e^{+\infty} \gg +\infty^3,$$

$\therefore \text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(x) \rightarrow +\infty,$

故B选项, D选项均错误.

综上所述, 应选择A选项.

【标注】【知识点】函数图象的识别问题

三、函数零点

1. 真题分析

18. 函数 $f(x) = 2^x + x^3 - 2$ 在区间 $(0, 1)$ 内的零点个数是 () .

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】 B

【解析】 解法1：因为 $f(0) = 1 + 0 - 2 = -1$, $f(1) = 2 + 2^3 - 2 = 8$,

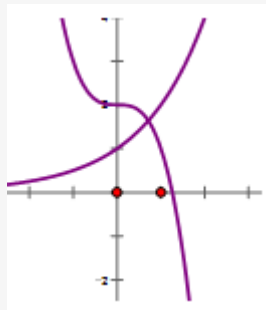
即 $f(0) \cdot f(1) < 0$ 且函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续不断 ,

故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内的零点个数是1 .

解法2：设 $y_1 = 2^x$, $y_2 = 2 - x^3$,

在同一坐标系中作出两函数的图像如图所示：

可知B正确 .



【标注】 【知识点】 零点的个数问题；函数零点的概念

备注：2012年天津高考真题第4题

分析：本题考察了对于零点存在定理的应用，首先我们要分析出来函数的单调性，可以确定的是本题所给的函数为增函数，然后就是判断是否在给定区间存在零点，需要运用零点存在定理进行判断。

19. 函数 $f(x) = 2^x |\log_{0.5} x| - 1$ 的零点个数为 () .

A. 1

B. 2

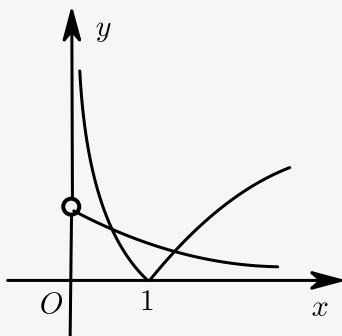
C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 函数 $f(x) = 2^x |\log_{0.5} x| - 1$, 令 $f(x) = 0$, 在同一坐标系中作出 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, 与

$y = |\log_{0.5} x|$, 如图可得零点的个数为2 , 故选B .



【标注】【素养】数学运算

【思想】数形结合思想

【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

备注：2013年天津高考真题第7题

分析：本题考察的是零点个数判断的问题，我们常见的判断零点个数的思路有三种：转化为方程求根；转化为函数图像与横轴的交点情况；转化为两个函数图像的交点情况。本题所给的函数若转化为方程求根，无法实现，若转化为函数图像与横轴交点，我们不会画图，此时我们采取的是转化为两个函数图像交点，转化路径如下： $2^x |\log_{0.5} x| - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^x |\log_{0.5} x| = 1 \Leftrightarrow |\log_{0.5} x| = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ，所以只需要画出函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $y = |\log_{0.5} x|$ 的图像，判断图像之间的交点个数即可。

20. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & x \leq 2 \\ (x - 2)^2, & x > 2 \end{cases}$ ，函数 $g(x) = 3 - f(2 - x)$ ，则函数 $y = f(x) - g(x)$ 的零点个数

为（ ）。

A. 2

B. 3

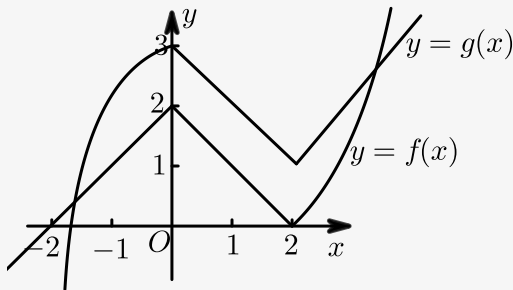
C. 4

D. 5

【答案】A

【解析】 $f(2 - x) = \begin{cases} 2 - |2 - x|, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$ ，从而 $g(x) = \begin{cases} 1 + |2 - x|, & x \geq 0 \\ 3 - x^2, & x < 0 \end{cases}$ ，

在同一坐标系下画出 $y = f(x)$ ， $y = g(x)$ 的图像，



观察可得两函数有2个交点，从而函数 $y = f(x) - g(x)$ 的零点个数为2。

【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；零点、交点、根的等价转化；函数零点的概念；分段函数

备注：2015年天津高考真题文科第8题

分析：本题考察的是零点个数判断的问题，我们常见的判断零点个数的思路有三种：转化为方程求根；转化为函数图像与横轴的交点情况；转化为两个函数图像的交点情况。本题所给的函数为最常见的二次

函数与绝对值函数构成的分段函数，两种函数零点均可直接计算出来，故而可以采取转化为方程求根的方式来求解，此时需要我们耐心细致的进行分类讨论，把函数最终的解析式准确的计算出来即可。

2. 思路总结

我们常见的函数零点问题有两种：一种是判断函数零点的区间，主要是考察零点存在定理的运用；一种是求解函数零点的个数，我们的处理思路可以是转化为方程求根、转化为函数图像和横轴交点以及转化为两个函数图像求交点，这三种转化方式的优先级是依次递减的。

3. 模拟演练

21. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \leq 1 \\ \log_{\frac{1}{3}} x, & x > 1 \end{cases}$ ，则函数 $y = f(x) + x - 4$ 的零点个数为 () .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 $f(x) + x - 4 = 0$ ，即 $g(x) = f(x) + x = \begin{cases} 3^x + x, & x \leq 1 \\ x - \log_3 x, & x > 1 \end{cases} = 4$ ，

设 $g_1(x) = 3^x + x, x \leq 1, g_2(x) = x - \log_3 x, x > 1$ ，

显然 $g_1(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单增，且 $g_1(1) = 4$ ，

$\therefore g_1(x) = 4$ 在 $(-\infty, 1]$ 上有且仅有一解，

而 $g_2'(x) = \frac{x \ln 3 - 1}{x \ln 3} > \frac{x - 1}{x \ln 3} > 0, x > 1$ ，

$\therefore g_2(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上递增，注意到 $g_2(1) = 1 < 4$ ，

而当 $x \rightarrow +\infty$ 时，显然 $g_2(x) \rightarrow +\infty$ ，

$\therefore g_2(x) = 4$ 在 $(1, +\infty)$ 有且仅有一解，

$\therefore g(x) = 4$ 有两解。

故选 B。

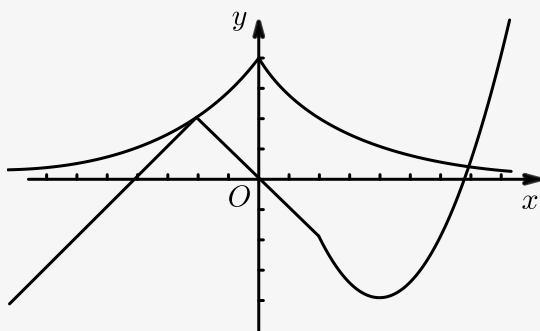
【标注】 **【知识点】** 利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；直接求函数的单调性（不含参）

22. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x + 1|, & x < 1, \\ x^2 - 4x + 2, & x \geq 1, \end{cases}$ 则函数 $g(x) = 2^{|x|} f(x) - 2$ 的零点个数为 _____。

【答案】 2

【解析】 令 $g(x) = 2^{|x|} f(x) - 2 = 0$ 得， $f(x) = \frac{2}{2^{|x|}}$ ，

作函数 $f(x)$ 与 $y = \frac{2}{2^{|x|}}$ 的图象如下，



结合图象可知，函数的图象有两个不同的交点，

故函数 $g(x) = 2^{|x|}f(x) - 2$ 的零点个数为2.

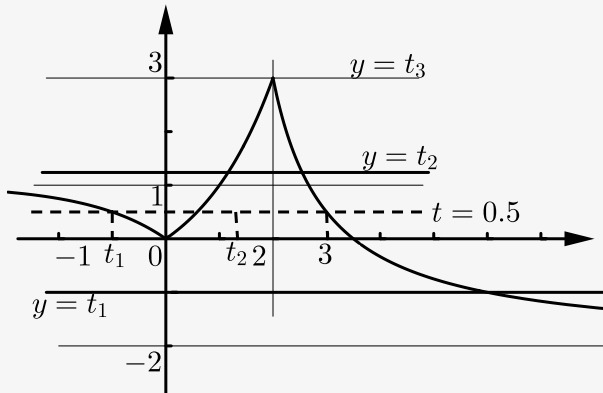
故答案为：2.

【标注】【知识点】函数零点存在定理

23. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x \leq 2 \\ \frac{7-2x}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ ，则函数 $g(x) = f[f(x)] - \frac{1}{2}$ 的零点个数为_____.

【答案】 4

【解析】 函数 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x \leq 2 \\ \frac{7-2x}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ 的大致图象如下：



由图象可得 $f(t) = \frac{1}{2}$ 有3个解， $t_1 = -1$ ， $t_2 = \log_2 3 \in (1, 2)$ ， $t_3 = 3$ ，

$f(x) = t_1$ ， $f(x) = t_2$ ， $f(x) = t_3$ 分别有1，2，1个解，

故 $g(x) = f[f(x)] - \frac{1}{2}$ 的零点个数为4.

【标注】【知识点】函数零点的概念；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

24. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln(x-1)|, & x > 1 \\ 2^{x-1} + 1, & x \leq 1 \end{cases}$ ，则方程 $f(f(x)) - 2\left[f(x) + \frac{3}{4}\right] = 0$ 的实根个数为（ ）.

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】 B

【解析】 设 $f(x) = t$, 可得 $f(t) - 2\left(t + \frac{3}{4}\right) = 0$,

分别作出 $y = f(x)$ 和 $y = 2x + \frac{3}{2}$ 的图象 ,

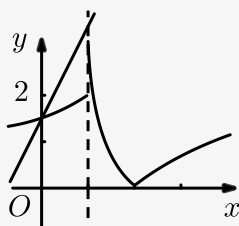
可得它们有两个交点 ,

再结合 $y = f(x)$ 的图象 , 即可得到实根的个数 ,

设 $f(x) = t$, 可得

$$f(t) - 2\left(t + \frac{3}{4}\right) = 0 ,$$

分别作出 $y = f(x)$ 和 $y = 2x + \frac{3}{2}$ 的图象 ,



可得它们有两个交点 ,

即方程 $f(t) - 2\left(t + \frac{3}{4}\right) = 0$ 有两根 ,

一根为 $t_1 = 0$, 另一个根为 $t_2 \in (1, 2)$,

由 $f(x) = 0$, 可得 $x = 2$;

由 $f(x) = t_2$, 可得 x 有 3 个解 ,

综上可得方程 $f(f(x)) - 2\left[f(x) + \frac{3}{4}\right] = 0$ 的实根个数为 4 .

故选答案 : B .

【标注】 【知识点】 利用函数图象研究方程根的分布问题 (图象与零点综合) ; 零点、交点、根的等价转化 ; 函数零点的概念 ; 复合函数 ; 分段函数

25. 已知函数 $f(x) = 2^x + \log_2 x$, $g(x) = 2^{-x} - \log_{\frac{1}{2}} x$, $h(x) = 2^x \log_2 x - 1$ 的零点分别为 a , b , c , 则

a , b , c , 的大小关系为 () .

A. $a < b < c$

B. $c < b < a$

C. $c < a < b$

D. $b < a < c$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = 2^x + \log_2 x$, $g(x) = 2^{-x} - \log_{\frac{1}{2}} x$, $h(x) = 2^x \log_2 x - 1$ 的零点分别为 a , b

, c ,

$$\therefore f(a) = 2^a + \log_2 a = 0 , g(b) = 2^{-b} - \log_{\frac{1}{2}} b = 0 ,$$

$$h(c) = 2^c \log_2 c - 1 = 0 ,$$

$$\text{即 } 2^a = -\log_2 a, \left(\frac{1}{2}\right)^b = \log_{\frac{1}{2}} b, \log_2 c = \left(\frac{1}{2}\right)^c,$$

$\therefore$ 根据函数图象可得, $a < 0, 0 < b < 1, c > 1$,

$\therefore a < b < c$,

故选A.

【标注】【知识点】判定函数零点所在区间(存在性定理);利用函数性质画简图;指数函数的图象及性质;对数函数的图象及性质

26. 函数 $f(x) = 2\sin(\pi x) - \frac{1}{1-x}$, $x \in [-2, 4]$ 的所有零点之和为().

A. 2

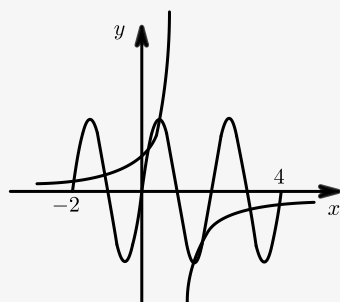
B. 4

C. 6

D. 8

【答案】 D

【解析】 $f(x) = 2\sin(\pi x) - \frac{1}{1-x}$, $x \in [-2, 4]$, 对于 $y_1 = 2\sin \pi x$, $y_2 = \frac{1}{1-x}$,



$\therefore$ 根据图像得共有8个.

故选D.

【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题(图象与零点综合);一个函数的自对称问题;正弦函数的图象和性质