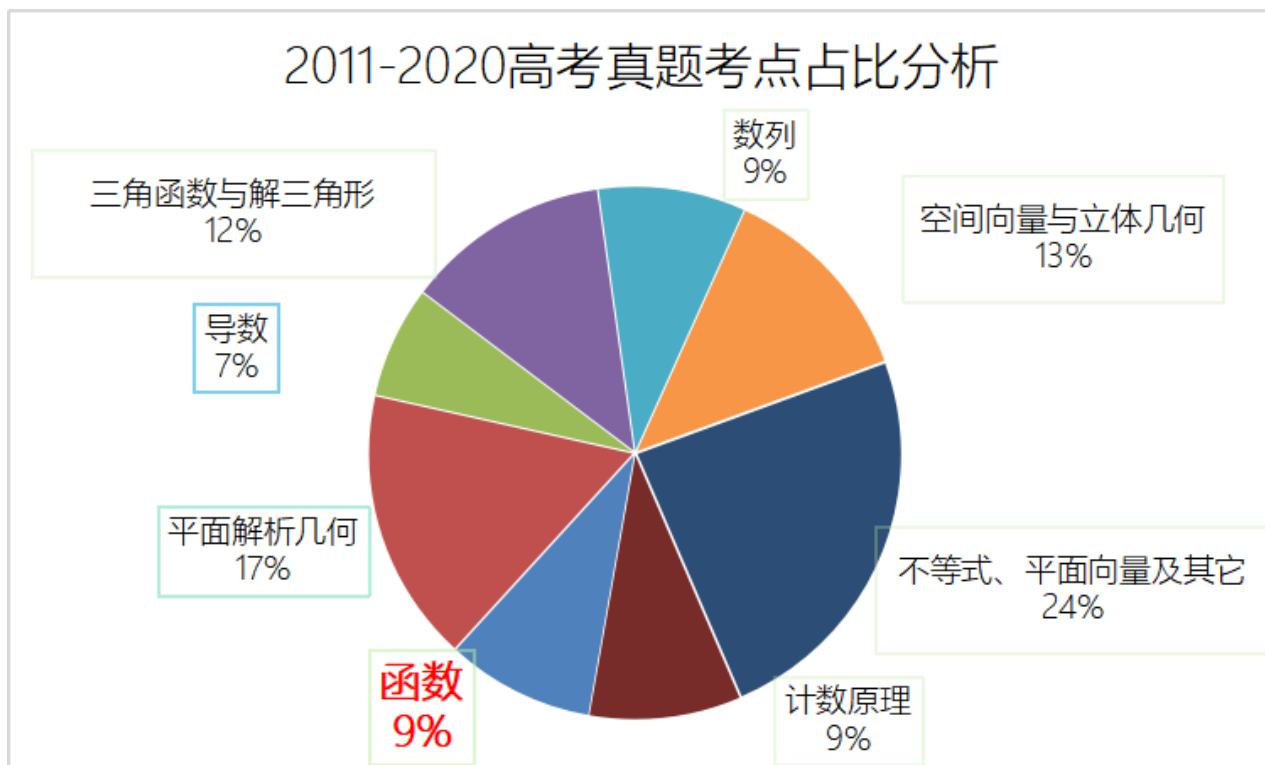


第一讲-函数性质

1. 考情分析

📍 考点占比



📍 考点分析

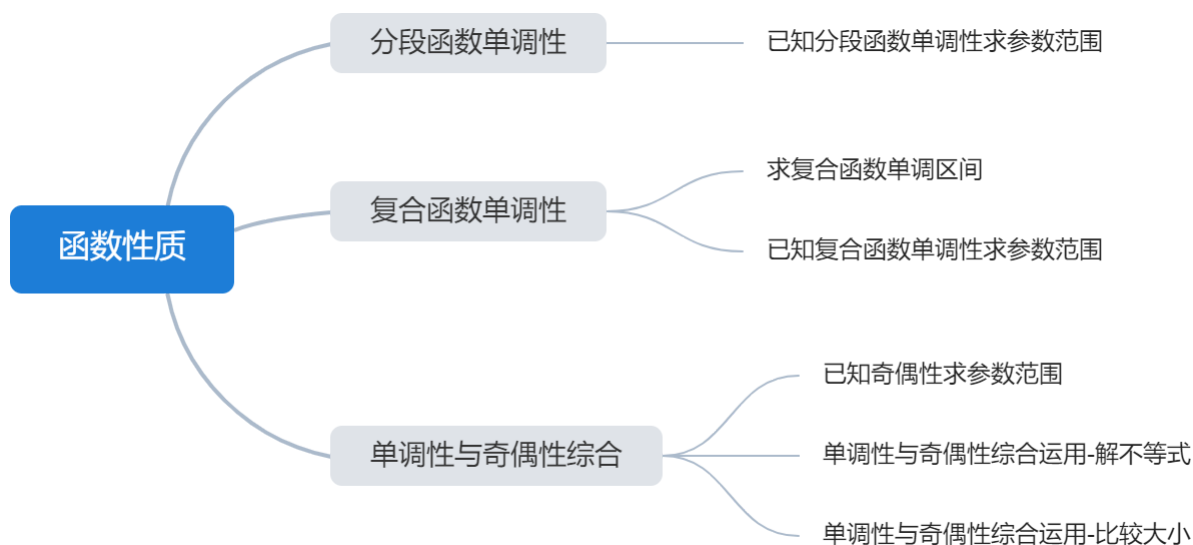
2011-2020高考真题考点分析

年份	考点	题号	分值
2011	指数对数比大小、函数与方程	7、8	10
2012	函数零点、函数与方程	4、14	10
2013	函数零点、函数与方程	7、8	10
2014	复合函数单调性、函数与方程	4、14	10
2015	单调性与奇偶性综合+指数对数比大小、函数与方程	7、8	10
2016	分段函数单调性+函数与方程、单调性与奇偶性综合	8、13	10
2017	单调性与奇偶性综合+指数对数比大小、函数与方程	6、8	10
2018	指数对数比大小、函数与方程	5、14	10
2019	指数对数比大小、函数与方程	6、8	10
2020	函数图像、指数对数比大小、函数与方程	3、6、9	15

考点	年份	考察频次
函数与方程	2011-2020	10
指数对数比大小	2011、2015、2017-2020	6
单调性与奇偶性综合	2015-2017	3
复合函数单调性	2014	1

分段函数单调性	2016	1
函数图像	2020	1
函数零点	2012、2013	2

2. 考点梳理



一、分段函数单调性

1. 真题分析

1. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a-3)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x+1) + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 则 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right]$

【标注】【素养】数学运算

【知识点】单调性

备注：2016年天津高考真题第8题改编

分析：本题主要是在考察分段函数具备单调性的充要条件，常见的出题形式是给出一个含参的分段函数在某个区间是单调函数，求解参数的取值范围，我们需要清楚的是分段函数在定义域内单调的充要条件是同时满足在每一段上面单调且临界位置需要满足相应条件，临界位置需要满足的条件是学生们很容易出现问题的地方，我们要给学生强调到位。

2. 思路总结

分段函数单调性问题求解步骤：

- 1、根据每一段上函数的单调性求解参数范围；例如我们如果说某个分段函数在定义域范围单调递增，那么这个函数首先需要满足的就是在每一段上面单调递增
- 2、考虑临界位置处的函数值大小情况；例如如果我们说函数 $f(x) = \begin{cases} h(x); & x \geq a \\ g(x); & x < a \end{cases}$ 在全体实数上单调递增，则必须有 $h(a) \geq g(a)$

3. 模拟演练

2. 若 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - ax - 5, & x \leq 1 \\ \frac{a}{x}, & x > 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数，则 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $[-3, -2]$

【解析】 当 $x \leq 1$ 时， $x_0 = -\frac{-a}{2 \times (-1)} = -\frac{a}{2} \geq 1$ ，解得 $a \leq -2$ ，

当 $x > 1$ 时， $f'(x) = -a \cdot x^{-2} > 0$ ，得 $a < 0$ ，

又 $\because -1 - a - 5 \leq \frac{a}{1}$ ，解得 $a \geq -3$ 。

综上 $a \in [-3, -2]$ 。

【标注】 【知识点】 利用函数单调性解不等式；二次函数的图象及性质

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^{-x}, & x < -1 \\ (1-2a)x + 3a, & x \geq -1 \end{cases}$ ，对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R} (x_1 \neq x_2)$ ，总有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立，则实数 a 的取值范围是 () .
- A. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ B. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
C. $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R} (x_1 \neq x_2)$ ，总有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立，

$\therefore$ 函数 $f(x) = \begin{cases} a^{-x}, & x < -1 \\ (1-2a)x + 3a, & x \geq -1 \end{cases}$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是增函数,
 $\therefore \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 1-2a > 0 \\ a^1 \leq -1 + 2a + 3a \end{cases}$,
 解得 $\frac{1}{4} \leq a < \frac{1}{2}$.
 故选: C.

【标注】【知识点】分段函数单调性

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x - 3, & x \leq 7 \\ a^{x-6}, & x > 7 \end{cases}$ 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(n) (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $\{a_n\}$ 是递增数列, 那么实数 a 的取值范围是 ().

- A. $(2, 3)$ B. $(1, 3)$
 C. $\left[\frac{9}{4}, 3\right)$ D. $\left(\frac{9}{4}, 3\right)$

【答案】 A

【解析】 $a_n = f(n) \nearrow$.
 $a_n = \begin{cases} (3-a)n - 3, & n \leq 7 \\ a^{n-6}, & n \geq 8 \end{cases} \nearrow$.
 $\therefore a \in (2, 3)$.
 故选 A.

【标注】【知识点】数列单调性问题

二、复合函数单调性

1. 真题分析

5. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4)$ 的单调递增区间是 ().
- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$
 C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2)$

【答案】 D

【解析】 $x^2 - 4 > 0$, 解得 $x < -2$ 或 $x > 2$. 由复合函数的单调性知 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -2)$.

【标注】【知识点】复合函数

备注：2014年天津高考真题第4题

分析：本题主要考察复合函数单调区间的求解，处理这类问题首先需要学生们可以识别什么复合函数，什么是外层函数，什么是内层函数，然后我们需要求解出来函数的定义域，这个点是学生们很容易忽视的地方，最后我们要根据复合函数单调性的判断依据“同增异减”求解单调增减区间即可。

2. 思路总结

复合函数单调性问题求解步骤：

- 1、计算函数定义域；
- 2、明确外层函数的单调性；
- 3、根据整体单调性结合口诀“同增异减”得出内层函数单调性和单调性区间；
- 4、单调区间和定义域取交集；

3. 模拟演练

求解单调区间

6. 函数 $y = \log_2(x^2 - 5x + 6)$ 的单调递减区间为 () .
- A. $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ B. $(3, +\infty)$
- C. $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ D. $(-\infty, 2)$

【答案】 D

【解析】 要使函数有意义，则： $x^2 - 5x + 6 > 0$ ，
即 $x > 3$ 或 $x < 2$.
设 $t = x^2 - 5x + 6$ ，则当 $x > 3$ 时，
函数 $t = x^2 - 5x + 6$ 单调递增，
 $x < 2$ 时，函数 $t = x^2 - 5x + 6$ 单调递减 .
 $\therefore$ 函数 $y = \log_2 t$ 在定义域上为单调递增函数，
 $\therefore$ 根据复合函数“同增异减”原则，
当 $x < 2$ 时， $f(x)$ 单调递减 .
 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的递减区间为 $(-\infty, 2)$.
故选 D .

【标注】【知识点】判断复合函数单调性；对数函数与二次函数复合

7. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 9)$ 的单调递增区间为 () .

- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(3, +\infty)$ D. $(-\infty, -3)$

【答案】D

【解析】由 $x^2 - 9 > 0$ 得 $x > 3$ 或 $x < -3$,

设 $t = x^2 - 9$,

则函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ 为减函数 ,

则要求函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 9)$ 的单调递增区间 ,

即求函数 $t = x^2 - 9$ 的单调递减区间 ,

$\therefore$ 函数 $t = x^2 - 9$ 的单调递减区间是 $(-\infty, -3)$,

$\therefore$ 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 9)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -3)$.

故选D .

【标注】【知识点】对数型复合函数的性质；判断复合函数单调性

求参数范围

8. 若 $y = \log_{\frac{1}{3}}(3x^2 - ax + 5)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递减 , 则 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $(-8, -6]$

【解析】 $\because y = \log_{\frac{1}{3}}(3x^2 - ax + 5)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递减 ,

$\therefore y = 3x^2 - ax + 5$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递增 ,

$$\therefore \begin{cases} 3 + a + 5 > 0 \\ \frac{a}{6} \leq -1 \end{cases} ,$$

解得 $-8 < a \leq -6$, 即 $a \in (-8, -6]$,

故答案为 : $(-8, -6]$.

【标注】【知识点】复合函数；判断复合函数单调性

9. 已知函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - ax + a)$ 在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上是减函数 , 则 a 的取值范围是 () .

- A. $[2\sqrt{2}, 4)$ B. $[2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 2]$
C. $(-\infty, 2\sqrt{2}]$ D. $[2\sqrt{2}, +\infty)$

【答案】 C

【解析】 由同增异减可得 $x^2 - ax + a$ 在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 为单调增函数，

$$x_{\text{对}} = -\frac{-a}{2 \times 1} = \frac{a}{2}, \text{ 则 } \frac{a}{2} \leq \sqrt{2}, \text{ 即 } a \leq 2\sqrt{2}.$$

$\therefore$ 选C.

【标注】 【知识点】 已知函数单调性求参数范围；判断复合函数单调性

三、 单调性与奇偶性综合

1. 真题分析

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增．若实数 a 满足

$$f(2^{|a-1|}) > f(-\sqrt{2}), \text{ 则 } a \text{ 的取值范围是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

【解析】 $\because f(x)$ 是偶函数，且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，

$$\therefore f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递减}, f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}),$$

$$\therefore f(2^{|a-1|}) > f(\sqrt{2}),$$

$$\therefore 2^{|a-1|} < \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}},$$

$$\therefore |a-1| < \frac{1}{2}, \text{ 即 } -\frac{1}{2} < a-1 < \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}.$$

【标注】 【知识点】 单调性

备注：2016年天津高考真题第13题

分析：本题主要考察根据函数的单调性和奇偶性求解不等式，本题所给函数为偶函数而且在 $(-\infty, 0)$ 上为单调增函数，根据对称性可以大致画出函数走势，通过走势可以发现应该是距离对称轴 y 轴越近函数值越大，即 $|x_1| < |x_2| \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ，进而求解出变量范围。

11. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数， $g(x) = xf(x)$ ．若 $a = g(-\log_2 5.1)$ ， $b = g(2^{0.8})$ ， $c = g(3)$ ，则 a ， b ， c 的大小关系为（ ）．

A. $a < b < c$

B. $c < b < a$

C. $b < a < c$

D. $b < c < a$

【答案】 C

【解析】 因为函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以当 $x \geq 0$ 时， $f(x) \geq f(0) = 0$ ，又 $g(x) = xf(x)$ ，则 $g(-x) = -xf(-x) = xf(x) = g(x)$ ， $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 的偶函数，又 $g'(x) = f(x) + xf'(x) \geq 0$ ， $x \in [0, +\infty)$ 恒成立，则 $g(x)$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上单调递增，且 $0 < 2^{0.8} < 2 < \log_2 5.1 < 3$ ，则 $g(2^{0.8}) < g(\log_2 5.1) = g(-\log_2 5.1) < g(3)$ ，即 $b < a < c$ 。
故选 C。

【标注】【素养】数学运算

【知识点】 用单调性比较大小

【知识点】 函数单调性与奇偶性综合问题

【知识点】 实数指数幂运算

备注：2017年天津高考真题第6题

分析：本题主要考察根据函数的单调性和奇偶性比较大小，首先根据 $f(x)$ 为奇函数以及奇偶性的性质可以判断出来 $g(x)$ 为偶函数，然后根据 $f(x)$ 为增函数以及单调性的性质判断出来 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数，进而可以画出 $g(x)$ 的走势。通过走势可以判断此时应该是距离对称轴越近函数值越小，即 $|x_1| < |x_2| \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ，最后比较绝对值的大小即可判断函数值的大小。

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = 2^{|x-m|} - 1$ (m 为实数) 为偶函数，记 $a = f(\log_{0.5} 3)$ ， $b = f(\log_2 5)$ ， $c = f(2m)$ ，则 a 、 b 、 c 的大小关系为 ()。
- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

【答案】 C

【解析】 由 $f(x) = 2^{|x-m|} - 1$ 是偶函数，得 $m = 0$ ，
则 $f(x) = 2^{|x|} - 1$ 。
当 $x \in [0, +\infty)$ 时， $f(x) = 2^x - 1$ 递增，
又 $a = f(\log_{0.5} 3) = f(|\log_{0.5} 3|) = f(\log_2 3)$ ， $c = f(0)$ ，
且 $0 < \log_2 3 < \log_2 5$ ，
则 $f(0) < f(\log_2 3) < f(\log_2 5)$ ，
即 $c < a < b$ 。
故选 C。

【标注】【知识点】对数函数的概念

备注：2015年天津高考真题第7题

2. 思路总结

单调性与奇偶性综合问题求解步骤：

1、判断函数的单调性与奇偶性；此处需要明确的是有的问题给的是函数解析式，需要我们判断这个函数的单调性和奇偶性，有的问题给的导数相关不等式，需要我们结合导数判断单调性，有的问题给的是对称性，需要进行转化

2、如果是求解不等式的问题需要我们利用奇偶性或者题目给的函数值化简成

$f(x_1) < f(x_2)$ 或者 $f(x_1) > f(x_2)$ 的形式，然后借助单调性得到

$x_1 < x_2$ 或者 $x_1 > x_2$ 或者 $|x_1| > |x_2|$ 或者 $|x_1| < |x_2|$ 的形式进行求解；如果是比较大小，需要判断题目给的数值的大小关系或者这些数值绝对值的大小关系，其中如果是偶函数需要加绝对值，奇函数则不需要。

3. 模拟演练

已知奇偶性求参数值

13. 若函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a + x^2})$ 为偶函数，则 $a =$ _____ .

【答案】 1

【解析】 $\because f(x)$ 为偶函数，

$$\therefore f(-x) - f(x) = 0 \text{ 恒成立，}$$

$$\therefore -x \ln(-x + \sqrt{a + x^2}) - x \ln(x + \sqrt{a + x^2}) = 0 \text{ 恒成立，}$$

$$\therefore x \ln a = 0 \text{ 恒成立，}$$

$$\therefore \ln a = 0, \text{ 即 } a = 1.$$

【标注】 【知识点】函数奇偶性的运算

【素养】 数学运算

14. 若 $f(x) = \frac{k - 2^x}{1 + k \cdot 2^x}$ 为奇函数，则 k 的值为 _____ .

【答案】 ± 1

【解析】 $f(x) = -f(-x)$ ，

$$\begin{aligned} \therefore \frac{k - 2^x}{x + k \cdot 2^x - 1} &= -\frac{k - 2^{-x}}{1 + k \cdot 2^{-x}} \\ &= -\frac{2^x + k}{1 - k \cdot 2^x} \\ &= \frac{2^x + k}{2^x + k}, \end{aligned}$$

$$\therefore (k - 2^x)(2^x + k) = (1 + k \cdot 2^x)(1 + k \cdot 2^x)$$

$$k^2 - 2^{2x} = 1 - k^2 \cdot 2^{2x},$$

解得 $k = \pm 1$.

【标注】【知识点】函数奇偶性的运算

15. 若函数 $f(x) = -x - \log_2 \frac{2+ax}{2-x}$ 为奇函数, 则 $a =$ _____ .

【答案】 1

【解析】 略 .

【标注】【知识点】利用函数奇偶性求函数解析式

【知识点】对数的概念及其运算

【素养】数学运算

求解不等式

16. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 若实数 a 满足

$$f(\log_2 a) + f\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right) \leq 2f(1),$$

则 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

【解析】 因为 $\log_{\frac{1}{2}} a = -\log_2 a$, 且 $f(x)$ 是偶函数, 所以

$$f(\log_2 a) + f(\log_{\frac{1}{2}} a) = 2f(\log_2 a) = 2f(|\log_2 a|) \leq 2f(1), \text{ 即 } f(|\log_2 a|) \leq f(1),$$

又函数在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $0 \leq |\log_2 a| \leq 1$, 即 $-1 \leq \log_2 a \leq 1$, 解得 $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$.

【标注】【知识点】利用函数单调性解不等式

17. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 且 $f(1) = 0$, 若实数 a 满足

$$f(\log_5 a) \geq f\left(\log_{\frac{1}{5}} a\right),$$

则实数 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $\left(0, \frac{1}{5}\right] \cup [1, 5]$

【解析】 $f(x)$ 为奇函数,

$$\therefore f(1) = -f(-1) = 0, \text{ 且 } f(\log_5 a) = -f\left(\log_{\frac{1}{5}} a\right),$$

$$\therefore \text{而由 } f(\log_5 a) \geq f\left(\log_{\frac{1}{5}} a\right), \text{ 可以得到 } f(\log_5 a) \geq 0,$$

则 $\log_5 a \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$,

$\therefore a \in \left(0, \frac{1}{5}\right] \cup [1, 5]$.

故答案为: $\left(0, \frac{1}{5}\right] \cup [1, 5]$.

【标注】【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题

18. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \ln(\sqrt{1+x^2} + x), & x \geq 0 \\ 3x^2 + \ln(\sqrt{1+x^2} - x), & x < 0 \end{cases}$, 若 $f(x-1) < f(2x+1)$, 则 x 的取值范围为 _____ .

【答案】 $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

【解析】 若 $x > 0$, 则 $-x < 0$,

$f(-x) = 3(-x)^2 + \ln(\sqrt{1+(-x)^2} + x) = 3x^2 + \ln(\sqrt{1+x^2} + x) = f(x)$ 同理可得, $x < 0$ 时, $f(-x) = f(x)$, 且 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 是偶函数. 因为当 $x > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增, 所以不等式 $f(x-1) < f(2x+1)$ 等价于 $|x-1| < |2x+1|$, 整理得 $x(x+2) > 0$, 解得 $x > 0$ 或 $x < -2$.

【标注】【知识点】单调性; 函数单调性与奇偶性综合问题

19. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$, 满足 $f(x) > 1$, $y = f(x) - 3$ 的奇函数, 且 $f(x) + f'(x) > 1$, 则不等式 $\ln(f(x) - 1) > \ln 2 - x$ 的解集为 () .
- A. $(1, +\infty)$
B. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
C. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
D. $(0, +\infty)$

【答案】 D

【解析】 $\because f(x) - 3$ 为奇函数,

$\therefore f(0) - 3 = 0$ 即 $f(0) = 3$.

令 $g(x) = e^x f(x) - e^x$,

$\therefore g'(x) = e^x [f(x) + f'(x) - 1] > 0$.

$\therefore g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$\ln(f(x) - 1) > \ln 2 - x$,

$$\text{即} \ln(f(x) - 1) > \ln \frac{2}{e^x},$$

$$\therefore f(x) - \frac{2}{e^x} > 1,$$

$$e^x f(x) - e^x > 2,$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } g(0) = e^0 f(x) - e^0 = 2,$$

故不等式 $\ln(f(x) - 1) > \ln 2 - x$ 的解集为

综上 $(0, +\infty)$.

故选 D.

【标注】【知识点】导数与单调性

🗯 比较大小

20. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-|x-m|} + 5$ 为偶函数, 记 $a = f(\log_{0.5} 3)$, $b = f(\log_2 5)$,

$c = f(2m - 2)$, 则 ().

A. $a < c < b$

B. $c < b < a$

C. $c < a < b$

D. $a < b < c$

【答案】A

【解析】 $\because f(x)$ 是偶函数,

$$\therefore f(-x) = f(x),$$

$$\therefore m = 0,$$

$$\text{故 } f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^{|x|} + 5,$$

当 $x > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 单调增.

$$f(\log_{0.5} 3) = f(\log_2 3) < f(2) < f(\log_2 5),$$

$$\therefore a < c < b.$$

故选 A.

【标注】【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题

21. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 对任意两个不相等的正数 x_1, x_2 , 都有 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$

, 记 $a = \frac{f(4.1^{0.2})}{4.1^{0.2}}$, $b = \frac{f(0.4)^{2.1}}{0.4^{2.1}}$, $c = \frac{f(\log_{0.2} 4.1)}{\log_{0.2} 4.1}$, 则 ().

A. $a < c < b$

B. $a < b < c$

C. $c < b < a$

D. $b < c < a$

【答案】A

【解析】不妨设： $x_1 > x_2 > 0$ ，由题意可得：

$$x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2) < 0, x_2 f(x_1) < x_1 f(x_2), \frac{f(x_1)}{x_1} < \frac{f(x_2)}{x_2},$$

$$\text{同理，当 } 0 < x_1 < x_2 \text{ 时有 } \frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2},$$

据此可得函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

且函数 $g(x)$ 是偶函数，

$$\text{因此 } a = \frac{f(4.1^{0.2})}{4.1^{0.2}} = g(4.1^{0.2}) < g(1),$$

$$b = \frac{f(0.4^{2.1})}{0.4^{2.1}} = g(0.4^{2.1}) > g(0.4^2) > g(0.5),$$

$$c = \frac{f(\log_{0.2} 4.1)}{\log_{0.2} 4.1} = g(\log_{0.2} 4.1) = g(\log_5 4.1) \in \left(g(1), g\left(\frac{1}{2}\right) \right),$$

即 $a < c < b$ 。

故选 A。

【标注】【知识点】用单调性比较大小

22. 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(-\pi, \pi)$ ，且函数 $y = f(x+2)$ 的图象关于直线 $x = -2$ 对称，当

$x \in (0, \pi)$ 时， $f(x) = \pi \ln x - f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin x$ （其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数），若 $a = f(\log_{\pi} 3)$ ，

$b = f\left(\log_{\frac{1}{3}} 9\right)$ ， $c = f\left(\pi^{\frac{1}{3}}\right)$ ，则 a, b, c 的大小关系是（ ）。

A. $b > a > c$

B. $a > b > c$

C. $c > b > a$

D. $b > c > a$

【答案】D

【解析】函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(-\pi, \pi)$ ，且函数 $y = f(x+2)$ 的图象关于直线 $x = -2$ 对称，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数。

当 $x \in (0, \pi)$ 时， $f(x) = \pi \ln x - f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin x$ （其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数），

$$f'(x) = \frac{\pi}{x} - f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos x,$$

$$\text{令 } x = \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2,$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\pi}{x} - 2 \cos x,$$

$$\text{当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 时, } \frac{\pi}{x} \geq 2, 2 \cos x \leq 2,$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\pi}{x} - 2 \cos x > 0.$$

$$\text{当 } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ 时, } \frac{\pi}{x} > 0, 2 \cos x \leq 0,$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\pi}{x} - 2 \cos x > 0.$$

$$\therefore x \in (0, \pi) \text{ 时, } f'(x) = \frac{\pi}{x} - 2 \cos x > 0.$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $x \in (0, \pi)$ 时单调递增。

$$\because a = f(\log_{\pi} 3), b = f\left(\log_{\frac{1}{3}} 9\right) = f(-2) = f(2), c = f\left(\pi^{\frac{1}{3}}\right),$$

$$\because 0 < \log_{\pi} 3 < 1 < \pi^{\frac{1}{3}} < 2,$$

$$\therefore a < c < b.$$

$$\text{即 } b > c > a.$$

故选D.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

23. 已知函数 $f(x) = e^{|x|} + 2\sin^2 \frac{x}{2} - 1$, $a = f\left(\log_{\frac{1}{5}} 3\right)$, $b = f(-0.4^{-0.5})$, $c = f(3^{\log_3 3.1})$, 则 a, b, c 的大小关系 ().

A. $a > c > b$

B. $b > c > a$

C. $c > b > a$

D. $a > b > c$

【答案】 C

【解析】 $\because f(x) = e^{|x|} + 2\sin^2 \frac{x}{2} - 1,$

$$\therefore f(-x) = e^{|-x|} + 2\sin^2\left(-\frac{x}{2}\right) = e^{|x|} + 2\sin^2 \frac{x}{2} - 1 = f(x),$$

故 $f(x)$ 是偶函数,

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) = e^x + 2\sin^2 \frac{x}{2} - 1,$$

$$f'(x) = e^x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$= e^x + \sin x,$$

$$\because e^x > e^0 = 1, \sin x \in (-1, 1),$$

$$\therefore f'(x) > 0, \text{ 故 } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{又 } \log_{\frac{1}{5}} 5 < \log_{\frac{1}{5}} 3 < \log_{\frac{1}{5}} 1,$$

$$\text{即 } -1 < \log_{\frac{1}{5}} 3 < 0, 0 < -\log_{\frac{1}{5}} 3 < 1,$$

$$1 < 0.4^{-0.5} < 2, 3^{\log_3 3.1} = 3.1,$$

$$\text{故 } f\left(\log_{\frac{1}{5}} 3\right) = f\left(-\log_{\frac{1}{5}} 3\right),$$

$$f(-0.4^{-0.5}) = f(0.4^{-0.5}),$$

$$\text{又 } -\log_{\frac{1}{5}} 3 < 0.4^{-0.5} < 3^{\log_3 3.1},$$

$$\therefore a < b < c.$$

故选C.

【标注】【知识点】用单调性比较大小；指对幂比较大小；对数函数的图象及性质；指数函数的图象及性质

24. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $y = f(x)$ 的导函数为 $y = f'(x)$, 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) + \frac{f(x)}{x} < 0$. 若 $a = \frac{2}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$, $b = -2f(-2)$, $c = \ln \frac{1}{3}f\left(\ln \frac{1}{3}\right)$, 则 a, b, c 的大小关系正确的是().
- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $a < c < b$ D. $c < a < b$

【答案】 B

【解析】 根据题意, 设 $g(x) = xf(x)$, 若 $y = f(x)$ 为奇函数, 则

$g(-x) = (-x)f(-x) = xf(x) = g(x)$, 则函数 $g(x)$ 为偶函数, 当 $x > 0$ 时,

$g'(x) = (x)'f(x) + xf'(x) = f(x) + xf'(x) = x\left[f'(x) + \frac{f(x)}{x}\right]$, 当 $x \neq 0$ 时,

$f'(x) + \frac{f(x)}{x} < 0$, 则 $g'(x) < 0$, 则函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数,

$a = \frac{2}{3}f\left(\frac{2}{3}\right) = g\left(\frac{2}{3}\right)$, $b = -2f(-2) = g(-2) = g(2)$,

$c = \left(\ln \frac{1}{3}\right) \cdot f\left(\ln \frac{1}{3}\right) = g\left(\ln \frac{1}{3}\right) = g(\ln 3)$, 且 $\frac{2}{3} < \ln 3 < 2$, 则有 $b < c < a$. 故

选B.

【标注】【知识点】导数与单调性; 用单调性比较大小