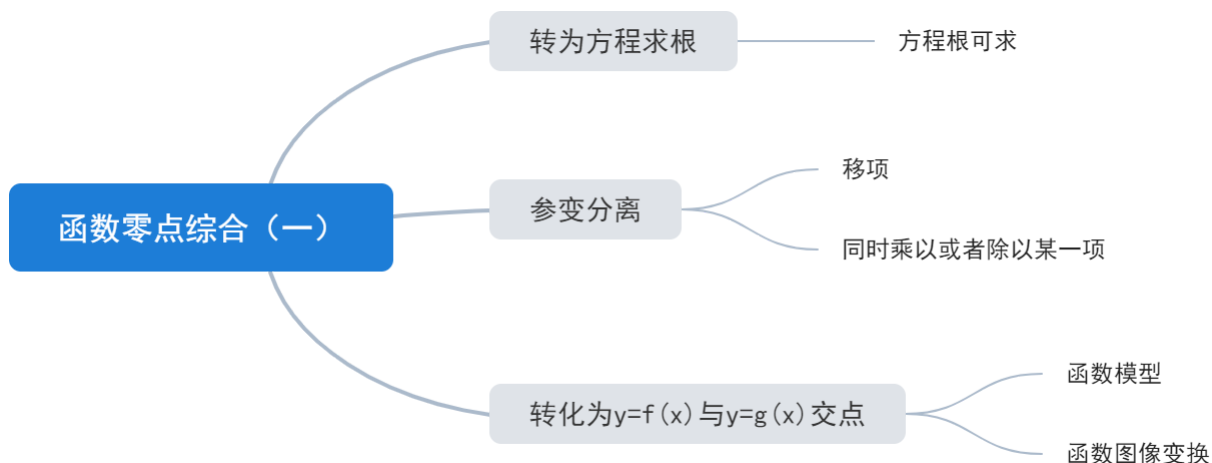


第三讲-函数零点综合（一）

1. 考点梳理



一、转化为方程求根

1. 真题分析

1. 已知 $a > 0$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a, & x \leq 0, \\ -x^2 + 2ax - 2a, & x > 0. \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = ax$ 恰有2个互异的实数解，则 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 (4, 8)

【解析】 当 $x \leq 0$ 时，

$$x^2 + 2ax + a = ax,$$

$$\text{即 } x^2 + ax + a = 0;$$

当 $x > 0$ 时，

$$-x^2 + 2ax - 2a = ax,$$

$$\text{即 } -x^2 + ax - 2a = 0,$$

$$\text{令 } g(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a, & x \leq 0, \\ -x^2 + ax - 2a, & x > 0. \end{cases}$$

恰有两个不相等的实数根，有如下3种情况：

①两根一正一负，则 $\begin{cases} a^2 - 4a = 0, a = 4, \\ a^2 - 8a = 0, a = 8. \end{cases}$ 显然不成立；

- ②两根均为正，则 $\begin{cases} a^2 - 4a < 0 \\ a^2 - 8a > 0 \end{cases}$ ，无解；
- ③两根均为负，则 $\begin{cases} a^2 - 4a > 0 \\ a^2 - 8a < 0 \end{cases}$ ，解得 $a \in (4, 8)$ ；
- 综上所述， $a \in (4, 8)$ 。

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围

备注：2018年高考真题天津卷理科第14题

分析：本题的题型是含参函数已知零点个数求解参数范围，处理函数零点问题的大思路有三种：转化为方程求根、转化为 $y = c$ 与 $y = f(x)$ 图像的交点以及转化为 $y = g(x)$ 与 $y = f(x)$ 图像的交点，观察本题所给函数的模型，是二次函数型的分段函数，二次函数我们是有判断零点个数的公式乃至求解零点的公式，故而我们采取转化为方程求根的思路进行处理。

2. 思路总结

转化为方程求根的解题步骤：

- 1、求解函数在每一段上的零点（函数上不含有参数）或者讨论函数在每一段上的零点情况（函数上含有参数）；
- 2、结合定义域进一步讨论零点个数的情况；
- 3、结合题干给出的零点个数确定参数的范围。

3. 模拟演练

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1 \\ 4(x - a)(x - 2a), & x \geq 1 \end{cases}$ ，若 $f(x)$ 恰有2个零点，则实数 a 的取值范围是 _____。

【答案】 $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup [2, +\infty)$

【解析】 方法一：设 $h(x) = 2^x - a$ ， $g(x) = 4(x - a)(x - 2a)$ ，

若在 $x < 1$ 时， $h(x) = 2^x - a$ 与 x 轴有一个交点，

所以 $a > 0$ ，并且当 $x = 1$ 时， $h(1) = 2 - a > 0$ ，所以 $0 < a < 2$ ，

而函数 $g(x) = 4(x - a)(x - 2a)$ 与 x 轴有一个交点，所以 $2a \geq 1$ ，且 $a < 1$ ，

所以 $\frac{1}{2} \leq a < 1$ ，

若函数 $h(x) = 2^x - a$ 在 $x < 1$ 时，与 x 轴没有交点，

则函数 $g(x) = 4(x - a)(x - 2a)$ 与 x 轴有两个交点，

当 $a \leq 0$ 时， $h(x)$ 与 x 轴无交点， $g(x)$ 与 x 轴无交点，所以不满足题意（舍去），

当 $h(1) = 2 - a \leq 0$ 时, 即 $a \geq 2$ 时, $g(x)$ 与 x 轴的两个交点满足 $x_1 = a, x_2 = 2a$, 都是满足题意的,

综上所述, a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup [2, +\infty)$.

方法二: 当 $a \leq 0$ 时, $f(x) = 2^x - a$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上无零点, $f(x) = 4(x - a)(x - 2a)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上无零点, 不符合题意;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = 2^x - a$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上有一个零点, $f(x) = 4(x - a)(x - 2a)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上无零点, 不符合题意;

当 $\frac{1}{2} \leq a < 1$ 时, $f(x) = 2^x - a$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上有一个零点, $f(x) = 4(x - a)(x - 2a)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上有一个零点, 符合题意;

当 $1 \leq a < 2$ 时, $f(x) = 2^x - a$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上有一个零点, $f(x) = 4(x - a)(x - 2a)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上有两个零点, 不符合题意;

当 $a \geq 2$ 时, $f(x) = 2^x - a$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上无零点, $f(x) = 4(x - a)(x - 2a)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上有两个零点, 符合题意,

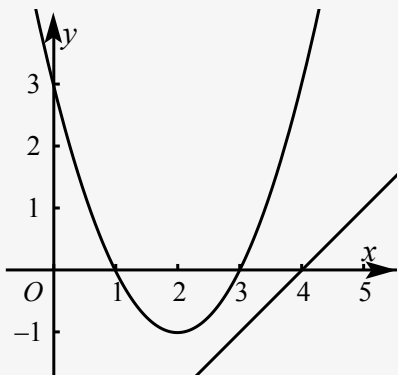
综上, a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup [2, +\infty)$.

【标注】【知识点】函数零点的概念; 已知零点情况求参数的取值范围

3. 已知 $\lambda \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x - 4, & x \geq \lambda \\ x^2 - 4x + 3, & x < \lambda \end{cases}$, 若函数 $f(x)$ 恰有2个零点, 则 λ 的取值范围是_____.

【答案】 $(1, 3] \cup (4, +\infty)$

【解析】 根据题意, 在同一个坐标系中作出函数 $y = x - 4$ 和 $y = x^2 - 4x + 3$ 的图象, 如图:



若函数 $f(x)$ 恰有2个零点, 即函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴有且仅有2个交点,

则 $1 < \lambda \leq 3$ 或 $\lambda > 4$,

即 λ 的取值范围是: $(1, 3] \cup (4, +\infty)$.

故答案为: $(1, 3] \cup (4, +\infty)$.

【标注】【知识点】分段函数；已知零点情况求参数的取值范围；函数零点的概念

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x > a \\ x^2+5x+2, & x \leq a \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = f(x) - 2x$ 恰有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是() .

A. $[-1, 1)$ B. $[-1, 2)$ C. $[-2, 2)$ D. $[0, 2]$

【答案】 B

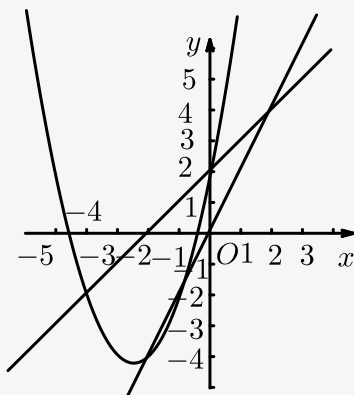
【解析】 函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x > a \\ x^2+5x+2, & x \leq a \end{cases}$

$$x^2 + 5x + 2 = 2x, \text{ 可得 } x^2 + 3x + 2 = 0,$$

解得 $x = -1, x = -2$. $y = x + 2$ 与 $y = 2x$ 的交点为：

$$x = 2, y = 4,$$

函数 $y = f(x)$ 与 $y = 2x$ 的图象如图：



函数 $g(x) = f(x) - 2x$ 恰有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是： $-1 \leq a < 2$.

故选B .

【标注】【知识点】分段函数；函数零点的概念

二、参变分离

1. 真题分析

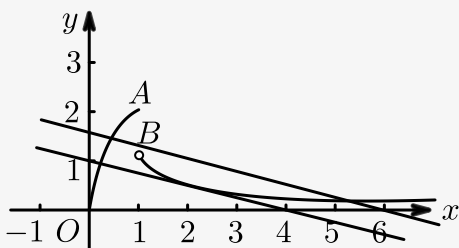
5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f(x) = -\frac{1}{4}x + a$ ($a \in \mathbf{R}$) 恰有两个互异的实数解，则 a 的取值范围为() .

A. $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right]$

- B. $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right]$
 C. $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] \cup \{1\}$
 D. $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] \cup \{1\}$

【答案】D

【解析】作出函数 $f(x)$ 的图象，如图：



当直线 $y = -\frac{1}{4}x + a$ 位于 B 点及其上方且位于 A 点及其下方，

或者直线 $y = -\frac{1}{4}x + a$ 与曲线 $y = \frac{1}{x^2}$ 相切在第一象限时符合要求，

即 $1 \leq -\frac{1}{4} + a \leq 2$ ，即 $\frac{5}{4} \leq a \leq \frac{9}{4}$ ，

或者 $-\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4}$ ，得 $x = 2$ （ $x = -2$ 舍）， $y = \frac{1}{2}$ ，即 $\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \times 2 + a$ ，得 $a = 1$ ，

所以 a 的取值范围是 $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] \cup \{1\}$ ，

故选D。

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

备注：2019年高考真题天津卷文科第8题

分析：本题考察了含参数零点个数问题，结合本题具体函数可以发现参数 a 和含有自变量 x 的项只需要进行移项即可实现分离，这样很容易转成求解 $y = a$ 与 $y = g(x)$ 交点个数的问題，下面需要做的就是画

出函数 $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + 2\sqrt{x}; 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{x}; x > 1 \end{cases}$ 的图像，并且按照从下到上或者从上到下的方向平移水平线

$y = a$ ，在这个过程中判断交点个数以及对应的参数范围。

6. 对实数 a 和 b ，定义运算“ $\otimes$ ”： $a \otimes b = \begin{cases} a, a-b \leq 1 \\ b, a-b > 1 \end{cases}$. 设函数 $f(x) = (x^2 - 2) \otimes (x - x^2)$ ， $x \in \mathbf{R}$.

若函数 $y = f(x) - c$ 的图像与 x 轴恰有两个公共点，则实数 c 的取值范围是（ ）.

- A. $(-\infty, -2] \cup \left(-1, -\frac{3}{4}\right)$
 B. $(-\infty, -2] \cup \left(-1, \frac{3}{2}\right)$

- C. $\left(-1, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$
 D. $\left(-1, -\frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

【答案】 A

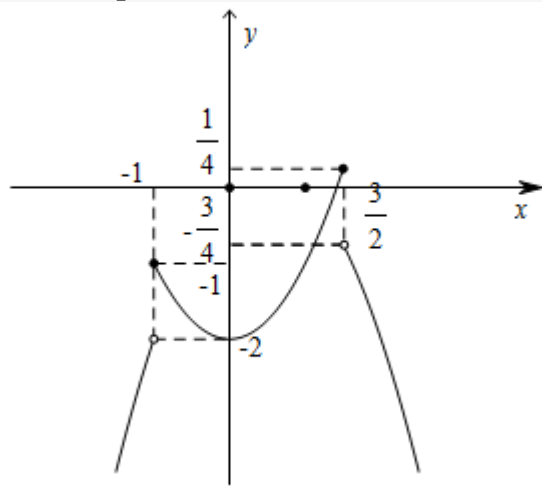
【解析】 由题意可得 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \in [-1, \frac{3}{2}] \\ x - x^2, & x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{3}{2}, +\infty) \end{cases}$ ，图象如图所示：

而函数 $y = f(x) - c$ 图像与 x 轴恰有两个公共点等价于 $f(x)$ 与直线 $y = c$ 有两个交点，

$\therefore$ 实数 c 的取值范围是

$$(-\infty, -2] \cup \left(-1, -\frac{3}{4}\right).$$

故选 A.



【标注】 【知识点】 分段函数

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & x \leq 2 \\ (x - 2)^2, & x > 2 \end{cases}$ ，函数 $g(x) = b - f(2 - x)$ ，其中 $b \in \mathbf{R}$ ，若函数

$y = f(x) - g(x)$ 恰有 4 个零点，则 b 的取值范围是 ().

- A. $\left(\frac{7}{4}, +\infty\right)$ B. $\left(-\infty, \frac{7}{4}\right)$
 C. $\left(0, \frac{7}{4}\right)$ D. $\left(\frac{7}{4}, 2\right)$

【答案】 D

【解析】 $\because g(x) = b - f(2 - x)$,

$$\therefore y = f(x) - g(x) = f(x) - b + f(2 - x),$$

$$\text{由 } f(x) - b + f(2 - x) = 0, \text{ 得 } f(x) + f(2 - x) = b,$$

$$\text{设 } h(x) = f(x) + f(2 - x),$$

$$\text{若 } x \leq 0, \text{ 则 } -x \geq 0, 2 - x \geq 2,$$

$$\text{则 } h(x) = f(x) + f(2 - x) = 2 + x + x^2,$$

$$\text{若 } 0 \leq x \leq 2, \text{ 则 } -2 \leq -x \leq 0, 0 \leq 2 - x \leq 2,$$

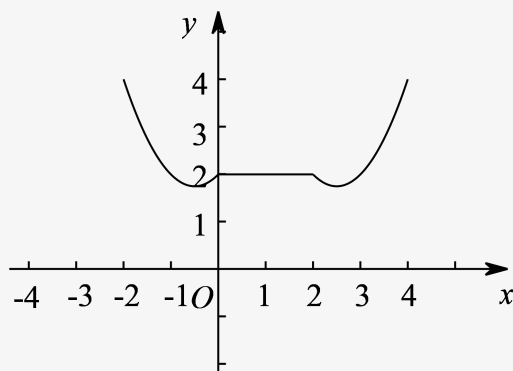
$$\text{则 } h(x) = f(x) + f(2 - x) = 2,$$

$$\text{若 } x > 2, -x < -2, 2 - x < 0,$$

则 $h(x) = f(x) + f(2-x) = x^2 - 5x + 8$.

即 $h(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & x \leq 0 \\ 2, & 0 < x \leq 2 \\ x^2 - 5x + 8, & x > 2 \end{cases}$,

作出函数 $h(x)$ 的图象如图：



当 $x \leq 0$ 时, $h(x) = 2 + x + x^2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$,

当 $x > 2$ 时, $h(x) = x^2 - 5x + 8 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$,

故当 $b = \frac{7}{4}$ 时, $h(x) = b$, 有两个交点 ,

当 $b = 2$ 时, $h(x) = b$, 有无数个交点 ,

由图象知要使函数 $y = f(x) - g(x)$ 恰有 4 个零点 ,

即 $h(x) = b$ 恰有 4 个根 ,

则满足 $\frac{7}{4} < b < 2$,

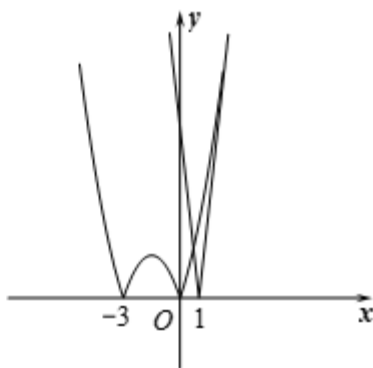
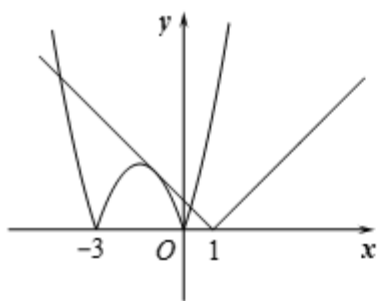
故选 D .

【标注】【知识点】函数零点的概念

8. 已知函数 $f(x) = |x^2 + 3x|$, $x \in \mathbf{R}$. 若方程 $f(x) - a|x - 1| = 0$ 恰有 4 个互异的实数根 , 则实数 a 的取值范围为 _____ .

【答案】 $(0, 1) \cup (9, +\infty)$

【解析】 解 1 : 显然 $a > 0$.



(i) 当 $y = -a(x-1)$ 与 $y = -x^2 - 3x$ 相切时, $a = 1$, 此时 $f(x) - a|x-1| = 0$ 恰有 3 个互异的实数根.

(ii) 当直线 $y = a(x-1)$ 与函数 $y = x^2 + 3x$ 相切时, $a = 9$, 此时 $f(x) - a|x-1| = 0$ 恰有 2 个互异的实数根.

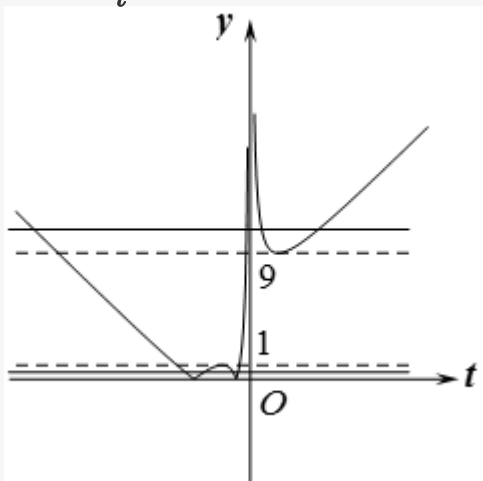
结合图象可知 $0 < a < 1$ 或 $a > 9$.

解2: 显然 $x \neq 1$, 所以 $a = \left| \frac{x^2 + 3x}{x-1} \right|$.

令 $t = x - 1$, 则 $a = \left| t + \frac{4}{t} + 5 \right|$.

因为 $t + \frac{4}{t} \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$,

所以 $t + \frac{4}{t} + 5 \in (-\infty, 1] \cup [9, +\infty)$.



结合图象可得 $0 < a < 1$ 或 $a > 9$.

【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；已知零点情况求参数的取值范围；函数零点的概念

备注：2014年高考真题天津卷理科第14题

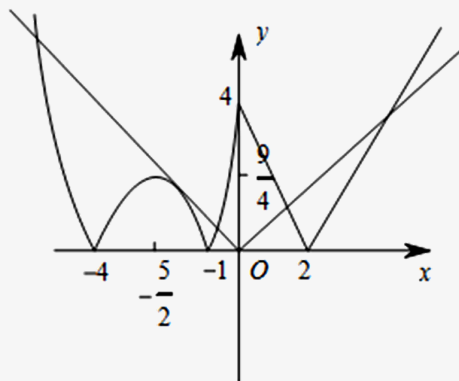
分析：本题考察的含参函数零点个数的问题，结合本题所给函数可以发现只需要同时除以 $|x-1|$ 即可将自变量 x 和参数 a 进行分离，此时需要注意的是需要考虑 $|x-1|$ 是否为零，然后转化为 $y = a$ 与

$y = \left| \frac{x^2 + 3x}{x-1} \right| = \left| x - 1 + \frac{4}{x-1} + 5 \right|$ 的交点个数，需要注意的是 $y = \left| x - 1 + \frac{4}{x-1} + 5 \right|$ 可以看作 $y = x + \frac{4}{x}$ 向上平移5个单位，向右平移1个单位，然后上下翻折得到。

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 + 5x + 4|, & x \leq 0 \\ 2|x - 2|, & x > 0 \end{cases}$ 若函数 $y = f(x) - a|x|$ 恰有4个零点，则实数 a 的取值范围为 _____ .

【答案】 (1, 2)

【解析】 函数 $y = f(x) - a|x|$ 恰有4个零点等价于函数 $y = f(x)$ 和 $y = a|x|$ 的图象恰好有4个公共点. 在同一平面直角坐标系内画出函数 $y = f(x)$ 和 $y = a|x|$ 的图象可知，若满足条件，则 $a > 0$.



当 $a \geq 2$ 时，在 y 轴右侧，两函数图象只有一个公共点，此时在 y 轴左侧，射线

$y = -ax (x \leq 0)$ 与抛物线 $y = -x^2 - 5x - 4 (-4 < x < -1)$ 需相切.

由 $\begin{cases} y = -x^2 - 5x - 4 \\ y = -ax \end{cases}$, 消去 y , 得 $x^2 + (5 - a)x + 4 = 0$.

由 $\Delta = (5 - a)^2 - 16 = 0$, 解得 $a = 1$ 或 $a = 9$.

$a = 1$ 与 $a \geq 2$ 矛盾, $a = 9$ 时, 切点的横坐标为 2, 不符合. 故 $0 < a < 2$, 在 y 轴右侧,

两函数图象有两个公共点, 若满足条件, 则 $-a < -1$, 即 $a > 1$. 故 $1 < a < 2$.

【标注】 【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；函数零点的概念

2. 思路总结

参变分离问题解题步骤：

- 1、通过移项或者同除某一项的方式实现参数和变量的分离，将问题转化为 $c = g(x)$ 的形式；
- 2、画出 $y = g(x)$ 的图像，沿着一个方向平移 $y = c$ ，观察在平移过程中的交点个数和对应的参数范围；
- 3、根据题目所给零点个数确定参数范围；

3. 模拟演练

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |3^x - 1|, & x \leq 1, \\ \lg(x-1), & x > 1, \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - 2k$ 有三个不同的零点, 则实数 k 的取值范围是 ().

A. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

B. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

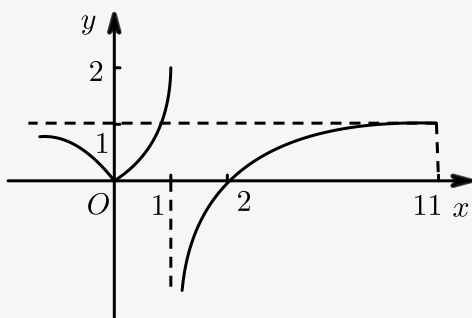
C. $(0, 1)$

D. $(0, 1]$

【答案】A

【解析】 $f(x)$ 图像如下:

若



$g(x) = f(x) - 2k$ 有三个不同的零点,

$\therefore f(x)$ 与 $y = 2k$ 有三个不同的交点,

$\therefore 2k \in (0, 1)$,

$\therefore k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 选A.

【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题(图象与零点综合); 函数零点的概念

11. 对任意实数 a, b 定义运算“ $\odot$ ”: $a \odot b = \begin{cases} b, & a - b \geq 1, \\ a, & a - b < 1, \end{cases}$ 设 $f(x) = (x^2 - 1) \odot (4 + x) + k$, 若函数

$f(x)$ 的图象与 x 轴恰有三个交点, 则 k 的取值范围是 ().

A. $(-2, 1)$

B. $[0, 1]$

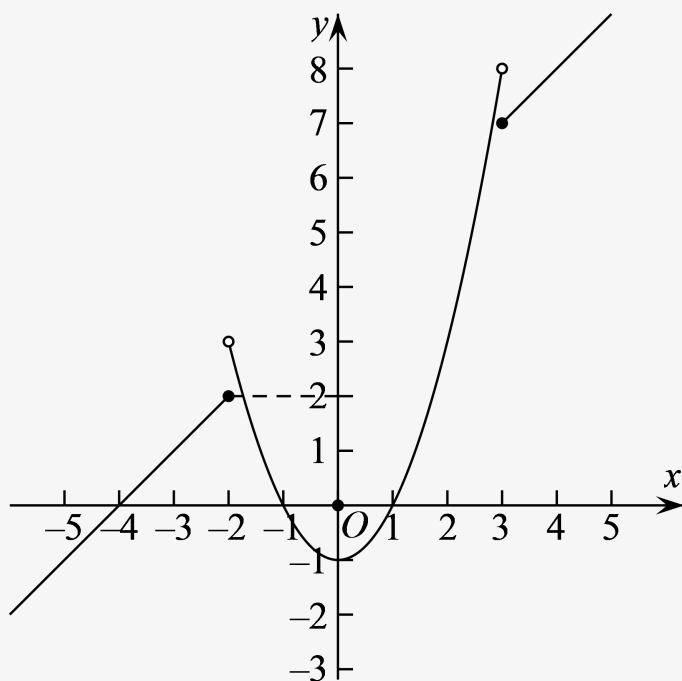
C. $[-2, 0)$

D. $[-2, 1)$

【答案】D

【解析】由题意得 $f(x) = \begin{cases} x + 4 + k, & x \leq -2, x \geq 3 \\ x^2 - 1 + k, & -2 < x < 3 \end{cases}$,

先画出 $g(x) = (x^2 - 1) \odot (4 + x)$ 的图像如图下图所示,



由题意有 $-1 < -k \leq 2$

显然 $k \in [-2, 1)$

故答案选D.

【标注】【知识点】函数零点的概念；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg(x-1)|, & x > 1 \\ \frac{1}{4^{x-1}} - \frac{1}{2}, & x \leq 1 \end{cases}$ ，若函数 $y = |3f(x) - m| - 4$ 有5个零点，则实数 m 的取值范围

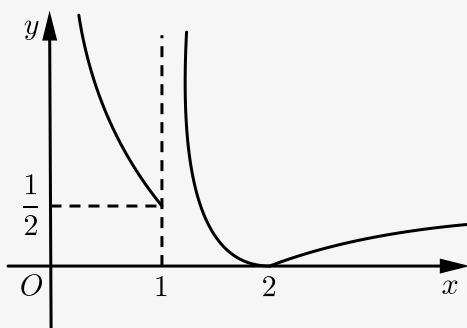
围为 ().

- A. $\left(4, \frac{11}{2}\right)$
C. $\left[-\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$

- B. $\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$
D. $\left[-\frac{5}{2}, 4\right)$

【答案】 A

【解析】 作出函数 $f(x)$ 的图象如下所示，



$$\text{令 } |3f(x) - m| - 4 = 0, \text{ 解得 } f(x) = \frac{m \pm 4}{3}, \text{ 则 } \begin{cases} 0 < \frac{m-4}{3} < \frac{1}{2} \\ \frac{m+4}{3} \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 解得}$$

$$4 < m < \frac{11}{2}.$$

故选A.

【标注】【知识点】函数零点的概念；已知零点情况求参数的取值范围

13. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x(e^x - e^{-x}), & x \geq 0 \\ -x^2 - 2x - 4, & x < 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - ax$ 恰有两个零点, 则实数 a 的取值范围为 ().

- A. $(0, 2)$ B. $(0, 2]$ C. $(2, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 ① $x \geq 0$, $x(e^x - e^{-x} - a) = 0$,
 $e^x - e^{-x}$ 为单调递增函数,
 $e^x \geq 1$, $e^x - e^{-x} \geq 0$ 且单调递增,
 $x = 0$ 为一解,
 $a > 0$ 时, 有一解, 共两解,
 $a < 0$ 时, 无解, 共一解,
 $a = 0$ 时, 有解 $x = 0$, 共一解,
 ② $x < 0$, $-x^2 - 2x - 4 = ax$,
 $a = -x - \frac{4}{x} - 2$
 $\geq 2\sqrt{(-x) \cdot \frac{4}{-x}} - 2 = 2$,
 $a = 2$ 时, $x = -2$ 有一解,
 $a > 2$ 时, 有两解,
 $a < 2$ 时, 无解,
 综上 $a \in (0, 2)$ 时共有两解.

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；零点、交点、根的等价转化；函数零点的概念

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ (其中 e 为自然对数的底数), 若函数 $y = f(x) - ax^2$ 恰有三个零点, 则 ().

- A. $0 < a < \frac{e^2}{4}$ B. $0 < a < \frac{e^2}{2}$

C. $a > \frac{e^2}{4}$

D. $a > \frac{e^2}{2}$

【答案】 C

【解析】 $\because f(0) = 1$,

$\therefore 0$ 不是 $f(x) - ax^2$ 的零点,

$\therefore x \neq 0$ 时, $f(x) - ax^2 = 0$ 等价于 $\frac{f(x)}{x^2} = a$,

$$\text{令 } g(x) = \frac{f(x)}{x^2} = \begin{cases} \frac{e^x}{x^2}, & x > 0 \\ -\frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases},$$

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增且 $g(x) > 0$ 恒成立,

$x \in (0, +\infty)$ 时, $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$,

$$\text{则 } g'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x}{x^3}(x - 2),$$

$\therefore (0, 2)$ 上有 $g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 单调递减, $(2, +\infty)$ 上, 有 $g'(x) > 0$,

$\therefore g(x)$ 单调递增,

$$\therefore g(x)_{\min} = g(2) = \frac{e^2}{4},$$

$$\therefore x \in (0, +\infty) \text{ 时, } g(x) \in \left[\frac{e^2}{4}, +\infty \right),$$

综上所述, $g(x)$ 与 $y = a$ 有三个交点, 则 $a \in \left(\frac{e^2}{4}, +\infty \right)$.

故选C.

【标注】 【知识点】 已知零点或根情况求参数范围; 利用导数确定函数的图象; 函数零点的概念

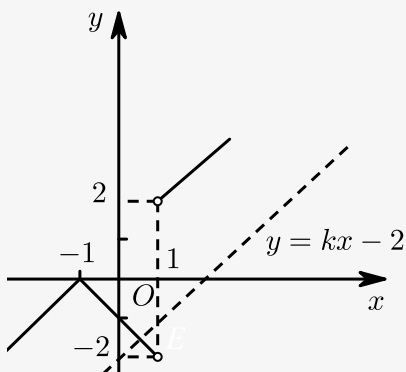
三、 转化为 $y=g(x)$ 与 $y=f(x)$ 求交点

1. 真题分析

15. 已知函数 $y = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$ 的图象与函数 $y = kx - 2$ 的图象恰有两个交点, 则实数 k 的取值范围是_____.

【答案】 $(0, 1) \cup (1, 4)$

【解析】 $y = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \begin{cases} x + 1, & x > 1 \text{ 或 } x < -1 \\ -x - 1, & -1 \leq x < 1 \end{cases}$, 在平面直角坐标系中作出该函数的图象, 如图中实线所示.



根据图象可知，当 $0 < k < 1$ 或 $1 < k < 4$ 时符合题意．

故答案为： $(0, 1) \cup (1, 4)$ ．

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围

备注：2012年高考真题天津卷理科第14题

分析：本题考察的含参函数零点个数的问题，结合本题所给函数我们会发现转化为方程求根或者 $y = c$ 与 $y = g(x)$ 的交点个数都不太好实现，我们采取的思路是转化为 $y = kx - 2$ 与 $y = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$ 的交点个数，其中 $y = kx - 2$ 是一条经过 $(0, -2)$ 且绕着这个点旋转的直线，要画 $y = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$ 的图像，需要用分类讨论的方式去掉绝对值，将其变为 $y = \begin{cases} x + 1; x \leq -1 \text{ 或 } x > 1 \\ -x - 1; -1 < x < 1 \end{cases}$ 的形式，然后即可画出图像，最后只需要观察直线旋转过程中与图像交点的情况及其对应的 k 值范围。

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x| (k \in \mathbf{R})$ 恰有4个零点，则 k 的取值范围是（ ）．
- A. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$
- B. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, 2\sqrt{2})$
- C. $(-\infty, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$
- D. $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

【答案】 D

【解析】 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x| (k \in \mathbf{R})$ 恰有4个零点，即 $f(x) = |kx^2 - 2x|$ 恰有4个不等实根，
又当 $x = 0$ 时，等式显然成立，
 $\therefore x = 0$ 是方程的一个根．
当 $x > 0$ 时，有 $x^3 = |kx^2 - 2x| = |kx - 2| \cdot x$ ，
即 $x^2 = |kx - 2|$ ，
当 $x < 0$ 时，有 $-x = |kx^2 - 2x| = |kx - 2| \cdot (-x)$ ，

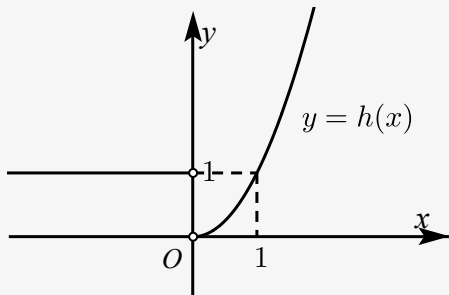
即 $|kx - 2| = 1$.

令 $h(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$, $m(x) = |kx - 2|$,

$\therefore$ 原题转化为 $h(x) = m(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上有 3 个根 ,

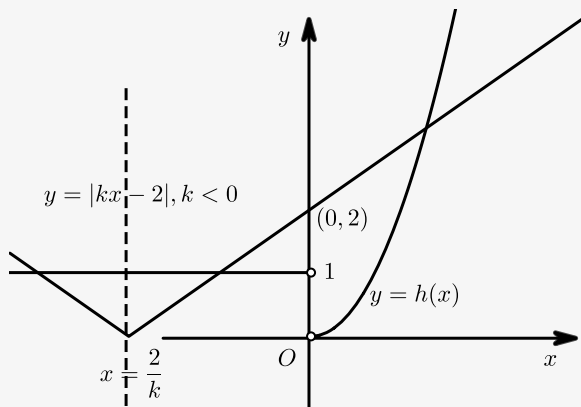
即 $y = h(x)$ 与 $y = m(x)$ 图象在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上有 3 个交点 ,

作出 $y = h(x)$ 图象如下图所示 :



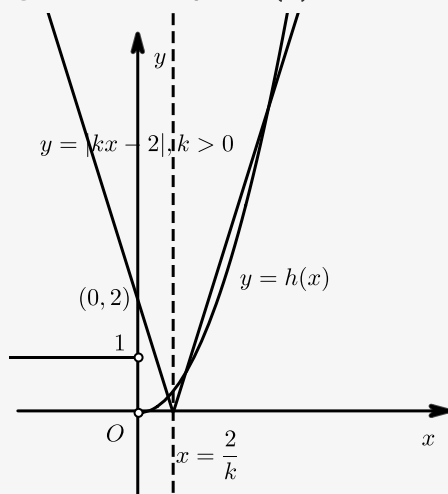
$m(x) = |kx - 2|$ 过定点 $(0, 2)$.

① 当 $k < 0$ 时 , 作出 $y = m(x)$ 草图如下 , 显然符合题意 .



② 当 $k = 0$ 时 , $m(x) = 2$, 显然不符合题意 .

③ 当 $k > 0$ 时 , $y = m(x)$ 草图如下 :



若 $y = m(x)$ 与 $y = h(x)$ 图象有 3 个交点 ,

不妨设为 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$,

由图可知 , $0 < x_1 < \frac{2}{k} < x_2 < x_3$,

当 $x > \frac{2}{k}$ 时, $m(x) = kx - 2$,

由上述可知, $kx - 2 = x^2$ 在 $(\frac{2}{k}, +\infty)$ 上有2根.

令 $t(x) = x^2 - kx + 2$,

$$\text{则有} \begin{cases} \Delta = k^2 - 8 > 0 \\ \frac{k}{2} > \frac{2}{k} \\ t(\frac{2}{k}) = \frac{4}{k^2} > 0 \\ k > 0 \end{cases},$$

解得 $k > 2\sqrt{2}$.

综上: k 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$,

故选D.

【标注】【知识点】零点、交点、根的等价转化;已知零点情况求参数的取值范围;函数零点的概念

备注:2020年高考真题天津卷第9题

分析:本题考察含参函数零点个数问题,我们观察可以发现在 $f(x)$ 和 $|kx^2 - 2x|$ 均含有因式 x ,故而可以断定 $x = 0$ 为函数一个零点,那么问题转化 $h(x) = \begin{cases} x^2, x > 0 \\ 1, x < 0 \end{cases}$ 与 $y = |kx - 2|$ 交点个数,其中 $h(x)$ 的图像很好画, $y = |kx - 2|$ 可以看作 $y = kx - 2$ 向上翻折得到。

17. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a - 3)x + 3a, x < 0 \\ \log_a(x + 1) + 1, x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,且关于 x 的方程

$|f(x)| = 2 - x$ 恰好有两个不相等的实数解,则 a 的取值范围是() .

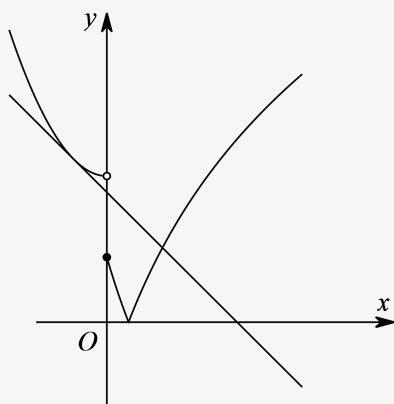
- A. $(0, \frac{2}{3}]$
B. $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$
C. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup \{\frac{3}{4}\}$
D. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup \{\frac{3}{4}\}$

【答案】 C

【解析】 由 $y = \log_a(x + 1) + 1$ 在 $[0, +\infty)$ 上递减,则 $0 < a < 1$,

又由 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,则:

$$\begin{cases} 0^2 + (4a - 3) \cdot 0 + 3a \geq f(0) = 1 \\ \frac{3 - 4a}{2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{3}{4}.$$



由图象可知，在 $[0, +\infty)$ 上， $|f(x)| = 2 - x$ 有且仅有一个解，

故在 $(-\infty, 0)$ 上， $|f(x)| = 2 - x$ 同样有且仅有一个解，

当 $3a > 2$ 即 $a > \frac{2}{3}$ 时，令 $|x^2 + (4a - 3)x + 3a| = 2 - x$ ，

则 $\Delta = (4a - 2)^2 - 4(3a - 2) = 0$ ，解得： $a = \frac{3}{4}$ 或 1 （舍），

当 $1 \leq 3a \leq 2$ 时，由图象可知，符合条件。

综上， $a \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}$ ，

故选C。

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围

备注：2016年高考真题天津卷理科第8题

分析：本题考察含参函数零点个数问题，首先根据函数在定义域上递减得出一个参数 a 的范围，然后我们可以根据 $y = |\log_a(x + 1) + 1| (x \geq 0)$ 与 $y = 2 - x$ 的交点个数判断在 $x \geq 0$ 上的实数解的个数，可以根据方程 $x^2 + (4a - 2)x + 3a - 2 = 0$ 的实根情况，判断在 $x < 0$ 上的实数解情况，最后综合出来参数的取值范围。

2. 思路总结

解题步骤：

- 1、根据题意合理地将其拆解成两个函数，要求就是拆解完的两个函数图像可以画出来；
- 2、画出两个函数的图像，这个过程中需要我们熟悉基础函数模型以及函数图像变换；
- 3、判断交点个数以及相应的参数取值范围；

3. 模拟演练

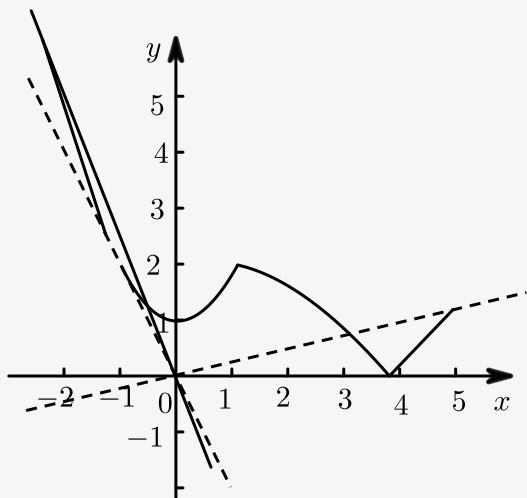
18.

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & -2 \leq x \leq 1 \\ \left| x + \frac{1}{x} - 4 \right|, & 1 < x \leq 5 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f(x) - ax = 0$ 有两个解，则实数 a 的取值范围是()

- A. $\left(0, \frac{6}{25}\right] \cup \left[-\frac{5}{2}, -2\right)$
 B. $\left(0, \frac{6}{25}\right) \cup \left[-\frac{5}{2}, -2\right]$
 C. $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{6}{25}, +\infty\right) \cup \{0, -2\}$
 D. $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{6}{25}, +\infty\right)$

【答案】 A

【解析】 设函数 $y = f(x)$ 和 $y = ax$ ，
作出函数 $f(x)$ 的图象如图：



要使方程 $f(x) - ax = 0$ 有 2 个解，

即函数 $y = f(x)$ 和 $y = ax$ 有 2 个不同的交点，

$$\because f(-2) = 5, f(5) = \left| 5 + \frac{1}{5} - 4 \right| = \frac{6}{5},$$

当 $y = ax$ 经过点 $\left(5, \frac{6}{5}\right)$ 时，此时 $a = \frac{6}{25}$ ，

当过点 $(-2, 5)$ 时，此时 $a = -\frac{5}{2}$ ，

当直线 $y = ax$ 与 $y = x^2 + 1$ 相切时，

$\because y' = 2x$ ，设切点为 (x_0, y_0) ， $-2 \leq x_0 \leq 0$ ，

$$\therefore \frac{x_0^2 + 1}{x_0} = 2x_0,$$

解得 $x_0 = -1$ ，

当 $x_0 = -1$ ，此时 $a = -2$ ，

结合图象，综上所述 a 的取值范围为 $\left[-\frac{5}{2}, -2\right) \cup \left(0, \frac{6}{25}\right]$ ，

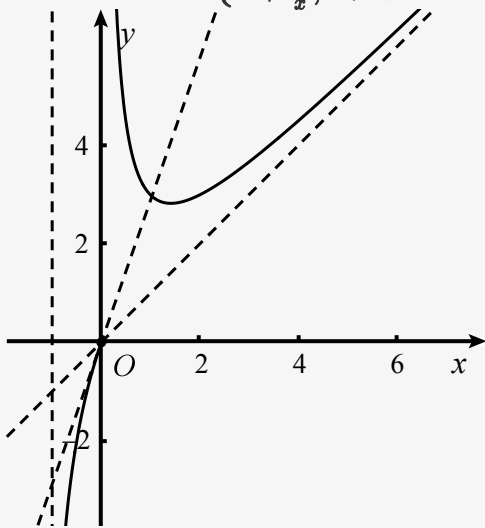
故选：A .

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；函数零点的概念

19. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x+1) + 1, & -1 < x \leq 0, \\ \frac{x^2 + x + 2}{x}, & x > 0. \end{cases}$ 若方程 $f(x) = kx + 1$ 有两个实根，则实数 k 的取值范围是 () .
- A. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ B. $\left(1, \frac{2}{\ln 2}\right]$
C. $(1, 2]$ D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{\ln 2}\right)$

【答案】B

【解析】已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x+1) + 1, & -1 < x \leq 0 \\ \frac{x^2 + x + 2}{x}, & x > 0 \end{cases}$,
若方程 $f(x) = kx + 1$ 有两个实根 ,
可以看作 $g(x) = \begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x+1), & -1 < x \leq 0 \\ x + \frac{2}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 函数 $g(x)$ 与直线 $y = kx$ 有两个交点 .



如图所示 $g(x) = \log_{\sqrt{2}}(x+1)$ 在 $x=0$ 处切线斜率 $k = g'(0) = \frac{1}{\ln \sqrt{2}} = \frac{2}{\ln 2}$, 即

$$k \leq \frac{2}{\ln 2} ,$$

当 $x=0$ 时 , $g(0) = \log_{\sqrt{2}}1 = 0$, 且 $y = k \cdot 0 = 0$, 故 $(0,0)$ 为 $y = kx$ 与

$g(x) = \log_{\sqrt{2}}(x+1)$ 的一个交点 ,

所以直线 $y = kx$ 与 $y(x) = x + \frac{2}{x}$ 须有一个交点 , 即 $kx = x + \frac{2}{x}$ 有一个交点 ,

$$\text{即 } k = 1 + \frac{2}{x^2} > 0 ,$$

$$\text{综上所述 } 1 < k \leq \frac{2}{\ln 2} .$$

故选B .

【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；函数零点的概念

20. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0 \\ x^2 + \frac{3}{2}x, & x \leq 0 \end{cases}$ ，函数 $g(x) = f(x) - kx + 1$ 有四个零点，则实数 k 的取值范围是 _____ .

【答案】 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

【解析】由 $g(x) = f(x) - kx + 1 = 0$ 得 $kx = f(x) + 1$ ，

当 $x = 0$ 时， $0 = f(0) + 1 = 0 + 1$ 不成立，

即 $x \neq 0$ ，

$$\text{则 } k = \frac{f(x) + 1}{x},$$

若 $g(x)$ 有四个零点，则等价于 $k = \frac{f(x) + 1}{x}$ 有四个不同的根，

$$\text{设 } h(x) = \frac{f(x) + 1}{x},$$

$$\text{则当 } x > 0 \text{ 时, } h(x) = \frac{x \ln x - 2x + 1}{x} = \ln x + \frac{1}{x} - 2,$$

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2},$$

则当 $x > 1$ 时， $h'(x) > 0$ ，函数为增函数，

当 $0 < x < 1$ 时， $h'(x) < 0$ ，函数为减函数，

即此时当 $x = 1$ 时， $h(x)$ 取得极小值，

极小值为 $h(1) = -1$ ，

当 $x \rightarrow +\infty$ ， $f(x) \rightarrow +\infty$ ，

$$\text{当 } x \leq 0 \text{ 时, } h(x) = \frac{x^2 + \frac{3}{2}x + 1}{x} = x + \frac{1}{x} + \frac{3}{2},$$

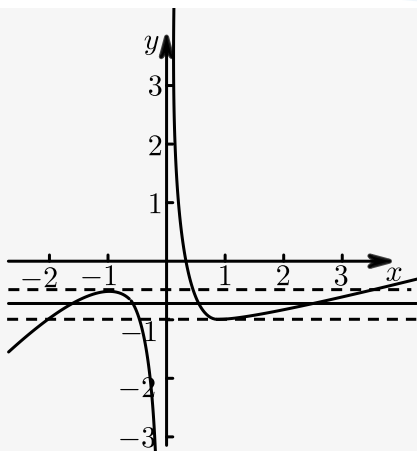
$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2},$$

由 $h'(x) > 0$ 得 $x > 1$ (舍) 或 $x < -1$ ，此时函数为增函数，

由 $h'(x) < 0$ 得 $-1 < x < 0$ ，此时 $h(x)$ 为减函数，

$$\text{即当 } x = -1 \text{ 时, } h(x) \text{ 取得极大值, 极大值为 } h(-1) = -1 - 1 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2},$$

作出函数 $h(x)$ 的图象如图：



要使 $k = \frac{f(x)+1}{x}$ 有四个根，
 则满足 $-1 < k < -\frac{1}{2}$ ，
 即实数 k 的取值范围是 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ 。
 故答案为： $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ 。

【标注】【素养】数学抽象；数学运算

【知识点】求参数范围（含参指对型导函数）

【思想】数形结合思想

21. 已知函数 $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x > 0 \\ \frac{1+x}{1-x}, & x \leq 0 \end{cases}$ ，函数 $g(x) = h(1-x) - mx + m - \frac{1}{2}$ 恰有三个不同的零点，则 m 的取值范围是（ ）。

- A. $[0, 2 - \sqrt{2}) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
 B. $[0, 2 + \sqrt{2}) \cup \left\{\frac{9}{2}\right\}$
 C. $(-2 - \sqrt{2}, 0] \cup \left\{\frac{9}{2}\right\}$
 D. $(-2 + \sqrt{2}, 0] \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

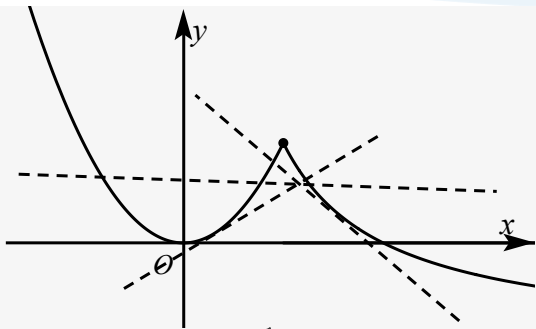
【答案】A

【解析】 $\because$ 函数 $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x > 0 \\ \frac{1+x}{1-x}, & x \leq 0 \end{cases}$ ，
 $\therefore h(1-x) = \begin{cases} x^2, & (x < 1) \\ \frac{2}{x} - 1, & (x \geq 1) \end{cases}$ ，

数 $g(x) = h(1-x) - mx + m - \frac{1}{2}$ 恰有三个不同的零点，

即为 $h(1-x) = mx - m + \frac{1}{2}$ 有三个不同的实根，

作出 $y = h(1-x)$ 和 $y = mx - m + \frac{1}{2}$ 的图象，



直线 $y = mx - m + \frac{1}{2}$ 与曲线 $y = x^2 (x < 1)$ 相切时，设切点为 (m, n) ，

$x^2 - mx + m - \frac{1}{2} = 0$ ，由 $\Delta = 0$ ，可得 $m = 2 - \sqrt{2}$ ，

当 $y = mx - m + \frac{1}{2}$ 与 $y = \frac{2}{x} - 1$ 相切时，两图象恰有三个交点，此时 $m = -\frac{1}{2}$ ，

结合图象可得 $0 \leq m < 2 - \sqrt{2}$ 或 $m = -\frac{1}{2}$ 。

故选 A。

【标注】【知识点】函数零点的概念；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

22. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \frac{2x-4}{x}, & x > 0 \end{cases}$ ，若函数 $F(x) = f(x) - |kx - 1|$ 有且只有 3 个零点，则实数 k 的

取值范围（ ）。

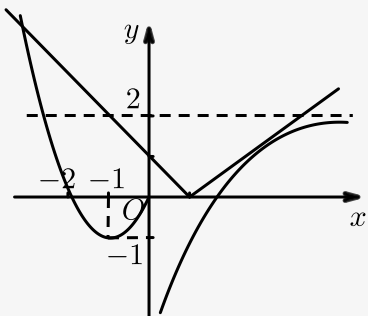
- A. $\left(0, \frac{9}{16}\right)$
 B. $\left(\frac{9}{16}, +\infty\right)$
 C. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
 D. $\left(-\frac{1}{16}, 0\right) \cup \left(0, \frac{9}{16}\right)$

【答案】 D

【解析】 由 $F(x) = f(x) - |kx - 1| = 0$ 得 $f(x) = |kx - 1|$ ，

函数 $F(x) = f(x) - |kx - 1|$ 有且只有 3 个零点等价于 $y = f(x)$ 与 $y = g(x) = |kx - 1|$ 的图象有且只有 3 个交点，

作出函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \frac{2x-4}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 的图象，如图所示。



①当 $k = 0$ 时，显然不符合题意，舍去；

② $k > 0$ 时，如图所示，

当 $x > 0$ 时，需有2个交点，

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx - 1 \\ y = \frac{2x - 4}{x} \end{cases}, \text{可得} kx - 1 = \frac{2x - 4}{x},$$

$$\text{即: } kx^2 - 3x + 4 = 0,$$

$$\text{可得} \begin{cases} \Delta = 9 - 16k > 0 \\ \frac{3}{k} > 0 \\ \frac{4}{k} > 0 \end{cases}, \text{解得} 0 < k < \frac{9}{16};$$

$$\text{③当} k < 0 \text{时}, \begin{cases} y = -kx - 1 \\ y = \frac{2x - 4}{x} \end{cases},$$

$$\text{可得} -kx - 1 = \frac{2x - 4}{x},$$

$$\text{即: } kx^2 + x - 4 = 0,$$

$$\text{可得} \begin{cases} \Delta = 1 + 16k > 0 \\ -\frac{1}{k} > 0 \\ -\frac{4}{k} > 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} -\frac{1}{16} < k < 0.$$

综上，实数 k 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{16}, 0\right) \cup \left(0, \frac{9}{16}\right)$.

故选D.

【标注】【知识点】分段函数；函数零点的概念；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；已知零点情况求参数的取值范围

23. 设 e 为自然对数的底数，已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a, & x < 0 \\ -e^x + ax - e^2, & x \geq 0 \end{cases}$ 恰有两个不同的零点，则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $0 < a < 1$ 或 $a > e^2$

【解析】 方法一：当 $x = 0$ 时， $f(x) = -2 - e^2 \neq 0$,

故 $x = 0$ 不是函数 $f(x)$ 的零点,

当 $x \in (0, +\infty)$ 时,

$$f(x) = 0 \text{ 等价于 } a = \frac{e^x + e^2}{x},$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{e^x + e^2}{x} (x > 0),$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{xe^x - e^x - e^2}{x^2},$$

当 $x < 2$ 时, $g'(x) < 0$,

当 $x = 2$ 时, $g'(x) = 0$,

当 $x > 2$ 时, $g'(x) > 0$,

所以 $g(x) \in [e^2, +\infty)$,

① 当 $0 < a < 1$ 时,

$f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 有两个零点,

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 没有零点,

从而 $a < e^2$, 所以 $0 < a < 1$.

② 当 $a \leq 0$ 或 $a = 1$ 时,

$f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 有一个零点,

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有一个零点, 此时不合题意.

③ 当 $a > 1$ 时,

$f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 有没有零点,

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个零点,

从而 $a \leq e^2$,

综上可得 $0 < a < 1$ 或 $a > e^2$.

方法二: 当 $x \in [0, +\infty)$ 时,

$$f(x) = -e^x + ax - e^2,$$

$$f'(x) = -e^x + a,$$

① 当 $0 < a < 1$ 时,

$f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 有两个零点,

又当 $x \in [0, +\infty)$ 时,

$$f_{\max}(x) = a(\ln a - 1) - e^2 < 0,$$

故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 没有零点,

所以 $0 < a < 1$.

② 当 $a \leq 0$ 或 $a = 1$ 时,

$f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 有一个零点,

又当 $x \in [0, +\infty)$ 时,

$$f'(x) = -e^x + a < 0,$$

$f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减,

故 $f(x) \leq f(0) = -1 - e^2 < 0$, 不合题意.

③ 当 $a > 1$ 时,

$f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 有没有零点,

此时 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上必有两个零点,

当 $x \in [0, +\infty)$ 时,

当 $x < \ln a$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $x = \ln a$ 时, $f'(x) = 0$,

当 $x > \ln a$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f_{\max}(x) = f(\ln a) = -a + a \ln a - e^2$,

要使 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上必有两个零点,

只需满足:

$$f_{\max}(x) = f(\ln a) = -a + a \ln a - e^2 > 0,$$

$$\text{令 } g(t) = t \ln t - t - e^2,$$

$$\text{则 } g'(t) = \ln t,$$

当 $t > 1$ 时, $g'(x) > 0$,

故 $g(t)$ 单调递增,

$$\text{又 } g(e^2) = 0,$$

故 $-a + a \ln a - e^2 > 0$ 即 $g(a) > g(e^2)$,

解得 $a > e^2$,

综上可得 $0 < a < 1$ 或 $a > e^2$.

【标注】【知识点】求参数范围(含参指对型导函数); 分段函数

【思想】分类讨论思想

【素养】数学运算; 逻辑推理

24. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a-3)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x+1) + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 且关于 x 的方程 $|f(x)| = 2 - \frac{x}{3}$ 恰有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

【解析】 由函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减得 $-\frac{4a-3}{2} \geq 0, 0 < a < 1, 3a \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{3}{4}$,
又方程 $|f(x)| = 2 - \frac{x}{3}$ 恰有两个不相等的实数解,

所以 $3a < 2$, $\frac{1}{a} - 1 \leq 6 \Rightarrow \frac{2}{3} > a \geq \frac{1}{3}$, 因此 a 的取值范围是 $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

【标注】【知识点】已知函数单调性求参数范围；已知零点情况求参数的取值范围