

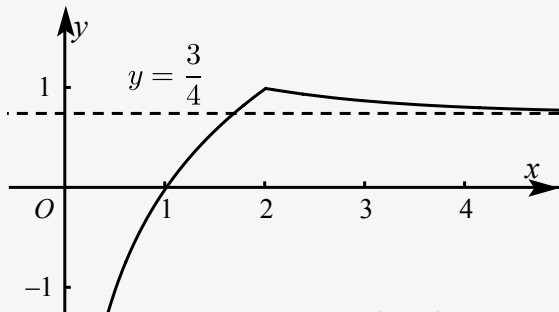
第三讲-函数零点综合（一）练习题

一、转化为方程求根

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{3}{4}, & x \geq 2 \\ \log_2 x, & 0 < x < 2 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - k$ 有两个不同的零点, 则实数 k 的取值范围是 _____.

【答案】 $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$

【解析】 当 $0 < x < 2$ 时, $y = \log_2 x$, 当 $x \geq 2$ 时, $\frac{3}{4} < y \leq 1$, 函数 $g(x) = f(x) - k$ 恰好有两个零点等价于函数 $f(x)$ 与 $y = k$ 的图象有两个交点, 作出函数图象,



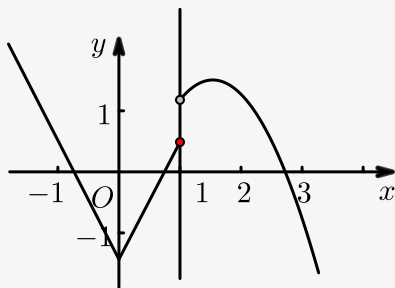
由图象可知, k 的取值范围为 $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$, 故答案为 $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$.

【标注】 【知识点】 函数零点的概念; 已知零点情况求参数的取值范围; 分段函数

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2|x| - a, & x \leq 1 \\ -(x-a)^2 + a, & x > 1 \end{cases}$, 当 $a = 1$ 时, 不等式 $f(x) > x$ 的解集是 _____; 若关于 x 的方程 $f(x) = 0$ 恰有三个实根, 则实数 a 的取值范围为 _____.

【答案】 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$; $a > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 或 $0 < a \leq 2$

【解析】 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \begin{cases} 2|x| - 1, & x \leq 1 \\ -(x-1)^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$
 $= \begin{cases} 2|x| - 1, & x \leq 1 \\ -(x-1)^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$
当 $x \leq 1$ 时, 由 $f(x) > x$ 得 $2|x| - 1 > x$,



当 $0 \leq x \leq 1$, 不等式等价于 $2x - 1 > x$, 即 $x > 1$ 此时不等式不成立 ,

当 $x < 0$ 时 , 不等式等价于 $-2x - 1 > x$, 得 $x < -\frac{1}{3}$,

当 $x > 1$ 时 , 由 $f(x) > x$ 得 $-(x-1)^2 + 1 > x$, 得 $x^2 - x < 0$, 得 $0 < x < 1$, 此时无解 ,

综上不等式 $f(x) > x$ 的解集 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$,

当 $x \leq 1$ 时 , $f(x) = 2|x| - a$ 的最小值为 $f(0) = -a$, 在 $(0, 1]$ 上的最大值为 $f(1) = 2 - a$,

当 $x > 1$ 时 , 函数 $f(x)$ 是开口向下的抛物线对称轴为 $x = a$, 顶点为 (a, a) ,

当 $x \leq 1$ 时 , $f(x) = 2|x| - a$ 最多有两个零点 ,

当 $x > 1$ 时 , $f(x) = -(x-a)^2 + a$ 最多有两个零点 ,

则要使 $f(x) = 0$ 恰有三个实根 ,

则当 $x \leq 1$ 时 , 有两个零点 , $x > 1$ 时有一个零点 ,

或当 $x \leq 1$ 时 , 有一个零点 , $x > 1$ 时有两个零点 ,

①若当 $x \leq 1$ 时 , 有两个零点 , 则 $\begin{cases} f(0) = -a < 0 \\ f(1) = 2 - a \geq 0 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} a > 0 \\ a \leq 2 \end{cases}$, 即 $0 < a \leq 2$,

此时当 $x > 1$ 时只能有一个零点 ,

若对称轴 a 满足 $1 < a \leq 2$, 此时当 $x \geq a$ 时 , 必有一个零点 ,

则只需要当 $1 < x \leq a$ 时 , $f(1) = -(1-a)^2 + a = -a^2 + 3a - 1 \geq 0$, 即

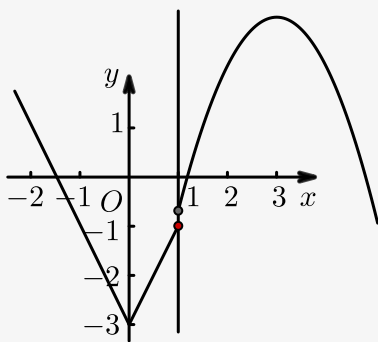
$$a^2 - 3a + 1 \leq 0 ,$$

得 $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, 此时 $1 < a \leq 2$,

若对称轴 a 满足 $0 < a \leq 1$, 此时 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数 ,

要使 $f(x)$ 此时只有一个零点 , 则 $f(1) = -(1-a)^2 + a = -a^2 + 3a - 1 \geq 0$,

即 $a^2 - 3a + 1 \leq 0$, 得 $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, 此时 $0 < a \leq 1$,



②若当 $x \leq 1$ 时，有一个零点，此时 $f(1) = 2 - a < 0$ ，

即 $a > 2$ 时，

此时当 $x > 1$ 时，函数的对称轴 $a > 2$ ，

要使 $x > 1$ 时有两个零点，则 $f(1) = -(1-a)^2 + a = -a^2 + 3a - 1 < 0$ ，

即 $a^2 - 3a + 1 > 0$ ，得 $a < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 舍或 $a > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ，此时 $a > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ，

综上实数 a 的取值范围是 $a > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 或 $0 < a \leq 2$ ，

故答案为： $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ ， $a > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 或 $0 < a \leq 2$ 。

结合绝对值函数以及一元二次函数的图象和性质，利用数形结合进行求解即可。

本题主要考查函数与方程的应用，以及函数零点个数的应用，结合绝对值函数和一元二次函数的图象和性质，利用数形结合以及分类讨论的思想是解决本题的关键综合性较强，有一定的难度。

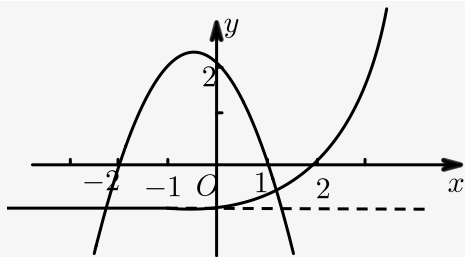
【标注】【知识点】分段函数；函数零点的概念；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；已知零点情况求参数的取值范围；零点、交点、根的等价转化

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x-2} - 1, & (x \geq a) \\ -x^2 - x + 2, & (x < a) \end{cases}$ ，若函数 $f(x)$ 恰有两个零点，则实数 a 的取值范围是（ ）。

- A. $[-2, 1) \cup (2, +\infty)$
- B. $[-1, 2) \cup [2, +\infty)$
- C. $(-2, 1] \cup (2, +\infty)$
- D. $(-2, 1] \cup [2, +\infty)$

【答案】 C

【解析】



结合函数图象可知：当 $a \leq -2$ 时，函数有1个零点；当 $a \in (-2, 1]$ 时，函数有2个零点；当 $a \in (1, 2]$ 时，函数有3个零点；当 $a \in (2, +\infty)$ 时，函数有2个零点，故选C．
代端点值检验亦可知选C．

【标注】【知识点】函数零点的概念；已知零点情况求参数的取值范围

4. 已知 $\lambda \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5, & x < \lambda \\ e^x - 1, & x > \lambda \end{cases}$ ，若函数 $f(x)$ 恰有2个零点，则实数 λ 的取值范围是 _____ ．

【答案】 $(-1, 0) \cup (5, +\infty)$

【解析】 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5, & x < \lambda \\ e^x - 1, & x > \lambda \end{cases}$ ，

由 $x^2 - 4x - 5 = 0$ 可得 $x = -1$ 或 5 ；

$e^x - 1 = 0$ ，可得 $x = 0$ ．

若 $\lambda > 5$ 则 $f(x)$ 在 $x < \lambda$ 时，有两个零点 $-1, 5$ ，

在 $x > \lambda$ 时无零点，符合题意；

若 $-1 < \lambda < 0$ 时，则 $f(x)$ 在 $x < \lambda$ 时，有零点 -1 ，

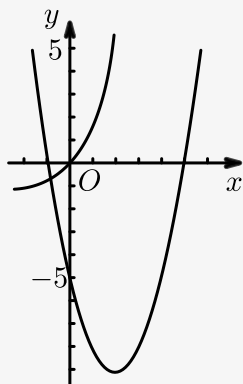
在 $x > \lambda$ 时零点为 0 ，符合题意；

若 $\lambda \leq -1$ 时， $f(x)$ 只有一个零点 0 ，不符题意；

若 $0 \leq \lambda \leq 5$ 时， $f(x)$ 只有一个零点 -1 ，不符题意．

综上可得 λ 的范围是 $(-1, 0) \cup (5, +\infty)$ ，

故答案为： $(-1, 0) \cup (5, +\infty)$ ．



【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；函数零点的概念

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - x^2, & x > 0 \\ e^{|x+2|} - a, & x \leq 0 \end{cases}$ 有4个零点，则实数 a 的取值范围是 _____ .

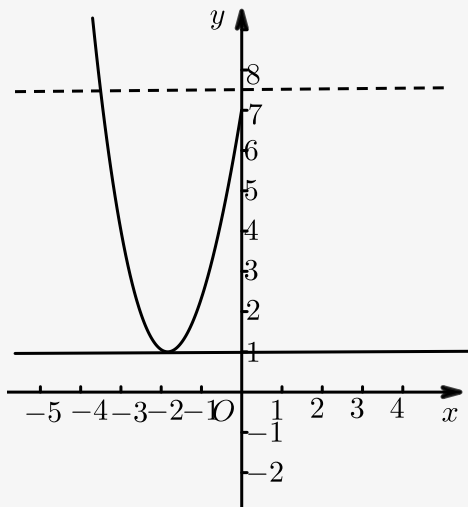
【答案】 $(1, e^2]$

【解析】 当 $x > 0$ 时， $f(x) = 2^x - x^2$ ，

函数 $y = 2^x$ 和 $y = x^2$ 图象有两个交点 $(2, 4)$ ， $(4, 16)$ ，此时 $f(x)$ 有两个零点，

所以只需当 $x \leq 0$ 时，函数 $f(x) = e^{|x+2|} - a$ 有两个零点，

在同一坐标系内作出 $h(x) = e^{|x+2|}$ 和 $y = a$ 的图象，如图：



当 $x = -2$ 时， $h(-2) = 1$ ， $h(0) = e^2$ ，

由图象可知，当 $1 < a \leq e^2$ 时， $h(x) = e^{|x+2|}$ 和 $y = a$ 的图象有两个交点，

所以函数有两个零点，即实数 a 的取值范围是 $(1, e^2]$.

故答案为： $(1, e^2]$.

【标注】【知识点】函数零点的概念；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -\frac{7}{6}x - 1, & x > a \\ x^2 + 3x + 4, & x \leq a \end{cases}$ ， $g(x) = f(x) - ax$ ，若函数 $g(x)$ 恰有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是（ ） .

A. $\left(-3, -\frac{4}{3}\right]$

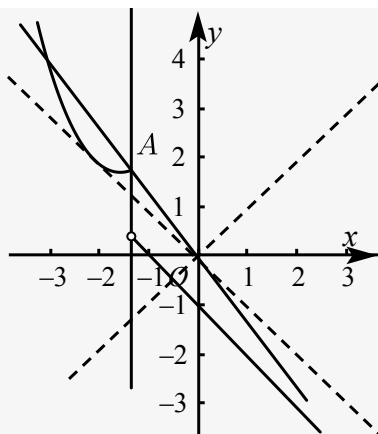
B. $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{7}{6}\right)$

C. $(-\infty, -1)$

D. $(7, +\infty)$

【答案】 B

【解析】 由 $g(x) = f(x) - ax = 0$ 得 $f(x) = ax$ ，



若函数 $g(x)$ 恰有三个不同的零点，

则等价于 $f(x)$ 与 $y = ax$ 有三个不同的交点，

$$\because f(x) = x^2 + 3x + 4 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4},$$

$\therefore$ 当 $a \geq 0$ ，两个函数只有一个交点，不满足条件，

$$\therefore a < 0,$$

要使 $f(x)$ 与 $y = ax$ 有三个不同的交点，

则等价于当 $x > a$ 时， $y = ax$ 与 $y = -\frac{7}{6}x - 1$ ，有一个交点，

$$\text{此时 } a < -\frac{7}{6},$$

当 $x \leq a$ 时， $y = ax$ 与 $f(x) = x^2 + 3x + 4$ 有两个交点，

则当 $y = ax$ 与 $f(x) = x^2 + 3x + 4$ 相切时， $f(x) = x^2 + 3x + 4 = ax$ ，

$$\text{即 } x^2 + (3-a)x + 4 = 0,$$

则判别式 $\Delta = (3-a)^2 - 16 = 0$ 得 $a - 3 = 4$ 或 $a - 3 = -4$ ，

则 $a = 7$ (舍) 或 $a = -1$ ，

当 $x = a$ 时， $f(a) = a^2 + 3a + 4$ ，即 $A(a, a^2 + 3a + 4)$ ，

当 $y = ax$ 过点 A 时，直线 $y = ax$ 与 $f(x)$ 有两个交点，

$$\text{此时 } a^2 + 3a + 4 = a \cdot a = a^2,$$

$$\text{得 } 3a + 4 = 0 \text{ 得 } a = -\frac{4}{3},$$

要使当 $x \leq a$ 时， $y = ax$ 与 $f(x) = x^2 + 3x + 4$ 有两个交点，

$$\text{则满足 } -\frac{4}{3} \leq a < -1,$$

$$\text{又 } a < -\frac{7}{6},$$

$$\therefore -\frac{4}{3} \leq a < -\frac{7}{6},$$

即实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{7}{6}\right)$ 。

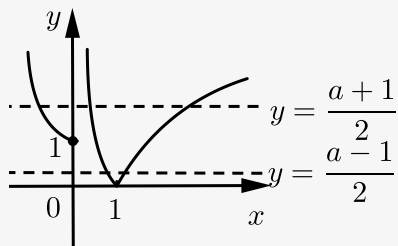
故选：B。

【标注】【知识点】函数零点的概念；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & x > 0 \\ 2^{|x|}, & x \leq 0 \end{cases}$, 若函数 $y = |2f(x) - a| - 1$ 存在5个零点, 则实数 a 的取值范围为 _____.

【答案】 (1, 3)

【解析】 本题考查出数与方程, 在平面直角坐标系中画出 $f(x)$ 的大致图象,



$$\because y = |2f(x) - a| - 1 = 0,$$

$$\therefore f(x) = \frac{a \pm 1}{2},$$

$\therefore$ 可以看成 $y = f(x)$ 的图象与平行线 $y = \frac{a \pm 1}{2}$ 共有5个交点,

$$\therefore \begin{cases} \frac{a+1}{2} \geq 1 \\ 0 < \frac{a-1}{2} < 1 \end{cases},$$

解得 $1 < a < 3$.

【标注】 【知识点】对数函数的图象及性质；指数函数的图象及性质；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；已知零点情况求参数的取值范围；函数零点的概念

二、参变分离

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -\frac{\ln x}{x}, & x > 0 \\ -x^2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) - t$ (t 为常数) 有三个零点, 则实数 t 的取值范围为 ().

- A. $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$
 B. $\left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$
 C. $\{1\} \cup \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$
 D. $\left(-\infty, -\frac{1}{e}\right) \cup (1, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 $f(x) = -\frac{\ln x}{x}, x > 0,$

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{\ln x - 1}{x^2} \text{ 零点为 } e,$$

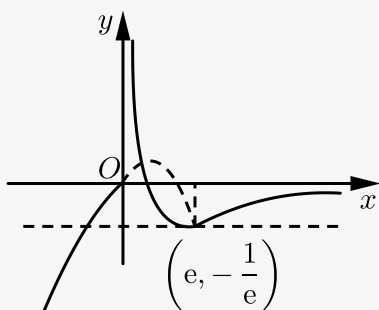
x	$(0, e)$	e	$(e, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↓	极小值	↑

$$f(e) = -\frac{\ln e}{e} = -\frac{1}{e},$$

注意在 x 较大时, x 会远远大于 $\ln x$,

即 $-\frac{\ln x}{x}$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 则, 会趋向于 0,

于是, $f(x)$ 图象如图,



$y = f(x) - t$ 零点个数,

即 $y = f(x)$ 与 $y = t$ 图象交点数,

由图可知 $t \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ 时, 有三个交点.

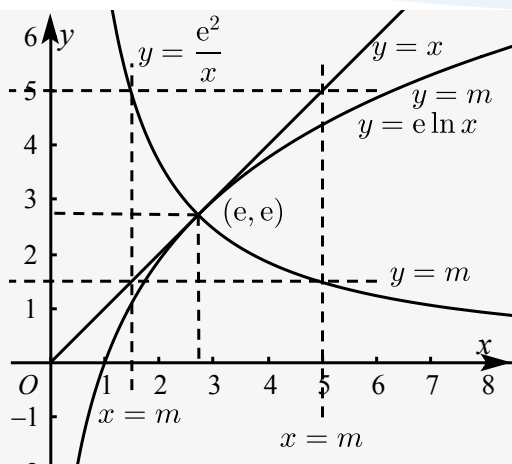
综上所述, 选 A.

【标注】【知识点】参变分离法求零点个数

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e \ln x, & 0 < x \leq m \\ \frac{e^2}{x}, & x > m \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - m$ 仅有 1 个零点, 则实数 m 的取值范围为 _____.

【答案】 $(0, e]$

【解析】 本题主要考查 $y = x$, $y = e \ln x$, $y = \frac{e^2}{x}$ 三个函数的关系, 大致作图:



若 $g(x) = f(x) - m$ 有且仅有 1 个零点 $\Leftrightarrow f(x) = m$ 方程仅有 1 解 $\Leftrightarrow y = f(x)$ 与 $y = m$ 的图象仅有一个交点，

结合图：

① 当 $x \in (0, e)$ 时，有 $m > e \ln m$ ，证明如下：

$$\text{令 } h(x) = x - e \ln x, h'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x - e}{x},$$

$x \in (0, e)$ 时， $h'(x) < 0$ ， $h(x)$ 单调递减；

$x \in (e, +\infty)$ 时， $h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 单调递增；

$$\Rightarrow h(x) \geq h(e) = 0,$$

令 $x = m$ 有： $m \geq e \ln m$ ，“=”当且仅当 $m = e$ 时取得，

$$\text{故 } x \in (0, e) \text{ 时，} m > e \ln m, m < \frac{e^2}{m},$$

结图可知： $y = m$ 与 $y = \frac{e^2}{x}$ 必有一交点，且唯一，

$y = m$ 与 $y = e \ln x$ 无交点，符合题意。

② 当 $x \in (e, +\infty)$ 时，由①知：仍有： $m > e \ln m$ ，此时 $m > \frac{e^2}{m}$ ，

$$\text{结合图象可知：} y = m > e \ln m > \frac{e^2}{m},$$

也即： $y = m$ 与 $y = e \ln x$ 和 $y = \frac{e^2}{x}$ 均无交点，不合题意，舍。

③ 当 $x = e$ 时，恰有： $f(x) \leq e$ 且 $m = e$ ，

则 $f(x) = m$ 有且仅有唯一解 $x = e$ ，符合题意，

综上所述， $m \in (0, e]$ 。

故答案为： $(0, e]$ 。

【标注】【知识点】已知零点或根情况求参数范围；已知零点情况求参数的取值范围；函数零点存在定理

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - e^x, & x \leq 0 \\ x^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}$ ，若函数 $y = f(x) - 2t$ 有两个不同的零点，则 t 的取值范围 ()。

A. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

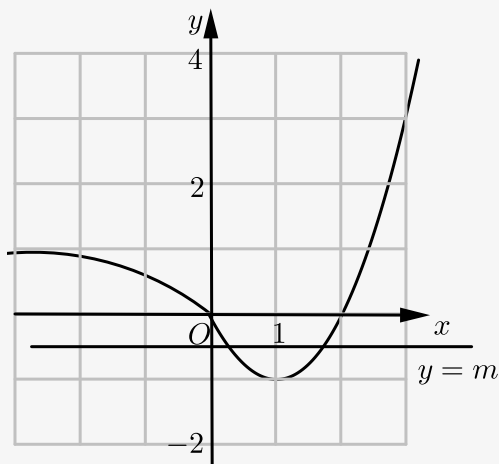
C. $(-1, +\infty)$

B. $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

D. $[-1, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - e^x, & x \leq 0 \\ x^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}$ ，画出函数 $y = f(x)$ 与 $y = 2t$ 的图象，
如图所示，



$\therefore$ 函数 $y = f(x) - 2t$ 有 2 个不同的零点，

$\therefore$ 函数 $y = f(x)$ 与 $y = 2t$ 的图象有 2 交点，

由图象可得 $2t$ 的取值范围为 $(-1, 1)$ ，

所以 t 的取值范围为 $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 。

故选：A。

【标注】 【知识点】二次函数的图象及性质；指数函数的图象及性质；已知零点情况求参数的取值范围；函数零点的概念

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 + 2x - 3|, & x < 2 \\ -x^2 - 2x + 13, & x \geq 2 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f(x) - m = 0$ 恰有五个不相等的实数解，则 m 的取值范围是 ()。

A. $[0, 4]$

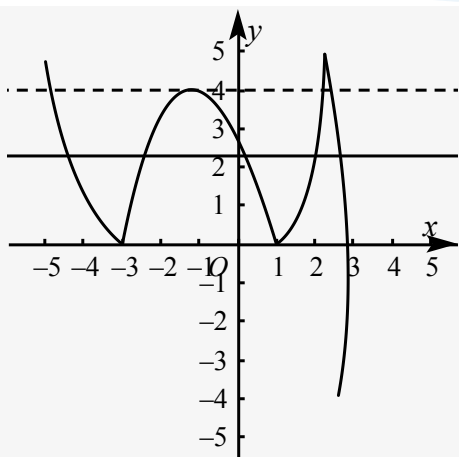
B. $(0, 4)$

C. $(4, 5)$

D. $(0, 5)$

【答案】 B

【解析】 作出函数的图像，如图所示，



关于 x 的方程 $f(x) - m = 0$ 恰有五个不相等的实数解，则 $y = f(x)$ 与 $y = m$ 有五个不同的交点，

$$\therefore 0 < m < 4,$$

故选B.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】分段函数

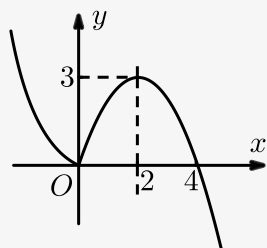
【知识点】函数求值问题

【知识点】函数零点的概念

12. 对于实数 a, b ，定义运算“ $*$ ”： $a * b = \begin{cases} a^2 - ab, & a \leq b \\ b^2 - ab, & a > b \end{cases}$ ，设 $f(x) = (x - 4) * (-x - 4)$ ，若关于 x 的方程 $|f(x) - m| = 1 (m \in \mathbf{R})$ 恰有四个互不相等的实根，则实数 m 的取值范围时 _____.

【答案】 $(-1, 1) \cup (2, 4)$

【解析】 由题意 $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^2 + 3x, & x \geq 0 \\ \frac{21}{16}x^2 - 3x, & x < 0 \end{cases}$ ， $f(x)$ 图象大致为：



由 $|f(x) - m| = 1$ 得 $f(x) = m \pm 1 (m \in \mathbf{R})$ 恒有四个实根，

即 $y = m \pm 1$ 与 $y = f(x)$ 有4个交点，

$$\therefore \begin{cases} m+1 > 3 \\ 0 < m-1 < 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 1 < m+1 < 3 \\ m-1 < 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m+1 = 3 \\ m-1 = 0 \end{cases},$$

得 $2 < m < 4$ 或 $-1 < m < 1$.

故答案为： $(-1, 1) \cup (2, 4)$.

【标注】【知识点】分段函数；图象法；函数零点的概念；利用函数图象研究方程根的分布问题
(图象与零点综合)

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \leq 0 \\ \frac{e^x}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 方程 $f(x) - ax = 0$ 有4个不同的实数根, 则 a 的取值范围是 () .
- A. $(\frac{e^2}{4}, 4)$
 B. $(\frac{e}{4}, 4)$
 C. $(\frac{e}{4}, +\infty)$
 D. $(\frac{e^2}{4}, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 $f(x) - ax = 0$ 有4个不同的实数根 $\Leftrightarrow f(x) = ax$ 有4个不同的解,

①当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0 = 0$ 成立,

$x = 0$ 必为其1个实根.

②当 $x \neq 0$ 时, $a = \frac{f(x)}{x}$, 必有3个实根,

$$\text{令 } g(x) = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x + 4, & x < 0 \\ \frac{e^x}{x^2}, & x > 0 \end{cases},$$

$$x > 0 \text{ 时, } g'(x) = \frac{xe^x - 2ex}{x^3} = \frac{e^x(x-2)}{x^3},$$

$x \in (0, 2)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

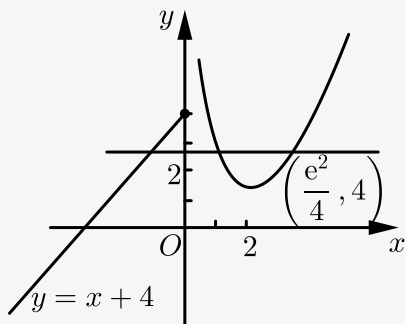
$x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) \geq 0$, $g(x)$ 单调递增,

$$\Rightarrow g(x) \geq g(2) = \frac{e^2}{4},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{0} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty,$$

大致作出 $g(x)$ 图象, 如图,



要使 $y = a$ 与 $y = g(x)$ 要有3个不同的实根,

由图可知, $a \in \left(\frac{e^2}{4}, 4\right)$.

故选A.

【标注】【知识点】分段函数；零点、交点、根的等价转化；已知零点情况求参数的取值范围；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；函数零点的概念

三、转化为 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 交点

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, & x \geq 2 \\ (x-1)^3, & 0 < x < 2 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = kx$ 有且仅有1个实根, 则实数 k 的取值范围是 _____.

【答案】 $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

【解析】 $\because f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, & x \geq 2 \\ (x-1)^3, & 0 < x < 2 \end{cases}$,

且 $f(x) = kx$ 有且仅有1个实根,

$\therefore y = \frac{f(x)}{x}$ 与 $y = k$ 有且仅有1个交点,

$\therefore$ 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \frac{4}{x^2}, & x \geq 2 \\ \frac{(x-1)^3}{x}, & 0 < x < 2 \end{cases}$,

$\therefore y = \frac{4}{x^2}$ 在 $[2, +\infty)$ 单调递减,

且当 $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow 0$,

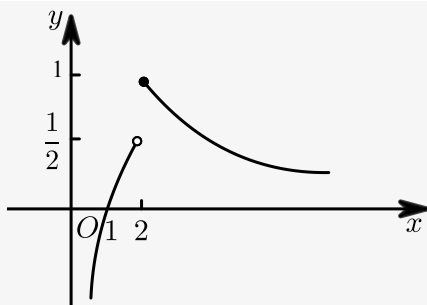
令 $h(x) = \frac{(x-1)^3}{x} = x^2 - 3x + 3 - \frac{1}{x}$ ($0 < x < 2$), 且 $h(1) = 0$,

$h'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2} = \frac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2}$,

$\therefore x \in (0, 2)$ 即 $h'(x) > 0$ 恒成立,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增,

$\therefore g(x)$ 的图象为:



若 $y = g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 与 $y = k$ 有且仅有 1 个交点，

$\therefore k \leq 0$ 或 $\frac{1}{2} \leq k \leq 1$ ，

故 $k \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 。

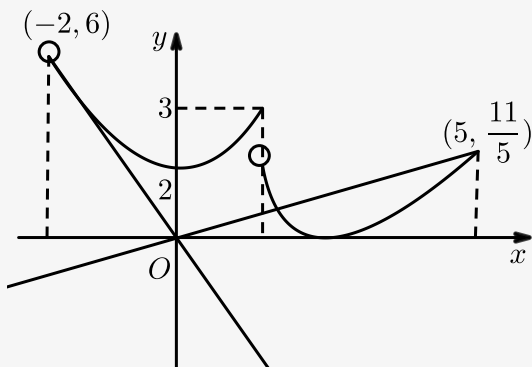
【标注】【知识点】单调性；分段函数；已知零点情况求参数的取值范围；函数零点的概念

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & -2 < x \leq 1 \\ \left|x + \frac{1}{x} - 3\right|, & 1 < x \leq 5 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f(x) - \frac{1}{2}kx = 0$ 有两个不相等的实数根，则实数 k 的取值范围是 ()。

- A. $\left(0, \frac{22}{25}\right] \cup (-6, -4\sqrt{2})$
 B. $\left(0, \frac{11}{25}\right] \cup (-3, -2\sqrt{2})$
 C. $(0, 1] \cup (-3, -2\sqrt{2})$
 D. $(0, 2] \cup (-6, -4\sqrt{2})$

【答案】 A

【解析】 作出函数 $f(x)$ 的图象，



要使关于 x 的方程 $f(x) - \frac{1}{2}kx = 0$ 有两个不相等的实数根，则两函数 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2}kx$ 的图象有两个交点，

当 $k > 0$ ，由图可知， $\frac{1}{2}k \leq \frac{11}{25}$ ，即 $0 < k \leq \frac{22}{25}$ ；

当 $k < 0$ 时，由图可知， $\frac{1}{2}k > \frac{6}{-2}$ ，即 $k > -6$ ；

由 $x^2 - \frac{1}{2}kx + 2 = 0$ 可知, $\Delta = \frac{1}{4}k^2 - 8 > 0$, 解之得 $k > 4\sqrt{2}$ 或 $k < -4\sqrt{2}$, 所以 $-6 < k < -4\sqrt{2}$,
 故选A.

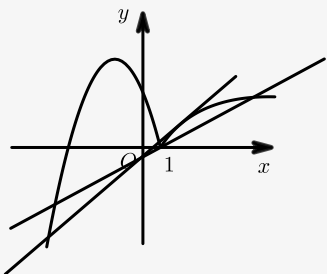
【标注】【知识点】分段函数；已知零点情况求参数的取值范围

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x + 5, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = kx - \frac{1}{2}$ 恰有四个不相等的实数根, 则实数 k 的取值范围是 ().

- A. $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{e}\right)$
 B. $\left[\frac{1}{2}, \sqrt{e}\right)$
 C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right]$
 D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$

【答案】D

【解析】由题知, 函数 $y = f(x)$ 的图象与 $y = kx - \frac{1}{2}$ 的图象有4个不同交点,



直线 $y = kx - \frac{1}{2}$ 过定点 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ 且过 $(1, 0)$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图象与 $y = kx - \frac{1}{2}$ 的图象有3个不同的交点, 此时 $k = \frac{1}{2}$, 设直线 $l: y = kx - \frac{1}{2}$ 与 $y = \ln x (x > 1)$ 切于点 $(x_0, \ln x_0)$, 则过该切点的切线方程为 $y = \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$, 将 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ 代入切线方程, 可得 $x_0 = \sqrt{e}$, 所以切点为 $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right)$, 则切线斜率为 $\frac{\sqrt{e}}{e}$, 所以方程 $f(x) = kx - \frac{1}{2}$ 恰有四个不相等的实数根时, 实数 k 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$.
 故选D.

【标注】【知识点】二次函数的图象及性质；已知零点情况求参数的取值范围；导数的几何意义

17. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 2| + 1, & x > 0 \\ x^2 + 2x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = kx + 2k$ 有四个不同的解, 则实数 k 的取值范围为 ().

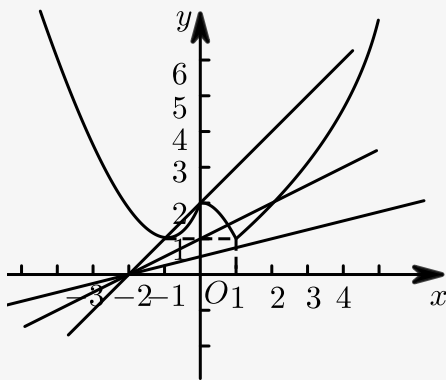
- A. $(-\infty, -2 - 2\sqrt{2}) \cup (\frac{1}{3}, 1)$
 B. $(2\sqrt{2} - 2, 1)$
 C. $(\frac{1}{3}, 1)$
 D. $(\frac{1}{3}, 2\sqrt{2} - 2)$

【答案】 B

【解析】 由题意：原问题可转化为 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 2| + 1, & x > 0 \\ x^2 + 2x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$ 与函数 $g(x) = kx + 2k$ 的图象有四个不同的交点问题，

易知 $g(x) = kx + 2k$ ，恒过定点 $(-2, 0)$ ，

作出函数 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 2| + 1, & x > 0 \\ x^2 + 2x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图象，



由图可知，当直线 $g(x) = kx + 2k$ 过 $(0, 2)$ 时， $k = 1$ ，

当直线 $g(x) = kx + 2k$ 与 $y = x^2 + 2x + 2 (x < 0)$ 相切时，

$x^2 + 2x + 2 = kx + 2k$ ，则 $x^2 + (2 - k)x + 2 - 2k = 0$ ，

$\therefore \Delta = (2 - k)^2 - 4(2 - 2k) = 0$ ，

$\therefore k = -2 + 2\sqrt{2}$ 或 $k = -2 - 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 方程 $f(x) = kx + 2k$ 有四个不同的解，

$\therefore k$ 的取值范围为 $(-2 + 2\sqrt{2}, 1)$ 。

故选 B。

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；函数零点的概念

18. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - \ln(x + 1) & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x + 1 & x > 0 \end{cases}$ ，函数 $g(x) = f(x) - |x - m|$ 在定义域内恰有三个不同的零点，则实数 m 的取值范围是 ()。

- A. $\left(-\frac{5}{4}, \frac{13}{4}\right)$
 B. $\left(1, \frac{13}{4}\right)$
 C. $\left(-1, \frac{13}{4}\right)$
 D. $\left(-\frac{5}{4}, -1\right) \cup \left(1, \frac{13}{4}\right)$

【答案】 D

【解析】 $x \leq 0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 且 $f(x)_{\min} = f(0) = 1$,

$x > 0$ 时, $f(x)$ 对称轴为 $x = 1$, 且 $f(x)_{\max} = f(1) = 2$,

$g(x)$ 的零点即为函数 $f(x)$ 与 $h(x) = |x - m|$ 的交点,

$h(x)$ 与 $f(x)$ 的图象如下图所示, 其中 $h(x)$ 与 x 轴的交点坐标为 $(m, 0)$,

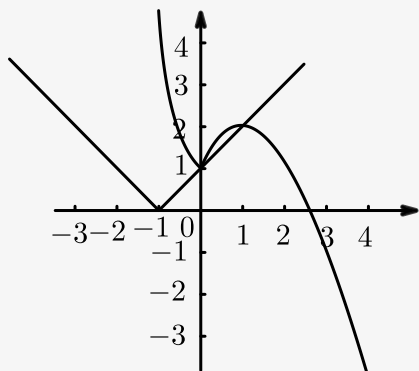
① 另 $m = -1$ 时, $f(x)$ 与 $h(x)$ 交于点 $(0, 1)$,

$$\therefore h(x) = |x + 1|$$

$$\therefore x > 0 \text{ 时, } f(x) - h(x) = -x^2 + x = -x(x - 1),$$

$\therefore f(x)$ 与 $h(x)$ 有 2 个交点 $(0, 1)$ 和 $(1, 2)$, 且 $x < 0$ 时, $f(x) > h(x)$ 恒成立,

$\therefore g(x)$ 只有 2 个零点, 不成立.

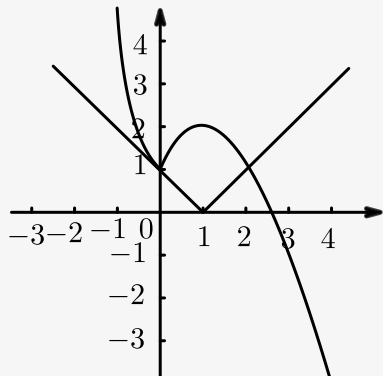


② 当 $m = 1$ 时, $h(x) = |x - 1|$, $x < 0$ 时, $h(x) = 1 - x$, 与 $f(x)$ 相切,

$$x > 0 \text{ 时, } h(x) = x - 1, f(x) - h(x) = -x^2 + x + 2 = (2 - x)(x + 1),$$

$\therefore f(x)$ 与 $h(x)$ 交于点 $(2, 1)$,

$\therefore g(x)$ 只有 2 个零点, 不成立.



③ $m < -1$ 时, $(-\infty, 0]$, $f(x)$ 与 $h(x)$ 必有一个交点,

若 $g(x)$ 有三个零点, 只需 $(0, +\infty)$ 有 2 个零点即可,

$\because x > 0$ 时, $h(x) = x - m$,

$\therefore g(x) = -x^2 + x + 1 + m$,

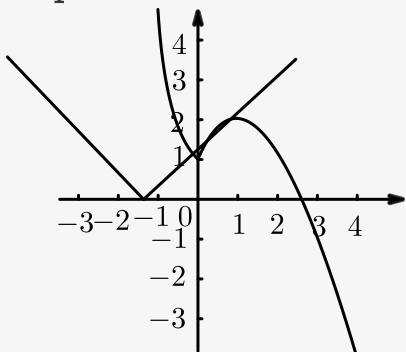
若 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有 2 个零点 x_1, x_2 , 则 $\Delta = 1 + 4(1 + m) = 4m + 5 > 0$,

$\therefore m > -\frac{5}{4}$,

$\therefore x_1 + x_2 = 1 > 0, x_1 x_2 = -(1 + m) > 0$,

$\therefore x_1 > 0, x_2 > 0$,

$\therefore -\frac{5}{4} < m < -1$ 时, $g(x)$ 在定义域内恰有 3 个零点.



④ 若 $m > 1$, 则 $(-\infty, 0]$, $f(x)$ 与 $h(x)$ 必有一个交点,

若 $g(x)$ 有三个零点, 只需 $(0, +\infty)$ 有 2 个零点即可,

1°: 若 $-x^2 + 2x + 1 = 0$, 则 $x = 1 + \sqrt{2}$,

$\therefore 1 < m \leq 1 + \sqrt{2}$ 时, $f(x)$ 与 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 必有 2 个交点,

即 $g(x)$ 在定义域内恰有三个零点,

2°: 若 $m > 1 + \sqrt{2}$, 则 $x \in 1 + \sqrt{2}$ 时, $h(x) = m - x$,

$\therefore g(x) = -x^2 + 3x + 1 - m$, 若 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有 2 个零点 x_1, x_2 ,

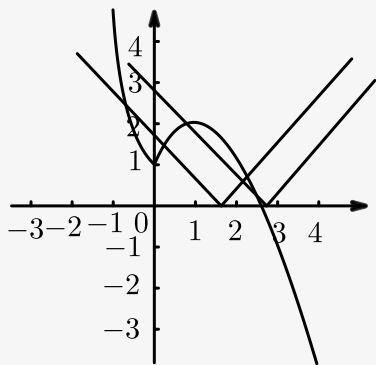
则 $\Delta = 9 + 4(1 - m) = -4m + 13 > 0$,

$\therefore m < \frac{13}{4}$,

$\therefore x_1 + x_2 = 3 > 0, x_1 x_2 = m - 1 > 0$,

$\therefore x_1 > 0, x_2 > 0$,

$1 + \sqrt{2} < m < \frac{13}{4}$ 时, $g(x)$ 在定义域内恰有 3 个零点.



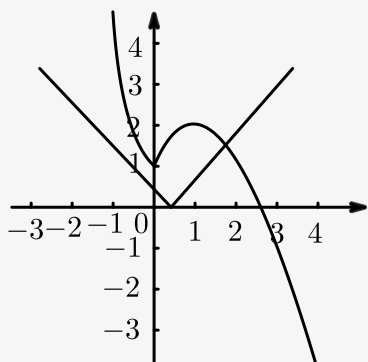
⑤当 $-1 < m < 1$ 时,

$x > 0$ 时, $f(x)$ 与 $h(x)$ 有一个交点,

$x < 0$ 时, $f(x) > h(x)$ 恒成立,

$\therefore g(x)$ 只有 1 个零点, 不成立,

综上所述, $m \in \left(-\frac{5}{4}, -1\right) \cup \left(1, \frac{13}{4}\right)$ 时, $g(x)$ 恰有 3 个零点.



故选 D.

【标注】【知识点】已知零点或根情况求参数范围；解析法；函数零点的概念；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

19. 若函数 $f(x) = |x| + \sqrt{a - x^2} - \sqrt{2} (a > 0)$ 没有零点, 则 a 的取值范围是 ().

A. $(0, 1)$

B. $(0, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

C. $(0, \sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$

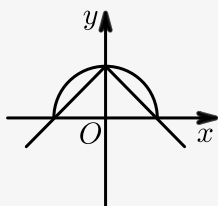
D. $(0, 1) \cup (2, +\infty)$

【答案】 D

【解析】 令 $|x| + \sqrt{a - x^2} - \sqrt{2} = 0$, 得 $\sqrt{a - x^2} = \sqrt{2} - |x|$,

令 $y = \sqrt{a - x^2}$ 是半径为 $\sqrt{a}$, 圆心在原点的圆的上半部分,

$y = \sqrt{2} - |x|$ 以 $(0, \sqrt{2})$ 为端点的折线, 图像如下,



$\therefore$ 圆到直线的距离小于1, 或者圆心到折线的距离大于半径 $\sqrt{2}$,

$\therefore a \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$.

故选D.

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围

【素养】数学运算；直观想象

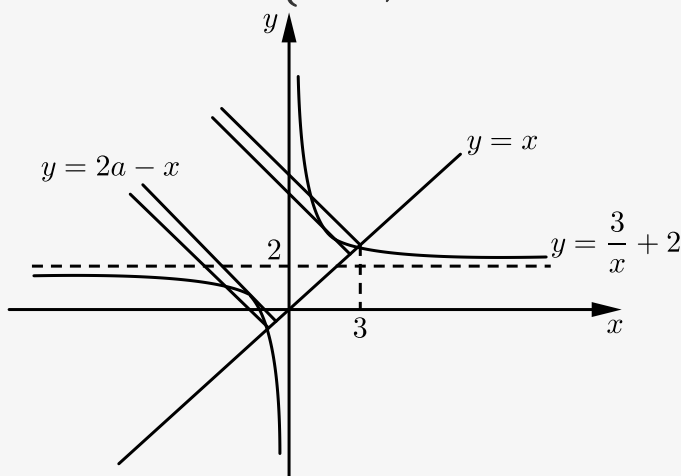
20. 已知函数 $f(x) = |x - a| - \frac{3}{x} + a$ ($a \in \mathbf{R}$), 若方程 $f(x) = 2$ 有且只有三个不同的实数根, 则 a 的取值范围是 ().

- A. $(1 + \sqrt{3}, 3)$
- B. $(-1, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, +\infty)$
- C. $(-\infty, 1 - \sqrt{3})$
- D. $(-\infty, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, 3)$

【答案】 D

【解析】 $f(x) = 2$ 有三个实数根可以转化为方程 $a + |x - a| = \frac{3}{x} + 2$ 有三个根,

令 $y_1 = a + |x - a| = \begin{cases} x, & x \geq a \\ 2a - x, & x < a \end{cases}$, $y_2 = \frac{3}{x} + 2$, 画出函数图象, 如图所示.



因为方程 $x = \frac{3}{x} + 2$ 有两实数根 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$,

由图象可知, 当 $a \leq -1$ 时, 方程 $a + |x - a| = \frac{3}{x} + 2$ 恒有三根;

当 $-1 < a \leq 3$ 时, 方程 $x = \frac{3}{x} + 2$ ($x \geq a$) 只有一个实数根 $x = 3$,

要使方程 $2a - x = \frac{3}{x} + 2 (x < a)$ 有两个实数根，
 则有 $\Delta = 4(1 - a)^2 - 12 > 0 \Rightarrow -1 < a < 1 - \sqrt{3}$ 或 $1 + \sqrt{3} < a < 3$ ；
 当 $a > 3$ ，方程 $a + |x - a| = \frac{3}{x} + 2$ 只有一个根，
 综上可知实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, 3)$ 。
 故选：D。

【标注】【知识点】函数零点的概念；已知零点情况求参数的取值范围；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）