

第三讲-三角函数图像性质练习题

一、图像变换

1. 函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($x \in \mathbf{R}, \omega > 0$) 的最小正周期为 π ，为了得到函数 $g(x) = \cos \omega x$ 的图象，只要将 $y = f(x)$ 的图象 () .

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

- B. 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度
D. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

【答案】 A

【解析】 由题知 $\omega = 2$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以 } f(x) &= \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right). \end{aligned}$$

故选 A .

【标注】 【知识点】 正余弦型、正切型函数图象变换；诱导公式；利用诱导公式化简

2. 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)$ 具有的性质是 () .

- A. 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称且最大值为 1
B. 图象关于点 $\left(-\frac{3\pi}{8}, 0\right)$ 对称且周期为 π
C. 在区间 $\left(-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$ 上单调递增且为偶函数
D. 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增且为奇函数

【答案】 A

【解析】 函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 单位长度后得到：

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x \text{ 的图象，} \\ \text{所以：当 } x &= \frac{\pi}{2} \text{ 时， } g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1， \\ \text{所以函数图象关于直线 } x &= \frac{\pi}{2} \text{ 对称。} \end{aligned}$$

由于 x 为任意实数，

所以函数的最大值为1，

所以：选项A正确，

①对于选项B：图象不关于点 $\left(-\frac{3\pi}{8}, 0\right)$ 对称，

②对于选项C： x 在区间 $\left(-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$ 上单调递增错误，

③对于选项D：函数为奇函数错误。

故选：A。

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换；正弦型函数的图象与性质

3. 将函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x (x \in \mathbf{R})$ 的图象与 x 轴的两个相邻的交点的距离是 $\frac{\pi}{2}$ ，若将 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到的函数 $y = g(x)$ 的图象，则（ ）。

- A. 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减
- B. 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减
- C. 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增
- D. 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ 上单调递增

【答案】 A

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x$

$$= 2 \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{3} \right),$$

又 $\because$ 函数 $f(x)$ 图象与 x 轴两相邻交点的距离等于 $\frac{\pi}{2}$ ，

$\therefore$ 可得函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$ ，

$$\therefore \omega = 2,$$

将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到：

$$g(x) = 2 \sin \left(2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\therefore g(x) = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right),$$

$\therefore$ 由正弦函数图象性质得：

函数 $g(x)$ 在 $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right], k \in \mathbf{Z}$ 上单调递增，

在 $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right], k \in \mathbf{Z}$ 上单调递减，

$\therefore g(x)$ 在 $x \in \left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi \right], k \in \mathbf{Z}$ 上单调递增，

在 $x \in \left[\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi \right], k \in \mathbf{Z}$ 上单调递减，

$\therefore k = -1$ 时, $g(x)$ 在 $\left[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递减,
 $\therefore \left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right] \subseteq \left[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}\right]$,
 $\therefore g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减.

故选A.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质；正余弦型、正切型函数图象变换；正弦型函数的图象与性质；单调性

4. 将函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位, 再将图象上每一点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 所得图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称, 则 φ 的最小值为 ().
- A. $\frac{\pi}{8}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{3\pi}{8}$ D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】 C

【解析】 $f(x)$ 平移变换后得到: $f(x) = 2\sin\left(4x + \frac{\pi}{4} - 2\varphi\right)$,
 $\therefore g(x)$ 关于 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称,
 $\therefore 4x + \frac{\pi}{4} - 2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,
 即 $4 \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$,
 即 $\varphi = \frac{3\pi}{8} - \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,
 又 $\varphi > 0$, $\therefore k = 0$ 时, $\varphi_{\min} = \frac{3\pi}{8}$.

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换

5. 将函数 $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ 图象向右平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位, 所得图象对应的函数恰为偶函数, 则 φ 的最小值为 ().
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{12}$
 C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

【答案】 B

【解析】 若将函数 $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$
 $= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
 $= \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位后函数解析式为:
 $y = \sin\left[2(x - \varphi) + \frac{2\pi}{3}\right]$

$$= \sin \left[2x - 2\varphi + \frac{2\pi}{3} \right]$$

由此函数为偶函数，可得： $-2\varphi + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，

解得： $\varphi = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，

当 $k = 0$ 时， φ 的最小正值是 $\frac{\pi}{12}$ 。

故选：B。

【标注】【知识点】二倍角的正弦；利用诱导公式化简；正弦函数的图象和性质；正弦型函数的图象与性质；正余弦型、正切型函数图象变换

二、参数确定

6. 已知函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + m$ 的最大值为4，最小值为0，最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ ，直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 是其图象的一条对称轴，则下面各式中符合条件的解析式是（ ）。

A. $y = 4 \sin \left(4x + \frac{\pi}{6} \right)$

B. $y = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 2$

C. $y = 2 \sin \left(4x + \frac{\pi}{3} \right) + 2$

D. $y = 2 \sin \left(4x + \frac{\pi}{6} \right) + 2$

【答案】 D

【解析】 由题知 $A = 2$ ， $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ ， $m = 2$ ，

$$\therefore y = 2 \sin(4x + \varphi) + 2.$$

又 $\because x = \frac{\pi}{3}$ 是一条对称轴，

$$\therefore 4 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$\therefore \varphi = -\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\therefore \text{当 } k = 1 \text{ 时, } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

故选D。

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

7. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x (\omega > 0)$ ， $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = 2$ 的两个相邻交点的距离等于 π ，则 $f(x)$ 的单调递增区间是（ ）。

A. $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12} \right], k \in \mathbf{Z}$

B. $\left[k\pi + \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{11\pi}{12} \right], k \in \mathbf{Z}$

C. $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6} \right], k \in \mathbf{Z}$

D. $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right], k \in \mathbf{Z}$

【答案】C

【解析】 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x = 2 \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right), (\omega > 0)$.

$\therefore f(x)$ 的图象与直线 $y = 2$ 的两个相邻交点的距离等于 π , 恰好是 $f(x)$ 的一个周期,

$$\therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \omega = 2. f(x) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

故其单调递增区间应满足 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

$$\text{得 } k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}.$$

故选: C.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

8. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi) - \cos(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$ 为偶函数, 且其图象的两条相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 则 $f\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ 的值为 _____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 $\therefore$ 函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi) - \cos(\omega x + \varphi)$,

$= 2 \sin \left(\omega x + \varphi - \frac{\pi}{6}\right) (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$ 为偶函数,

$$\therefore \varphi - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 令 } k = 0, \text{ 可得 } \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

根据其图象的两条相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 可得 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$,

$$\therefore \omega = 2, f(x) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos 2x,$$

$$\therefore f\left(-\frac{\pi}{8}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】正弦型函数的图象与性质; 正弦函数的图象和性质

9. 设函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A \neq 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 的图象关于直线 $x = \frac{2\pi}{3}$ 对称, 它的周期是 π , 则 ().

A. $f(x)$ 的图象过点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

B. $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上是减函数

C. $f(x)$ 的一个对称中心是 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$

D. $f(x)$ 的最大值是 A

【答案】C

【解析】函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的周期 π ,

所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$, 函数图象关于直线 $x = \frac{2\pi}{3}$ 对称,

所以 $2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

因为 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

函数的解析式为 $f(x) = A \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

$f(x)$ 的图象过点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 不正确;

$f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上不是减函数, 所以B不正确;

$f(x)$ 的最大值是 $|A|$, 所以D不正确;

$x = \frac{5\pi}{12}$ 时, 函数 $f(x) = 0$,

所以 $f(x)$ 的一个对称中心是 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ 正确.

故选C.

【标注】【素养】逻辑推理

【知识点】正弦函数的图象和性质

10. 把函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 若 $g(x)$ 为奇函数, 且两个相邻零点之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 则 $f(x)$ 的解析式为 ().

- A. $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
B. $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
C. $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$
D. $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

【答案】B

【解析】略.

【标注】【知识点】已知正弦型函数性质求解析式

11. 将函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin(\pi - x) \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin^2 x - 1$ 图像向左平移 ($\varphi > 0$) 个单位后图像关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 中心对称, 则 φ 的值可能为 ().

- A. $\frac{\pi}{6}$
B. $\frac{3\pi}{4}$
C. $\frac{7\pi}{12}$
D. $\frac{2\pi}{3}$

【答案】 B

【解析】 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2\sin^2 x - 1$

$$= \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$$

$$= 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$f(x)$ 向左平移 φ 个单位得:

$$y = 2\sin\left[2(x + \varphi) - \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin\left(2x + 2\varphi - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\therefore y = 2\sin\left(2x + 2\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \text{关于}\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) \text{对称},$$

$$\therefore 2 \times \frac{\pi}{3} + 2\varphi - \frac{\pi}{6} = k\pi,$$

$$\therefore \varphi = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4},$$

$$\varphi \text{可能为} \frac{3\pi}{4},$$

故选B.

【标注】 【知识点】 正余弦型、正切型函数图象变换

三、零点问题

12. 已知函数 $f(x) = \sin 2\omega x - 2\cos^2 \omega x + 1 (\omega > 0)$, $x \in \mathbf{R}$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围为 _____.

【答案】 $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{4}, \frac{9}{8}\right]$

【解析】 $f(x) = \sin 2\omega x - 2 \times \frac{1 + \cos 2\omega x}{2} + 1 = \sqrt{2}\sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{4}\right) (\omega > 0),$

$$\text{令 } 2\omega x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow 2\omega x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{2\omega},$$

$$\text{令 } \frac{\pi}{2} < \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{2\omega} < \pi \Leftrightarrow \omega - \frac{1}{4} < k < 2\omega - \frac{1}{4},$$

又 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 无0点,

$$\Leftrightarrow \omega - \frac{1}{4} < k < 2\omega - \frac{1}{4} \text{ 中无整数解 } (\omega > 0),$$

$$\text{又 } f(x) \text{ 在 } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ 无零点} \Rightarrow \frac{T}{2} \geq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \omega \leq 2,$$

$$\text{则 } \left(\omega - \frac{1}{4}, 2\omega - \frac{1}{4}\right) \leq (0, 1) \text{ 或 } \left(\omega - \frac{1}{4}, 2\omega - \frac{1}{4}\right) \leq (1, 2) \text{ 或}$$

$$\left(\omega - \frac{1}{4}, 2\omega - \frac{1}{4}\right) \leq (2, 3),$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega - \frac{1}{4} \geq 0 \\ 2\omega - \frac{1}{4} \leq 1 \\ 0 < \omega \leq 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} \omega - \frac{1}{4} \geq 1 \\ 2\omega - \frac{1}{4} \leq 2 \\ 0 < \omega \leq 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} \omega - \frac{1}{4} \geq 2 \\ 2\omega - \frac{1}{4} \leq 3 \\ 0 < \omega \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < \omega \leq \frac{5}{8} \text{或} \frac{5}{4} \leq \omega \leq \frac{9}{8}.$$

故答案为: $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{4}, \frac{9}{8}\right]$.

【标注】【知识点】零点、交点、根的等价转化；函数零点的概念；正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质；辅助角公式；倍角、和差角公式综合

13. 设函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$, 其中 $\omega > 0$. 若函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上恰有 2 个零点, 则 ω 的取值范围是 _____.

【答案】 $\left[\frac{5}{6}, \frac{4}{3}\right)$

【解析】 根据题意, 设 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 在 y 轴右侧与 x 轴的第二个交点的横坐标为 α , 第三个交点的横坐标为 β ,

$$\text{则有 } \omega \times \alpha + \frac{\pi}{3} = 2\pi, \omega \times \beta + \frac{\pi}{3} = 3\pi,$$

$$\text{解可得 } \alpha = \frac{\frac{5\pi}{3}}{\omega}, \beta = \frac{\frac{8\pi}{3}}{\omega}.$$

$$\text{若函数 } f(x) \text{ 在 } [0, 2\pi] \text{ 上恰有 2 个零点, 则 } \frac{\frac{5\pi}{3}}{\omega} \leq 2\pi < \frac{\frac{8\pi}{3}}{\omega},$$

$$\text{解可得: } \frac{5}{6} \leq \omega < \frac{4}{3}.$$

$$\text{即 } \omega \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{5}{6}, \frac{4}{3}\right).$$

$$\text{故答案为: } \left[\frac{5}{6}, \frac{4}{3}\right).$$

【标注】【知识点】正弦型函数与零点综合问题；正弦型函数 ω 求最值问题

14. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x - \cos \omega x$ ($\omega > \frac{1}{4}$, $x \in \mathbf{R}$), 若 $f(x)$ 的图像的任意一条对称轴与 x 轴的交点的横坐标都不属于区间 $(2\pi, 3\pi)$, 则 ω 的取值范围是 ().

A. $\left(\frac{3}{8}, \frac{7}{12}\right)$

B. $\left[\frac{3}{8}, \frac{11}{12}\right]$

C. $\left(\frac{3}{8}, \frac{7}{12}\right) \cup \left(\frac{7}{8}, \frac{11}{12}\right)$

D. $\left[\frac{3}{8}, \frac{7}{12}\right] \cup \left[\frac{7}{8}, \frac{11}{12}\right]$

【答案】D

【解析】 $\because \omega > \frac{1}{4} > 0$, 由题可知, $\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2\omega} \geq 3\pi - 2\pi = \pi$, 得 $\omega \leq 1$.

根据辅助角公式, $f(x) = \sin \omega x - \cos \omega x = \sqrt{2} \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right)$

令 $\omega x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $x = \frac{(4k+3)\pi}{4\omega} (k \in \mathbf{Z})$,

所以 $f(x)$ 的图像的对称轴为 $x = \frac{(4k+3)\pi}{4\omega} (k \in \mathbf{Z})$

$\because \omega > \frac{1}{4} > 0$, 根据题意, $x \leq 2\pi$ 或 $x \geq 3\pi$, 解得 $\omega \geq \frac{4k+3}{8}$ 或 $\omega \leq \frac{4k+3}{12} (k \in \mathbf{Z})$,

$\therefore \frac{1}{4} < \omega \leq 1$, $\therefore k=0$ 或 $k=2$, 得 $\frac{3}{8} \leq \omega \leq \frac{7}{12}$ 或 $\frac{7}{8} \leq \omega \leq \frac{11}{12}$.

故选D.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质；正弦型函数的图象与性质

四、化简+性质

15. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 3\cos^2 x$, $x \in \mathbf{R}$, 求:

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间.

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上的最大值和最小值.

【答案】(1) $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}$.

(2) 4和1.

【解析】(1) $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \sqrt{3} \sin 2x + \frac{3(1 + \cos 2x)}{2}$

$$= 2 + \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x$$

$$= 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2,$$

$$\therefore \text{最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi,$$

$$\therefore -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore f(x) \text{ 的单调递增区间为: } \left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}.$$

$$(2) f(x) = 2 + 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right],$$

$$\therefore 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right],$$

$$\therefore \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$\therefore f(x) \in [1, 4].$$

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

16. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin\left(ax - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(ax - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos^2\left(ax - \frac{\pi}{4}\right)$ ($a > 0$)，且函数的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 。

(1) 求 a 的值。

(2) 求 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值。

【答案】 (1) 2。

(2) 最大值为 3，最小值为 $1 - \sqrt{3}$ 。

【解析】 (1) 函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin\left(ax - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(ax - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos^2\left(ax - \frac{\pi}{4}\right)$ ($a > 0$)，

$$\text{化简可得：} f(x) = \sqrt{3}\sin\left(2ax - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2ax - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$= -\sqrt{3}\cos 2ax + \sin 2ax + 1$$

$$= 2\sin\left(2ax - \frac{\pi}{3}\right) + 1,$$

$\therefore$ 函数的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 。即 $T = \frac{\pi}{2}$ ，

$$\text{由 } T = \frac{2\pi}{2a}, \text{ 可得 } a = 2,$$

$\therefore a$ 的值为 2。

$$\text{故 } f(x) = 2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) + 1.$$

$$(2) \ x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ 时, } 4x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right],$$

当 $4x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值为 $1 - \sqrt{3}$ ，

当 $4x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值为 $2 \times 1 + 1 = 3$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 3，最小值为 $1 - \sqrt{3}$ 。

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质；辅助角公式

17. 设函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{2}\right)$ ，其中 $0 < \omega < 3$ ，已知 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ 。

(1) 求 ω 。

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍（纵坐标不变），再将得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，得到函数 $y = g(x)$ 的图象，求 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上的最小值。

【答案】 (1) 2。

(2) $-\frac{3}{2}$ 。

【解析】 (1) $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \sin \omega x \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos \omega x - \cos \omega x$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{3}{2} \cos \omega x \\
&= \sqrt{3} \sin \left(\omega x - \frac{\pi}{3} \right), \\
&\text{且 } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \sin \left(\frac{\pi}{6} \omega - \frac{\pi}{3} \right) = 0. \\
&\therefore \frac{\pi}{6} \omega - \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z}), \\
&\therefore \omega = 6k + 2 (k \in \mathbf{Z}), \\
&\therefore 0 < \omega < 3, \\
&\therefore 0 < 6k + 2 < 3 (k \in \mathbf{Z}), \\
&\therefore -\frac{1}{3} < k < \frac{1}{6} (k \in \mathbf{Z}), \\
&\therefore k = 0, \omega = 2.
\end{aligned}$$

(2) 由(1)知 $\omega = 2$, 则 $f(x) = \sqrt{3} \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$,
 由题目要求, $g(x) = \sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3} \sin \left(x - \frac{\pi}{12} \right)$,
 $\therefore x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$,
 $\therefore x - \frac{\pi}{12} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right]$.
 当 $x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3}$ 时, 即 $x = -\frac{\pi}{4}$ 时, $g(x)$ 取得最小值 $-\frac{3}{2}$.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质；函数的值域

五、综合创新

18. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 单调, 且 $f(0) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 则正数 ω 的值为 _____.

【答案】 2

【解析】 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , $\therefore f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调,

$$\therefore \frac{T}{2} \geq \frac{\pi}{3} - 0, \text{ 得 } T \geq \frac{2\pi}{3}, \text{ 即 } \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{2\pi}{3}, \text{ 则 } 0 < \omega \leq 3,$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \text{ 上单调, 且 } f(0) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -f\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\therefore \text{知 } f(x) \text{ 的一个零点 } x = \frac{0 + \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{函数的一个对称轴 } \frac{0 + \frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{5\pi}{12},$$

$$\text{则零点和对称轴的距离 } d = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{若 } d = \frac{T}{4}, \text{ 即 } \frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}, \text{ 即 } T = \pi, \text{ 即 } \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \text{ 则 } \omega = 2, \text{ 满足条件,}$$

若 $d = \frac{3}{4}T$, 即 $\frac{3}{4}T = \frac{\pi}{4}$, 即 $T = \frac{\pi}{3}$, 即 $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{3}$, 则 $\omega = 6$, 不满足条件.

故答案为: 2.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

19. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 在 $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上有最大值, 但没有最小值, 则 ω 的取值范围是 _____.

【答案】 $\left(\frac{3}{4}, 3\right)$

【解析】因为函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 在 $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上有最大值, 但没有最小值,

所以 $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} < T$, 即 $\frac{\pi}{4} < \frac{2\pi}{\omega}$, 解得 $0 < \omega < 8$,

且存在 $k \in \mathbb{Z}$,

使得 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \omega \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \omega \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$,

因为 $0 < \omega < 8$,

所以 $\begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi > \omega \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \omega \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} < \frac{11\pi}{12} \end{cases}$,

所以 $-\frac{1}{8} < k < \frac{17}{24}$,

所以 $k = 0$,

所以 $-\frac{\pi}{2} < \omega \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} < \omega \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$,

由 $-\frac{\pi}{2} < \omega \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, 解得 $-9 < \omega < 3$,

由 $\frac{\pi}{2} < \omega \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$, 解得 $\frac{3}{4} < \omega < \frac{15}{4}$,

所以 $\frac{3}{4} < \omega < 3$.

故答案为 $\left(\frac{3}{4}, 3\right)$.

【标注】【知识点】正弦型函数的图象与性质; 正弦函数的图象和性质

20. 已知函数 $f(x) = 2\sin\omega x \cos^2\left(\frac{\omega x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\omega x$ ($\omega > 0$) 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上是增函数, 且在区间 $[0, \pi]$ 上恰好取得一次最大值, 则 ω 的取值范围是 ().

A. $\left(0, \frac{3}{5}\right]$

B. $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$

C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$

D. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

【答案】 B

【解析】 $\because 2\cos^2\left(\frac{\omega x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin \omega x,$

$$f(x) = \sin \omega x(1 + \sin \omega x) - \sin^2 \omega x = \sin \omega x,$$

$$\text{令 } \omega x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ 可得, } x = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega},$$

$\therefore f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上恰好取得一次最大值,

$$\therefore 0 \leq \frac{\pi}{2\omega} \leq \pi,$$

$$\text{解得 } \omega \geq \frac{1}{2},$$

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\text{解得 } -\frac{\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} \leq x \leq \frac{\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega},$$

$\therefore f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上是增函数,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{2\pi}{3} \geq -\frac{\pi}{2\omega} \\ \frac{5\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2\omega} \end{cases}, \text{ 解得 } \omega \leq \frac{3}{5}.$$

$$\text{综上, } \frac{1}{2} \leq \omega \leq \frac{3}{5}.$$

故选B.

【标注】 【知识点】 正弦函数的图象和性质；正弦型函数的图象与性质