

已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2ax, & x \leq 1 \\ (2a-1)x - 3a + 6, & x > 1 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$

B. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

C. $[1, 2]$

D. $[1, +\infty)$

【答案】 C

【解析】 $\because f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2ax, & (x \leq 1) \\ (2a-1)x - 3a + 6, & (x > 1) \end{cases}$,

在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数 ,

$\therefore$ 当 $x \leq 1$ 时 , $f(x) = -x^2 + 2ax$ 要满足在 $(-\infty, 1]$ 上是增函数 ,

$\therefore$ 对称轴 $x = a \geq 1$,

当 $x > 1$ 时 , $f(x) = (2a-1)x - 3a + 6$ 要满足在 $(1, +\infty)$ 上是增函数 ,

$\therefore 2a - 1 > 0$,

$\therefore a > \frac{1}{2}$,

且当 $x = 1$ 时 , $f(x) = 2a - 1$,

$f(x) = (2a-1)x - 3a + 6$ 中 $x = 1$ 时 , $f(x) = 5 - a$,

$\therefore 5 - a \geq 2a - 1$,

$a \leq 2$,

$\therefore 1 \leq a \leq 2$,

综上所述 , 答案选择 : C .

【标注】 【知识点】 分段函数 ; 利用函数单调性解不等式

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - ax - 5 & (x \leq 1) \\ \frac{a}{x} & (x > 1) \end{cases}$ 满足对任意的 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立 , 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $[-3, 0]$

B. $[-3, -2]$

C. $(-\infty, -2]$

D. $(-\infty, 0)$

【答案】 B

【解析】 由题可知 , $f(x)$ 满足对任意 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立 ,

则说明 $f(x)$ 是单调递增函数 , $\therefore \begin{cases} -\frac{a}{2} \geq 1 \\ -1^2 - a - 5 \leq \frac{a}{1} \end{cases}$, $\therefore a \in [-3, -2]$.

故选 B .

【标注】 【知识点】 已知函数单调性求参数范围

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (a-2)x, & x \geq 2 \\ (\frac{1}{2})^x - 1, & x < 2 \end{cases}$ 满足对任意的实数 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围为 ().

A. $(-\infty, 2)$

B. $(-\infty, \frac{13}{8}]$

C. $(-\infty, 2]$

D. $[\frac{13}{8}, 2)$

【答案】 B

【解析】 若对任意的实数 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立,

则函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数,

$$\therefore \text{函数 } f(x) = \begin{cases} (a-2)x, & x \geq 2 \\ (\frac{1}{2})^x - 1, & x < 2 \end{cases}$$

$$\text{故 } \begin{cases} a-2 < 0 \\ 2(a-2) \leq (\frac{1}{2})^2 - 1 \end{cases}$$

$$\text{解得: } a \in (-\infty, \frac{13}{8}].$$

故选B.

【标注】 【知识点】分段函数

2. 复合函数单调性

6. 函数 $y = \lg(x^2 + x - 2)$ 的单调递增区间是 ().

A. $(-\infty, -\frac{1}{2})$

B. $(-\frac{1}{2}, +\infty)$

C. $(-\infty, -2)$

D. $(1, +\infty)$

【答案】 D

【解析】 由 $x^2 + x - 2 > 0$, 可得 $x < -2$ 或 $x > 1$,

$\therefore u = x^2 + x - 2$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 而 $y = \lg u$ 是增函数,

由复合函数同增异减的法则可得,

函数 $y = \lg(x^2 + x - 2)$ 的单调递增区间是 $(1, +\infty)$.

故选D.

【标注】 【知识点】判断复合函数单调性; 复合函数

7. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + x - 6)$ 的单调递增区间是 ().

A. $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$
 C. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

B. $(-\infty, -3)$

D. $\left[-\frac{1}{2}, 2\right)$

【答案】 B

【解析】 由 $x^2 + x - 6 > 0$, 可得 $x > 2$ 或 $x < -3$,
 所以函数的定义域为 $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$,
 又 $t = x^2 + x - 6$ 的单调减区间是 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$,
 $y = \log_{\frac{1}{3}} t$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 ,
 $\therefore$ 函数 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + x - 6)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -3)$.
 故选 B .

【标注】 【知识点】 判断复合函数单调性

8. 函数 $y = \log_{0.5}(x^2 - 2x - 3)$ 的单调增区间为 _____ .

【答案】 $(-\infty, -1)$

【解析】 $\because x^2 - 2x - 3 > 0$,
 $\therefore x > 3$ 或 $x < -1$,
 $\because$ 复合函数同增异减 ,
 $\therefore$ 当 $x^2 - 2x - 3$ 单调递减时 , $\log_{0.5}(x^2 - 2x - 3)$ 单调递增 ,
 $\therefore$ 单调增区间为 $(-\infty, -1)$.

【标注】 【知识点】 判断复合函数单调性 ; 复合函数

9. 关于 x 的函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - ax + 2a)$ 在 $[1, +\infty)$ 上为减函数 , 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $(-\infty, 2]$

B. $(-1, +\infty)$

C. $(-1, 2]$

D. $(-\infty, -1)$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - ax + 2a)$ 在 $[1, +\infty)$ 上为减函数 ,
 则 $t = x^2 - ax + 2a$ 在 $[1, +\infty)$ 为增函数 , 且在 $[1, +\infty)$ 上大于 0 恒成立 ,
 则 $\begin{cases} \frac{a}{2} \leq 1 \\ 1^2 - a + 2a > 0 \end{cases}$, 解得 $-1 < a \leq 2$,
 $\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(-1, 2]$.

故选C.

【标注】【知识点】对数函数的图象及性质；二次函数的图象及性质；判断复合函数单调性

3. 单调性与奇偶性综合

 已知奇偶性求参数范围

10. 若函数 $f(x) = \frac{1}{2^x - 1} + a$ 为奇函数，则 $a =$ _____ .

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $\because f(x)$ 是奇函数，

$$\therefore f(x) = -f(-x),$$

$$\therefore \frac{1}{2^{-x} - 1} + a = -\frac{1}{2^x - 1} - a,$$

$$\therefore \frac{1}{1 - 2^x} + a = \frac{-1}{2^x - 1} - a,$$

$$\text{整理可得, } 2a(1 - 2^x) = 1 - 2^x,$$

$$\therefore 2a = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}.$$

【标注】【知识点】利用函数奇偶性求函数解析式

11. “ $a = 1$ ”是“函数 $f(x) = \frac{e^x}{a} - \frac{a}{e^x}$ 是奇函数”的 () .

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 “函数 $f(x) = \frac{e^x}{a} - \frac{a}{e^x}$ 是奇函数” $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{a} - \frac{a}{e^{-x}} = \frac{1}{ae^x} - ae^x = -\left(\frac{e^x}{a} - \frac{a}{e^x}\right) \Leftrightarrow a = \pm 1$$

故“ $a = 1$ ”是“函数 $f(x) = \frac{e^x}{a} - \frac{a}{e^x}$ 是奇函数”的充分不必要条件，

故选B.

【标注】【素养】数学运算

【素养】逻辑推理

【知识点】充要条件与函数结合

【知识点】利用函数奇偶性求函数解析式

12. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $ab = 0$ ”是“函数 $f(x) = x|x + a| + b$ 是奇函数”的() .

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 由 $ab = 0 \Rightarrow a, b$ 中至少有一个为零 ;

由函数 $f(x) = x|x + a| + b$ 是奇函数 ,

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow -x|-x + a| + b = -x|x + a| - b \Rightarrow x|x - a| - b = x|x + a| + b \Rightarrow a = b = 0$$

, 显然由 a, b 中至少有一个为零 , 不一定能推出 $a = b = 0$,

但由 $a = b = 0$, 一定能推出 $ab = 0$,

故“ $ab = 0$ ”是“函数 $f(x) = x|x + a| + b$ 是奇函数”的必要不充分条件 .

故选B .

【标注】 【知识点】 充要条件与函数结合

 解不等式

13. 设函数 $f(x) = -x^2 + \frac{6}{2 + |x|}$, 则不等式 $f(2x - 3) < f(1)$ 成立的 x 的取值范围是() .

- A. (1, 2)
B. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
C. $(-\infty, 2)$
D. $(2, +\infty)$

【答案】 B

【解析】 $f(x)$ 为偶函数 , 且 $x \geq 0$ 时 , $f(x) = -x^2 + \frac{6}{2 + x}$ 单调递减 .

由 $f(2x - 3) < f(1)$ 得 $f(|2x - 3|) < f(1)$ 得 ,

$\therefore |2x - 3| > 1$, 解得 $x < 1$, 或 $x > 2$.

$\therefore x$ 的取值范围是 $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

故选B .

【标注】 【知识点】 利用函数单调性解不等式

14. 已知函数 $f(x) = 2019^x - 2019^{-x} + \log_{2019}(\sqrt{x^2 + 1} + x) + 2$, 则关于 x 不等式 $f(x) + f(2 - 3x) > 4$ 的解集为 _____ .

【答案】 $(-\infty, 1)$

【解析】 $f(x) = 2019^x - 2019^{-x} + \log_{2019}(\sqrt{x^2 + 1} + x) + 2$,

设 $H(x) = f(x) - 2 = 2019^x - 2019^{-x} + \log_{2019}(\sqrt{x^2 + 1} + x)$,

则 $H(-x) = 2019^{-x} - 2019^x + \log_{2019}(\sqrt{x^2 + 1} - x) = -H(x)$,

故 $H(x)$ 为奇函数, 且单调递增.

$f(x) + f(2 - 3x) > 4$,

$f(x) - 2 > -[f(2 - 3x) - 2]$,

$H(x) > -H(2 - 3x) = H(3x - 2)$,

$\therefore x > 3x - 2$,

$\therefore x < 1$,

故答案为: $(-\infty, 1)$.

【标注】 【知识点】 函数单调性与奇偶性综合问题

15. 已知函数 $f(x) = \ln(1 + x^2) - \frac{1}{1 + |x|}$, 若实数 a 满足 $f(\log_3 a) + f(\log_{\frac{1}{3}} a) \leq 2f(1)$, 则 a 的取值范围 ().

A. $[1, 3]$

B. $(0, \frac{1}{3}]$

C. $(0, 3]$

D. $[\frac{1}{3}, 3]$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \ln(1 + x^2) - \frac{1}{1 + |x|}$,

可知, $f(-x) = \ln[1 + (-x)^2] - \frac{1}{1 + |-x|} = \ln(1 + x^2) - \frac{1}{1 + |x|} = f(x)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

又 $\because f(\log_3 a) + f(\log_{\frac{1}{3}} a) \leq 2f(1)$,

$\therefore f(\log_3 a) + f(\log_3 a) \leq 2f(1)$,

$\therefore f(\log_3 a) \leq f(1)$,

$\therefore f(|\log_3 a|) \leq f(1)$,

$\because f(x) = \ln(1 + x^2) - \frac{1}{1 + |x|}$,

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \ln(1 + x^2) - \frac{1}{1 + x}$,

导数 $f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} + \frac{1}{(1 + x)^2} > 0$,

即有函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又 } f(|\log_3 a|) \leq f(1),$$

$$\therefore |\log_3 a| \leq 1,$$

$$-1 \leq \log_3 a \leq 1,$$

$$\frac{1}{3} \leq a \leq 3,$$

故 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

故选 D.

【标注】【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题；利用函数单调性解不等式

16. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数满足 $f(-x) = f(x)$ ，且对于任意 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ， $x_1 \neq x_2$ 均有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ ，若 $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ， $2f\left(\log_{\frac{1}{8}} x\right) < 1$ ，则 x 的取值范围为 () .

A. $(0, 2)$

B. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2)$

D. $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$

【答案】 D

【解析】 由条件知， $f(x)$ 是偶函数，在 $[0, +\infty)$ 上单调递减，

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}, 2f\left(\log_{\frac{1}{8}} x\right) < 1,$$

$$\therefore f\left(\log_{\frac{1}{8}} x\right) < f\left(-\frac{1}{3}\right),$$

$$\therefore f\left(|\log_{\frac{1}{8}} x|\right) < f\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\therefore |\log_{\frac{1}{8}} x| > \frac{1}{3},$$

$$\text{解得 } 0 < x < \frac{1}{2}, \text{ 或 } x > 2,$$

$$\therefore x \text{ 的取值范围为 } \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty).$$

故选 D.

【标注】【知识点】利用函数单调性解不等式

比较大小

17. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，则三个数 $a = f(-\log_3 13)$ ， $b = f\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}\right)$ ， $c = f(2^{0.6})$ 的大小关系为 () .

A. $a > b > c$

B. $a > c > b$

C. $b > a > c$

D. $c > a > b$

【答案】 C**【解析】** $\because 2 = \log_3 9 < \log_3 13 < \log_3 27 = 3, \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3, 0 < 2^{0.6} < 2,$

$$\text{即: } 0 < 2^{0.6} < \log_3 13 < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8},$$

 $\because f(x)$ 为偶函数,

$$\therefore a = f(\log_3 13),$$

又 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore f\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}\right) > f(\log_3 13) > f(2^{0.6}),$$

$$\text{即 } b > a > c,$$

故选 C.

【标注】 【知识点】 指对幂比较大小；指数函数的图象及性质；对数函数的图象及性质18. 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 对任意两个正数 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 都有 $\frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2}$, 记

$$a = 25f(0.2^2), b = f(1), c = -\log_5 3 \times f\left(\log_{\frac{1}{3}} 5\right), \text{ 则 } a, b, c \text{ 之间的大小关系为 ()}.$$

A. $a > b > c$

B. $b > c > a$

C. $c > b > a$

D. $a > c > b$

【答案】 A**【解析】** 构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则函数单调递减,

$$\because 0.2^2 < 1 < \log_3 5,$$

$$a = 25f(0.2^2), b = f(1), c = -\log_5 3 \times f\left(\log_{\frac{1}{3}} 5\right),$$

$$\therefore a > b > c.$$

故选 A.

【标注】 【素养】 数学运算**【知识点】** 函数单调性与奇偶性综合问题；用单调性比较大小19. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 且在区间 $[1, 2]$ 上是减函数, 令 $a = \ln 2$,

$$b = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}, c = \log_{\frac{1}{2}} 2, \text{ 则 } f(a), f(b), f(c) \text{ 的大小关系为 ()}.$$

A. $f(b) < f(c) < f(a)$

B. $f(a) < f(c) < f(b)$

C. $f(c) < f(b) < f(a)$

D. $f(c) < f(a) < f(b)$

【答案】 C

【解析】 $\because f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且满足 $f(x+2) = -f(x)$ ，

$$\therefore f(x+2) = f(-x),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称；

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 是减函数，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为增函数，且 $f(2) = f(0) = 0$ ，

由题知 $c = -1$ ， $b = 2$ ， $0 < a < 1$ ，

$$\therefore f(c) < f(b) < f(a).$$

故选 C.

【标注】 【知识点】 用单调性比较大小

20. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x \in (0, +\infty)$ 时，都有不等式 $f(x) - xf'(x) < 0$ 成立，

若 $a = f(1)$ ， $b = 2^{0.4}f(2^{-0.4})$ ， $c = \log_4 \frac{1}{2} f\left(\log_4 \frac{1}{16}\right)$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ().

A. $a > c > b$

B. $a > b > c$

C. $b > c > a$

D. $c > a > b$

【答案】 D

【解析】 解： $\because$ 当 $x \in (0, +\infty)$ 时不等式 $f(x) - xf'(x) < 0$ 成立，

$$\therefore \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} > 0,$$

$\therefore g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

$$\text{则 } b = 2^{0.4}f(2^{-0.4}) = \frac{f(2^{-0.4})}{2^{-0.4}} = g(2^{-0.4}),$$

$$c = \log_4 \frac{1}{2} f\left(\log_4 \frac{1}{16}\right) = -\frac{1}{2}f(-2) = \frac{f(-2)}{-2} = g(-2),$$

$$a = f(1) = \frac{f(1)}{1} = g(1),$$

又： $\because$ 函数 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

$\therefore g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，

$$\text{则 } g(-2) = g(2),$$

$$\therefore 0 < 2^{-0.4} < 1,$$

$$\therefore 2^{-0.4} < 1 < 2,$$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，

$$\therefore g(2^{-0.4}) < g(1) < g(2),$$

即 $g(2^{-0.4}) < g(1) < g(-2)$,

则 $b < a < c$,

故选 : D .

【标注】【知识点】导数与奇偶性结合