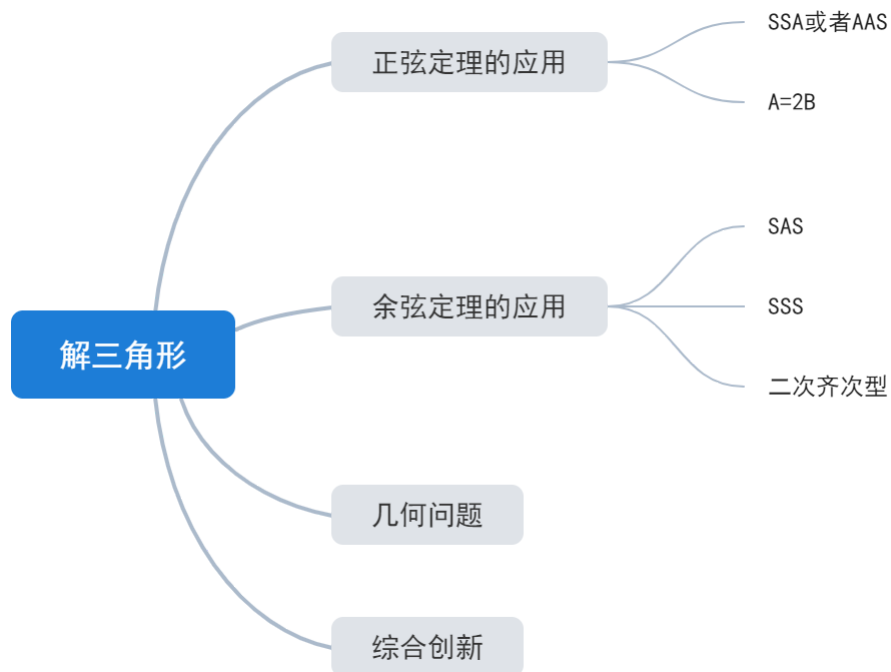


第二讲-解三角形

1. 知识梳理



一、 正弦定理应用

1. 真题分析

🧠 SSA模型

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB = \sqrt{13}$, $BC = 3$, $\angle C = 120^\circ$, 则 $AC = (\quad)$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 A

【解析】 设 $AC = x$,

$$\text{由余弦定理得: } \cos 120^\circ = \frac{x^2 + 9 - 13}{2 \cdot x \cdot 3} = -\frac{1}{2},$$

$$x^2 - 4 = -3x \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0,$$

$$x = 1 \text{ 或 } -4 \text{ (舍)}, \therefore AC = 1, \text{ 选A.}$$

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角

备注：2016年高考真题天津卷理科第3题

分析：本题是很典型的已知两边及其中一边对角求解三角形的问题，我们的处理思路是可以采取正弦定理解决问题，处理思路如下：已知 $c = \sqrt{13}$, $a = 3$ 和 $\angle C = \frac{2\pi}{3}$ ，我们可以列出如下公式：

$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ，可得 $\sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{39}}{26}$ ，由于 $c > a$ ，故而 A 为锐角，进而可以求出 $\cos B = \sin A \sin C - \cos A \cos C$ ，进一步可以使用余弦定理求出 b 的大小。

2. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的分别是 a, b, c 。已知 $a = 2, c = \sqrt{2}, \cos A = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ 。

(1) 求 $\sin C$ 和 b 的值；

(2) 求 $\cos\left(2A + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值。

【答案】(1) $\sin C = \frac{\sqrt{7}}{4}, b = 1$ 。

(2) $\frac{-3 + \sqrt{21}}{8}$ 。

【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中，由 $\cos A = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ ，可得 $\sin A = \frac{\sqrt{14}}{4}$ ，

又由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 及 $a = 2, c = \sqrt{2}$ ，可得 $\sin C = \frac{\sqrt{7}}{4}$ 。

由 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ，得 $b^2 + b - 2 = 0$ 。

因为 $b > 0$ ，故解得 $b = 1$ 。

所以 $\sin C = \frac{\sqrt{7}}{4}, b = 1$ 。

(2) 由 $\cos A = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \sin A = \frac{\sqrt{14}}{4}$ ，

得 $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = -\frac{3}{4}$ ，

$\sin 2A = 2\sin A \cos A = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ 。

所以 $\cos\left(2A + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2A \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2A \sin \frac{\pi}{3} = \frac{-3 + \sqrt{21}}{8}$ 。

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角



A=2B模型

3. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ，已知 $8b = 5c, C = 2B$ ，则 $\cos C = ()$ 。

A. $\frac{7}{25}$
C. $\pm \frac{7}{25}$

B. $-\frac{7}{25}$
D. $\frac{24}{25}$

【答案】 A

【解析】 $\because 8b = 5c$,

$\therefore$ 由正弦定理： $8 \sin B = 5 \sin C$ ，即 $\sin C = \frac{8}{5} \sin B$ ，

又 $\because C = 2B$ ，即 $\cos C = \cos 2B$ ，

$\therefore \sin C = \sin 2B = 2 \sin B \cos B$ ，

$\therefore \frac{8}{5} \sin B = 2 \sin B \cos B$ ，

$\because B \in (0, \pi)$ ， $\sin B \neq 0$ ，

$\therefore \cos B = \frac{4}{5}$ ，

$\therefore \cos 2B = 2 \cos^2 B - 1 = 2 \times \frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25}$ ，

$\therefore \cos C = \cos 2B = \frac{7}{25}$ 。

故答案为：A。

【标注】 【知识点】 正弦定理

备注：2012年高考真题天津卷理科第6题

分析：本题考察的是A=2B模型的处理，此类问题一般是已知 $A = 2B$, $a = \lambda b$ ，求解

A 或者 B 的正余弦，处理路径如下：

$\sin A = \sin 2B = 2 \sin B \cos B \Leftrightarrow a = 2b \cos B \Leftrightarrow \lambda b = 2b \cos B$ 即 $\cos B = \frac{\lambda}{2}$ ，这样的话
 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B}$, $\cos C = \cos 2B = 2 \cos^2 B - 1$, $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$ 均可求解。

2. 思路总结

正弦定理应用的常见模型：

1、SSA模型；常见的情况是已知三角形的两条边以及其中一条边对角的大小，这样可以通过正弦定理求解出来另外一条边的对角的正弦，此时需要注意的是根据正弦求解角度大小时会存在两个解的情况，此时我们的取舍是根据大角对大边的原则进行

2、A=2B模型；常见的情况是已知 $A = 2B$, $a = \lambda b$ ，求解A 或者 B 的正余弦。

3. 模拟演练

SSA模型

4. 在 $\triangle ABC$ 中， $AC = \sqrt{7}$ ， $BC = 2$ ， $B = 60^\circ$ ，则BC边上的高等于（ ）。

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C.

D.

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{39}}{4}$$

【答案】 A

【解析】 由余弦定理可得，且 $AC = \sqrt{7}$ ， $BC = 2$ ， $B = 60^\circ$ ，

$$\therefore AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B,$$

$$AB^2 - 2AB - 3 = 0 \text{ 故 } AB = 3,$$

$$\therefore AD = AB \cdot \sin B = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

故选A.

【标注】 【知识点】 余弦定理；正余弦定理综合求解边角

5. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AC = 2$ ， $BC = 3$ ， $\cos A = -\frac{4}{5}$ 。

(1) 求 $\sin B$ 的值。

(2) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值。

【答案】 (1) $\frac{2}{5}$ 。

(2) $\frac{12\sqrt{7} + 17}{50}$ 。

【解析】 (1) 在 $\triangle ABC$ 中，

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5},$$

$$\text{由正弦定理, } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B},$$

$$\text{所以 } \sin B = \frac{AC}{BC} \sin A = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

(2) 因为 $\cos A = -\frac{4}{5}$ ，

所以角 A 为钝角，从而角 B 为锐角，

$$\text{于是 } \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5},$$

$$\cos 2B = 2\cos^2 B - 1 = 2 \times \frac{\sqrt{21}}{5} - 1 = \frac{17}{25},$$

$$\sin 2B = 2\sin B \cos B = 2 \times \frac{2}{5} \times \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{4\sqrt{21}}{25}.$$

$$\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2B \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2B \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{4\sqrt{21}}{25} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{17}{25} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{12\sqrt{7} + 17}{50}.$$

$$\text{在}\triangle ABC\text{中}, \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5},$$

$$\text{由正弦定理}, \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}.$$

$$\text{所以}\sin B = \frac{AC}{BC} \sin A = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

【标注】【知识点】两角和与差的正弦；和差角公式化简求值综合运用；正弦定理；正余弦定理综合求解边角

A=2B模型

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 3$, $b = 2\sqrt{6}$, $\angle B = 2\angle A$, 则 $\cos A =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】 由正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, $\frac{3}{\sin A} = \frac{2\sqrt{6}}{\sin 2A}$.

$$\therefore \frac{2 \sin A \cos A}{\sin A} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{故}\cos A = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角；正弦定理

7. $\triangle ABC$ 中的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\sqrt{5}b = 4c$, $B = 2C$.

求 $\cos B$.

【答案】 (1) $\frac{3}{5}$.

【解析】 (1) 由题意得 $B = 2C$,

$$\text{则}\sin B = \sin 2C = 2 \sin C \cos C,$$

$$\text{又}\sqrt{5}b = 4c, \text{所以}\cos C = \frac{\sin B}{2 \sin C} = \frac{b}{2c} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以}\cos B = \cos 2C = 2\cos^2 C - 1 = \frac{3}{5}.$$

【标注】【知识点】边角互化（利用正弦定理）；三角形面积公式；SAS类三角形（利用余弦定理）

二、余弦定理应用

1. 真题分析

SAS模型

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 3$, 则 $\sin \angle BAC =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$
C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【答案】 C

【解析】 由 $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 3$, 由余弦定理得:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 2 + 9 - 6 = 5, \therefore AC = \sqrt{5},$$

$$\text{由正弦定理得: } \sin \angle BAC = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

故选C.

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角

【素养】数学运算

备注: 2013年高考真题天津卷理科第6题

分析: 本题考察的是对于余弦定理的基本应用, 首先我们要基于我们的阅读习惯修改一下题目条件的表示方法: $\angle ABC = B = \frac{\pi}{4}$, $AB = c = \sqrt{2}$, $BC = a = 3$, 已知条件是已知两边及其夹角, 这样可以使用余弦定理求解出来夹角所对边的大小, 进而三角形的三条边均可知, 这样可以使用余弦定理求解出来 $\cos A$.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . 已知 $b \sin A = 3c \sin B$, $a = 3$, $\cos B = \frac{2}{3}$.

(1) 求 b 的值;

(2) 求 $\sin\left(2B - \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

【答案】 (1) $b = \sqrt{6}$.

(2) $\frac{4\sqrt{5} + \sqrt{3}}{18}$.

【解析】 (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

$$\text{可得 } b \sin A = a \sin B,$$

$$\text{又由 } b \sin A = 3c \sin B, \text{ 可得 } a = 3c, \text{ 又 } a = 3, \text{ 故 } c = 1.$$

$$\text{由 } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \cos B = \frac{2}{3}, \text{ 可得 } b = \sqrt{6}.$$

$$(2) \text{ 由 } \cos B = \frac{2}{3}, \text{ 得 } \sin B = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\text{从而得 } \cos 2B = 2\cos^2 B - 1 = -\frac{1}{9}, \sin 2B = 2\sin B \cos B = \frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

$$\text{所以 } \sin\left(2B - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2B \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2B \sin \frac{\pi}{3} = \frac{4\sqrt{5} + \sqrt{3}}{18}.$$

【标注】【知识点】二倍角的余弦；二倍角的正弦；两角和与差的正弦；和差角公式化简求值综合运用；正弦定理；余弦定理；正余弦定理综合求解边角

10. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 。已知 $a > b, a = 5, c = 6, \sin B = \frac{3}{5}$ 。

(1) 求 b 和 $\sin A$ 的值。

(2) 求 $\sin(2A + \frac{\pi}{4})$ 的值。

【答案】 (1) $b = \sqrt{13}, \sin A = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$

(2) $\frac{7\sqrt{2}}{26}.$

【解析】 (1) 在 $\triangle ABC$ 中，因为 $a > b$ ，所以 B 为锐角，故由 $\sin B = \frac{3}{5}$ ，

$$\text{可得 } \cos B = \frac{4}{5},$$

$$\text{由已知及余弦定理有 } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 13,$$

$$\text{所以 } b = \sqrt{13}.$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ 得 } \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

(2) 由(1)及 $a < c$ 可知 A 为锐角，得 $\cos A = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ ，

$$\text{所以 } \sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{12}{13},$$

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = -\frac{5}{13},$$

$$\text{所以 } \sin(2A + \frac{\pi}{4}) = \sin 2A \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2A \sin \frac{\pi}{4} = \frac{7\sqrt{2}}{26}.$$

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角

11. $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C ，所对的边分别为 a, b, c ，已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{15}$ ， $b - c = 2$ ， $\cos A = -\frac{1}{4}$ ，

(1) 求 a 和 $\sin C$ 的值；

(2) 求 $\cos(2A + \frac{\pi}{6})$ 的值。

【答案】 (1) $a = 8, \sin C = \frac{\sqrt{15}}{8}.$

$$(2) \frac{\sqrt{15} - 7\sqrt{3}}{16}.$$

【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\cos A = -\frac{1}{4}$, 可得 $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

$$\text{由 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 3\sqrt{15}, \text{ 得 } bc = 24,$$

$$\text{又由 } b - c = 24, \text{ 解得 } b = 6, c = 4,$$

$$\text{由余弦定理 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \text{ 解得 } a = 8,$$

$$\text{再由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 得 } \sin C = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

$$(2) \cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2A \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \sin 2A \cdot \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(2\cos^2 A - 1) - \frac{1}{2} \cdot 2\sin A \cos A$$

$$= \frac{\sqrt{15} - 7\sqrt{3}}{16}.$$

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角

备注：2015年高考真题天津卷文科第16题

分析：本题考查了面积公式与余弦定理的综合应用，首先题目给出一个角以及三角形面积大小，根据面积公式可以求出该角两条临边的乘积，即 bc ，然后结合题目给的两条临边的关系式 $b - c = 2$ ，这样可以求解出来 b 和 c ，这样可以使用 SAS 的求解思路对三角形进行求解。

🔴 SSS模型

12. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $a = 2\sqrt{2}, b = 5, c = \sqrt{13}$ 。

(1) 求角 C 的大小。

(2) 求 $\sin A$ 的值。

(3) 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)$ 值。

【答案】(1) $C = \frac{\pi}{4}$ 。

$$(2) \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

$$(3) \frac{17\sqrt{2}}{26}.$$

【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理及 $a = 2\sqrt{2}$,

$$b = 5, c = \sqrt{13},$$

$$\text{有 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{又因为 } C \in (0, \pi).$$

$$\text{所以 } C = \frac{\pi}{4}.$$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理及 $C = \frac{\pi}{4}$,

$$a = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{13},$$

$$\text{可得} \sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

(3) 由 $a < c$ 及 $\sin A = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,

$$\text{可得} \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\text{进而} \sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{12}{13},$$

$$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = \frac{5}{13},$$

所以,

$$\sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2A \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2A \sin \frac{\pi}{4} = \frac{12}{13} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{13} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{17\sqrt{2}}{26}.$$

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . 已知 $b - c = \frac{1}{4}a$, $2 \sin B = 3 \sin C$, 则 $\cos A$ 的值为_____.

【答案】 $-\frac{1}{4}$

【解析】 因为 $2 \sin B = 3 \sin C$, 所以由正弦定理得 $2b = 3c$, 解得 $b = \frac{3c}{2}$, $a = 2c$.

$$\text{所以} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{4}.$$

【标注】【知识点】余弦定理; 正弦定理

备注: 2014年高考真题天津卷理科第12题

分析: 本题考察余弦定理的应用, 题目所给的条件为 $b - c = \frac{1}{4}a$, $2b = 3c$, 根据这两个关系式可以求解出来 $a : b : c$, 这样可以使用余弦定理求解出来任意一角的余弦值。

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a - c = \frac{\sqrt{6}}{6}b$, $\sin B = \sqrt{6} \sin C$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 求 $\cos(2A - \frac{\pi}{6})$ 的值.

【答案】 (1) $\cos A = \frac{\sqrt{6}}{4}$

$$(2) \cos(2A - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}$$

【解析】(1) $\therefore \begin{cases} a-c = \frac{\sqrt{6}}{6}b \\ b = \sqrt{6}c \end{cases} \therefore a = 2c, \triangle ABC \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-4c^2 + 6c^2 + c^2}{2\sqrt{6}c^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-4c^2 + 6c^2 + c^2}{2\sqrt{6}c^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

(2) $\therefore \sin^2 A + \cos^2 A = 1, \cos A = \frac{\sqrt{6}}{4}, \therefore A \in (0, \pi), \therefore \sin A = \frac{\sqrt{10}}{4}$

$\sin 2A = 2 \sin A \cdot \cos A = \frac{\sqrt{15}}{4},$

$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = -\frac{1}{4} \therefore \cos(2A - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}$

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角；倍角、和差角公式综合

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $b+c=2a, 3c \sin B = 4a \sin C$.

(1) 求 $\cos B$ 的值.

(2) 求 $\sin(2B + \frac{\pi}{6})$ 的值.

【答案】(1) $-\frac{1}{4}$.

(2) $-\frac{3\sqrt{5}+7}{16}$.

【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

得 $b \sin C = c \sin B$,

又由 $3c \sin B = 4a \sin C$,

得 $3b \sin C = 4a \sin C$, 即 $3b = 4a$,

又因为 $b+c=2a$,

得到 $b = \frac{4}{3}a, c = \frac{2}{3}a$,

由余弦定理可得

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{9}a^2}{2 \cdot a \cdot \frac{2}{3}a} = -\frac{1}{4}.$$

(2) 由(1)可得 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

从而 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = -\frac{\sqrt{15}}{8}$,

$\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = -\frac{7}{8}$,

故 $\sin(2B + \frac{\pi}{6}) = \sin 2B \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2B \sin \frac{\pi}{6}$

$= -\frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{8} \times \frac{1}{2}$

$= -\frac{3\sqrt{5}+7}{16}.$

【标注】【知识点】倍角、和差角公式综合；正余弦定理综合求解边角

 齐次型

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a \sin A = 4b \sin B$,

$$ac = \sqrt{5}(a^2 - b^2 - c^2).$$

(1) 求 $\cos A$ 的值.

(2) 求 $\sin(2B - A)$ 的值.

【答案】 (1) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.
(2) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析】 (1) 方法一: 由 $a \sin A = 4b \sin B$, 及 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 得 $a = 2b$.

由 $ac = \sqrt{5}(a^2 - b^2 - c^2)$ 及余弦定理可知

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{5}ac}{ac} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

方法二: $\because a \sin A = 4b \sin B$, 由正弦定理得 $a^2 = 4b^2$,

$$\therefore a = 2b,$$

$$\begin{cases} ac = \sqrt{5}(a^2 - b^2 - c^2), \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a = 2b \\ c = \frac{3\sqrt{5}}{5}b \end{cases},$$

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + \frac{9}{5}b^2 - 4b^2}{2 \cdot b \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5}b} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

(2) 由(1)可知 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

由 $a = 2b$ 可得 $\sin B = \frac{1}{2} \sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 显然 A 为钝角, 所以 B 为锐角,

$$\text{则} \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以} \sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{4}{5}, \cos 2B = 1 - 2 \sin^2 B = \frac{3}{5},$$

$$\text{故} \sin(2B - A) = \sin 2B \cos A - \cos 2B \sin A$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{5} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{3}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ &= -\frac{2\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角

备注: 2017年高考真题天津卷文科第15题13分

分析：本题考察余弦定理的应用，本题所给的关系式为 $ac = \sqrt{5}(a^2 - b^2 - c^2)$ ，我们可以定义这种式子为关于三边 a, b, c 的二次齐次式，遇到这样的式子我们可以考虑余弦定理的整体运用，从本式来说，我们可以将 $a^2 - b^2 - c^2$ 整体替换成 $-2bc \cos A$ ，这样可得 $ac = -2\sqrt{5}bc \cos A$ ，约分可得 $a = -2\sqrt{5}b \cos A$ ，由 $a \sin A = 4b \sin B$ ，可得 $a = 2b$ ，这样即可求出来 $\cos A = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

2. 思路总结

题型总结：

- 1、SAS模型；在已知两边及其夹角的情况下可以求出夹角的对边
- 2、SSS模型；在已知三边大小或者三边比例关系的情况下可以使用余弦定理求解出来任意角的余弦值
- 3、二次齐次型；题目给出三边的二次齐次式的情况下，可以考虑余弦定理的整体运用

3. 模拟演练

SAS模型

17. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $\cos A = \frac{2}{3}$ ， $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ ，则 BC 边长为 _____。

【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】 $\because \cos A = \frac{2}{3}$ ， $A \in (0, \pi)$ 。

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A.$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} \times 3 \times AC \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$AC = 3.$$

$$\therefore \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{9 + 9 - BC^2}{2 \times 3 \times 3}.$$

$$BC = \sqrt{6}.$$

故答案为： $\sqrt{6}$ 。

【标注】【知识点】三角形面积公式；SSA类三角形（利用余弦定理）；已知正弦余弦正切或其关系求值

【素养】 数学运算

18.

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且 $b - c = 1$, $\cos A = \frac{1}{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求 a 及 $\sin C$ 的值.

(2) 求 $\cos\left(2A - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

【答案】 (1) $a = 3$, $\sin C = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

(2) $\cos\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\sqrt{2} - 7\sqrt{3}}{18}$.

【解析】 (1) 由 $\cos A = \frac{1}{3}$, $0 < A < \pi$,

$$\text{得} \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{又有} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 2\sqrt{2},$$

$$\text{得} bc = 6, b - c = 1,$$

$$\text{由余弦定理: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 9,$$

$$\text{得} a = 3,$$

$$\begin{cases} bc = 6 \\ b - c = 1 \end{cases}, b = 3, c = 2,$$

由正弦定理得:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\sin C = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

$$(2) \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = -\frac{7}{9},$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9},$$

$$\therefore \cos\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2A \cos \frac{\pi}{6} + \sin 2A \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{7}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 7\sqrt{3}}{18}.$$

【标注】【知识点】正弦定理；余弦定理；三角形面积公式；正余弦定理综合求解边角；和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的余弦；半角公式；二倍角的余弦

SSS模型

19. $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $BC = \sqrt{13}$, $AC = 4$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是().

A. $3\sqrt{3}$

B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

C. 3

D. $\frac{3}{2}$

【答案】 A

【解析】 $\because \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{1}{2}$.
 $\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin A$
 $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= 3\sqrt{3}$.

【标注】 【知识点】 三角形面积公式

20. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $a^2 - b^2 = \sqrt{3}bc$, $\sin C = 2\sqrt{3}\sin B$, 则 A 角大小为 _____ .

【答案】 $\frac{\pi}{6}$

【解析】 由 $\sin C = 2\sqrt{3}\sin B$ 得: $c = 2\sqrt{3}b$,
所以 $a^2 - b^2 = \sqrt{3}bc = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}b^2$, 即 $a^2 = 7b^2$,
则 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + 12b^2 - 7b^2}{4\sqrt{3}b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 又 $A \in (0, \pi)$,
所以 $A = \frac{\pi}{6}$.

【标注】 【知识点】 正弦定理; 余弦定理

21. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 已知 $a = \sqrt{5}$, $b = 3$, $\sin C = 2\sin A$.

(1) 求 c .

(2) 求 $\sin\left(2A - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值 .

【答案】 (1) $c = 2\sqrt{5}$.

(2) $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

【解析】 (1) $\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, $\sin C = 2\sin A$, $\therefore c = 2a = 2\sqrt{5}$.
(2) $\because \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, $A \in (0, \pi)$,
 $\therefore \sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}$,
 $\therefore \sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{4}{5}$, $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = \frac{3}{5}$,
 $\therefore \sin\left(2A - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2A \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \cos 2A \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

【标注】【知识点】两角和与差的正弦；和差角公式化简求值综合运用；正余弦定理综合求解边角；余弦定理；正弦定理

22. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $B = C, 2b = \sqrt{3}a$ 。

- (1) 求 $\cos A$ 的值。
 (2) 求 $\cos\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值。

【答案】(1) $\cos A = \frac{1}{3}$ 。

(2) $\cos\left(2A + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{8 + 7\sqrt{2}}{18}$ 。

【解析】(1) 由 $B = C, 2b = \sqrt{3}a$ ，得 $c = b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，

$$\text{所以 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - a^2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{3}。$$

(2) 因为 $\cos A = \frac{1}{3}, A \in (0, \pi)$ ，则 $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = -\frac{7}{9}, \sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{4\sqrt{2}}{9},$$

$$\text{所以 } \cos\left(2A + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2A \cos \frac{\pi}{4} - \sin 2A \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \left(-\frac{7}{9}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\frac{8 + 7\sqrt{2}}{18}。$$

【标注】【知识点】余弦定理；正弦定理；同角三角函数的基本关系式；和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的余弦；二倍角的余弦；二倍角的正弦

23. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，已知 $b = 3, a + c = 3\sqrt{5}, \sin C = 2\sin A$ 。

- (1) 求 a, c 的值。
 (2) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值。

【答案】(1) $\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$ 。

(2) $\frac{31\sqrt{2}}{50}$ 。

【解析】(1) 由正弦定理 $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ ， $\sin C = 2\sin A$ ，

$$\therefore c = 2a,$$

$$\therefore a + c = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore a = \sqrt{5}, c = 2\sqrt{5}。$$

(2) $\therefore b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$

$$\begin{aligned}
&\therefore \cos B = \frac{4}{5}, \\
&\therefore B \text{ 是三角形内角}, \\
&\therefore 0 < B < \pi, \\
&\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{3}{5}, \\
&\therefore \sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{24}{25}, \cos 2B = 2\cos^2 B - 1 = \frac{7}{25}, \\
&\therefore \sin\left(2B + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2B \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2B \sin \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2B + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2B = \frac{31\sqrt{2}}{50}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正弦；余弦定理；正弦定理；正余弦定理综合求解边角

齐次型

24. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ．已知 $3(a-c)^2 = 3b^2 - 2ac$ ．

(1) 求 $\cos B$ 的值．

(2) 若 $5a = 3b$ ，

① 求 $\sin A$ 的值．

② 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值．

【答案】 (1) $\cos B = \frac{2}{3}$ ．

(2) ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ．

② $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$ ．

【解析】 (1) 在 $\triangle ABC$ 中，

$$\text{由 } 3(a-c)^2 = 3b^2 - 2ac,$$

$$\text{整理得 } \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{又由余弦定理，可得 } \cos B = \frac{2}{3}.$$

(2) ① 由(1)可得 $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，

$$\text{又由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ 及已知 } 5a = 3b,$$

$$\text{可得 } \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

② 由(1)可得 $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = \frac{3}{5}$ ．

$$\text{由已知 } 5a = 3b \text{ 可得 } a < b,$$

$$\text{故有 } A < B,$$

所以 A 为锐角,

$$\text{故由} \sin A = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{可得} \cos A = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{从而有} \sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{4}{5},$$

所以,

$$\begin{aligned} \sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) &= \sin 2A \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2A \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{4\sqrt{3} + 3}{10}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】余弦定理；正弦定理；正余弦定理综合求解边角；和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正弦

25. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为三个内角 A, B, C 的对边, 且 $b^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}bc \sin A + c^2 = a^2$.

(1) 求角 A 的大小.

(2) 若 $b = 2, c = 3$, 求 a 和 $\sin(2B - A)$ 的值.

【答案】(1) $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) $a = \sqrt{7}$; $\sin(2B - A) = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

【解析】(1) $b^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}bc \sin A + c^2 = a^2$ ①,

$$\text{又} b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = a^2 \text{ ②,}$$

联立①②得 $\tan A = \sqrt{3}$,

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 由余弦定理得

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore a = \sqrt{7},$$

$$\text{又} b = 2, c = 3,$$

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ &= \frac{7 + 9 - 4}{2\sqrt{7} \cdot 3} \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{7}, \end{aligned}$$

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

$$\therefore \sin 2B = 2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{7},$$

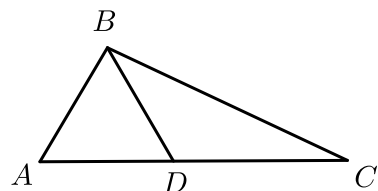
$$\begin{aligned}
 \cos 2B &= 2 \cos^2 B - 1 = \frac{1}{7}, \\
 \sin(2B - A) &= \sin(2B - \frac{\pi}{3}) \\
 &= \frac{\sin 2B}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2B \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{7} \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{14}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】倍角、和差角公式综合；SAS类三角形（利用余弦定理）

三、几何问题

1. 真题分析

26. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是边 AC 上的点，且 $AB = AD$ ， $2AB = \sqrt{3}BD$ ， $BC = 2DB$ ，则 $\sin C$ 的值为（ ）.



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$
D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

【答案】D

【解析】方法一：设 $BD = a$ ，则由题意可得 $BC = 2a$ ，

$$AB = AD = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理，得

$$\cos A = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中，由正弦定理，得 } \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A},$$

$$\text{所以 } \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sin C} = \frac{2a}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}, \text{ 解得 } \sin C = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

故选D.

方法二：设 $BD = 2$ ，则 $AB = AD = \sqrt{3}$ ， $BC = 4$ ，由余弦定

理得：

$$\cos \angle ADB = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2 \times AD \times BD} = \frac{3 + 4 - 3}{2 \times \sqrt{3} \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \sin \angle BDC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BDC} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

由正弦定理得 $\frac{4}{\sin \angle BDC} = \frac{2}{\sin C}$ ，

$$\text{即 } \sin C = \frac{1}{2} \sin \angle BDC = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

故选D.

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角；多个三角形拼接的解三角形问题

备注：2011年高考真题天津卷理科第6题

分析：本题考察的是正余弦定理综合运用求解几何问题，首先我们需要明确的是题目所给图形包含三个三角形并且标出已知条件，在 $\triangle ABD$ 中我们已知三边比例关系，故而该三角形的三个角可求，也就意味着 $\angle BDC$ 可求，这样在 $\triangle BDC$ 我们已知可构成 SSA 模型，使用正弦定理可求解出 $\sin C$ 。

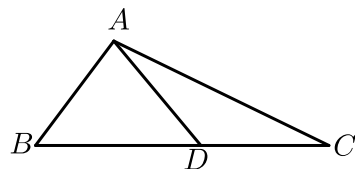
2. 思路总结

题型总结：

一般是给出一个包含多个三角形的复杂几何图形以及相应的边角关系，首先我们需要明确的是在每个三角形中已知条件能否构成类似 SSA , SAS , SSS , AAS 之类的模型，如果找到了可以作为突破口求解该三角形，得到更多条件，然后结合求出对 边角判断在剩下三角形中是否有新的模型可以求解，直至求解出来所求边或者角的大小。

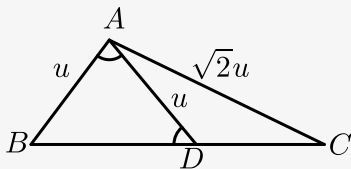
3. 模拟演练

27. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是边 BC 上一点， $AB = AD = \frac{\sqrt{2}}{2} AC$ ， $\cos \angle BAD = \frac{1}{3}$ ，则 $\sin C =$ _____.



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】 令 $AB = u$ ，则 $AD = u$ ， $AC = \sqrt{2}u$ ，



$\triangle ABD$ 为等腰三角形，

$$\therefore \cos \angle BAD = \cos(\pi - 2\angle ADB)$$

$$= -\cos 2\angle ADB = 2\sin^2 \angle ADB - 1$$

$$\text{解得} \sin \angle ADB = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

$$\text{在} \triangle ACD, \text{由正弦定理}, \frac{AD}{\sin C} = \frac{AC}{\sin \angle ADC},$$

$$\therefore \sin C = \frac{AD}{AC} \sin \angle ADC = \frac{u}{\sqrt{2}u} \cdot \sin \angle ADB = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【标注】【知识点】多个三角形拼接的解三角形问题

28. 在 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 边上一点， $BC = 3BD$ ， $AD = \sqrt{2}$ ， $\angle ADB = 135^\circ$ ．若 $AC = \sqrt{2}AB$ ，则
 $BD = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】 $2 + \sqrt{5}$

【解析】 用余弦定理得：

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos 135^\circ,$$

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos 45^\circ.$$

$$\text{即} AB^2 = BD^2 + 2 + 2BD \text{①},$$

$$AC^2 = CD^2 + 2 - 2CD \text{②},$$

$$\text{又} BC = 3BD,$$

$$\therefore CD = 2BD,$$

$$\text{由②得} AC^2 = 4BD^2 + 2 - 4BD \text{③}$$

$$\therefore 2AB^2 = 4BD^2 + 2 - 4BD \text{④}$$

$$\text{④}-2\text{①得} BD^2 - 4BD - 1 = 0.$$

$$\therefore BD = 2 + \sqrt{5}.$$

【标注】【知识点】SAS类三角形（利用余弦定理）

四、综合创新

29. $\triangle ABC$ 中的角 A, B, C 的所对的边分别为 a, b, c , 若 $\cos A = \frac{7}{8}$, $c - a = 2$, $b = 3$, 则 $a =$ _____ .

【答案】 2

【解析】 由余弦定理,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\text{即 } \frac{7}{8} = \frac{9 + (2+a)^2 - a^2}{2 \times 3 \times (2+a)},$$

$$\text{解得 } a = 2.$$

【标注】 【知识点】 SAS类三角形 (利用余弦定理)

【素养】 数学运算

30. 已知 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $\cos B = \frac{1}{4}$, $b = 2$, $\sin C = 2 \sin A$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ().

A. $\frac{\sqrt{15}}{6}$
C. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$
D. $\sqrt{15}$

【答案】 B

【解析】 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore ac = 2a^2 + 2c^2 - 2b^2 \text{ ①},$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\text{结合已知 } \sin C = 2 \sin A,$$

$$\therefore c = 2a,$$

$$\therefore b = 2,$$

$$\therefore \text{联立①式解得 } a = 1, c = 2,$$

$$\text{又 } \therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

故选 B.

【标注】【知识点】三角形面积公式

31. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是内角 A, B, C 的对边, 且 $\frac{\cos B}{\cos C} = -\frac{b}{2a+c}$.

(1) 求角 B .

(2) 若 $b = \sqrt{13}, a+c=4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】(1) $B = 120^\circ$.

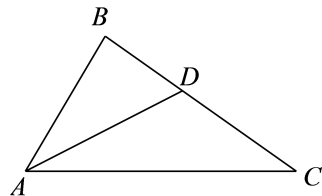
(2) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

【解析】(1) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,
得 $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$,
 $\therefore$ 等式 $\frac{\cos B}{\cos C} = -\frac{b}{2a+c}$ 可化为: $\frac{\cos B}{\cos C} = -\frac{2R \sin B}{2 \cdot 2R \sin A + 2R \sin C}$,
即 $\frac{\cos B}{\cos C} = -\frac{\sin B}{2 \sin A + \sin C}$, $2 \sin A \cos B + \sin C \cos B = -\cos C \cdot \sin B$,
故 $2 \sin A \cos B = -\cos C \sin B - \sin C \cos B = -\sin(B+C)$,
 $\therefore A+B+C = \pi$,
 $\therefore \sin A = \sin(B+C)$, 故 $\cos B = -\frac{1}{2}$,
 $\therefore B = 120^\circ$.

(2) 由余弦定理, 得 $b^2 = 13 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos 120^\circ$, 即 $a^2 + c^2 + ac = 13$,
又 $a+c=4$, 解得 $\begin{cases} a=1 \\ c=3 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} a=3 \\ c=1 \end{cases}$,
 $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

【标注】【知识点】SAS类三角形(利用余弦定理)

32. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \frac{\pi}{2}$, $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D , $AD = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{6}$ 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.



【答案】 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

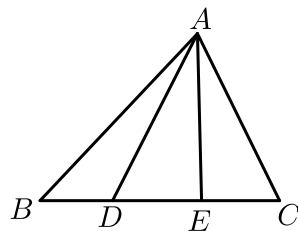
【解析】 设 $AB = a, \angle BAD = \theta$,

$$\begin{aligned}
 &\because \text{在} \triangle ABC \text{中}, \angle B = \frac{\pi}{2}, \angle BAC \text{的平分线交} BC \text{于点} D, AD = \sqrt{2}, AC = \sqrt{6}, \\
 &\therefore \begin{cases} \frac{a}{\cos \theta} = AD = \sqrt{2} \\ \frac{A}{\cos 2\theta} = AC = \sqrt{2} \end{cases}, \text{整理, 得} \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} = \frac{2\cos^2 \theta}{\cos \theta} = 2\cos \theta - \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\
 &\text{设} \cos \theta = x, \text{解方程} 2x - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{解} x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{或} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \\
 &\because 0^\circ < \theta < 90^\circ, \therefore x > 0, \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
 &\therefore AB = a = AD \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}, BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\
 &\therefore \triangle ABC \text{的面积为} S = \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}. \\
 &\text{故答案为} \frac{3\sqrt{3}}{4}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】三角形面积公式

33. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且满足

$$(a-b)(\sin A + \sin B) = c(\sin A - \sin C), c = 4.$$



若 D, E 在线段 BC 上, 且 $BD = DE = EC, AE = 2\sqrt{3}BD$, 求 AD 的长.

【答案】(1) $\sqrt{13}$.

【解析】(1) 设 $BD = x$, 则 $BE = 2x, AE = 2\sqrt{3}x$, 又 $B = \frac{\pi}{3}, c = 4$,
 在 $\triangle ABE$ 中, 由余弦定理得 $12x^2 = 16 + 4x^2 - 2 \times 4 \times 2x \cos \frac{\pi}{3}$,
 即 $8x^2 = 16 - 8x$, 解得 $x = 1$ (取正),
 则 $BE = 2, AE = 2\sqrt{3}, AB = 4$, 所以 $\angle AEB = \frac{\pi}{2}$,
 在直角 $\triangle ADE$ 中, $AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{13}$.

【标注】【知识点】余弦定理; 正弦定理; 正余弦定理综合求解边角