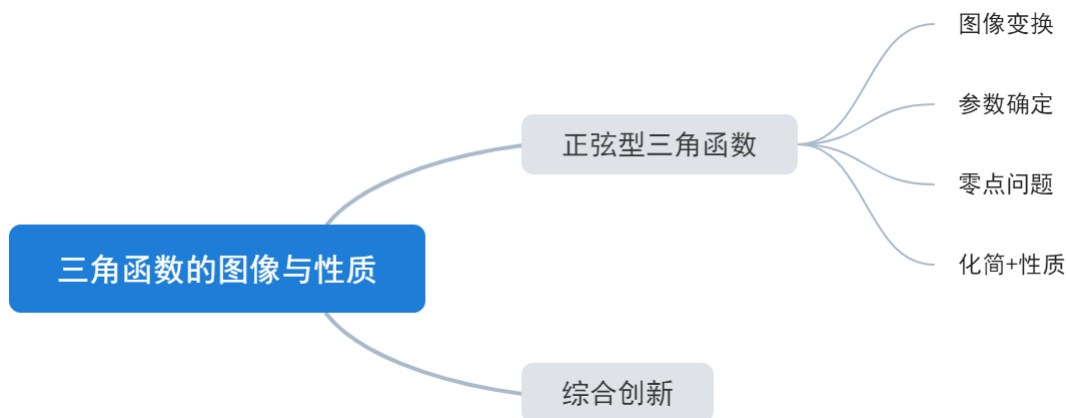


第三讲-三角函数图像性质

1. 知识梳理



一、 正弦型三角函数性质综合

1. 真题分析

🔗 图像变换

1. 将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，所得图象对应的函数（ ）。

- A. 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增
- B. 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ 上单调递减
- C. 在区间 $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递增
- D. 在区间 $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ 上单调递减

【答案】 A

【解析】 方法一： $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ 向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度得

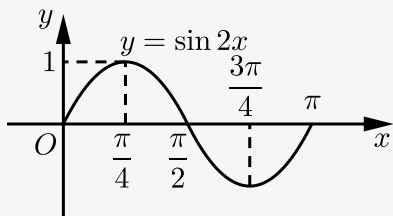
$$y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{10}\right) + \frac{\pi}{5}\right] = \sin 2x,$$

$2x \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ 时单调递增，即 $x \in \left[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right]$ 时单调递增；

$2x \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ 时单调递减，即 $x \in \left[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4}\right]$ 时单调递减；

当 $k = 1$ 时， y 在 $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增，则 A 正确。

方法二：因为将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，
得到函数 $y = \sin 2x$ 的图象，
用五点法作出草图，如图：



从图中可以看出选项A正确，其他都不正确。

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

备注：2018年高考真题天津卷理科第6题

2. 将函数 $f(x) = \sin \omega x$ (其中 $\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，所得图象经过点 $(\frac{3\pi}{4}, 0)$ ，则 ω 的最小值是()。

A. $\frac{1}{3}$

B. 1

C. $\frac{5}{3}$

D. 2

【答案】 D

【解析】 将函数 $f(x) = \sin \omega x$ (其中 $\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，

所得对应的函数为 $y = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\omega\right)$ 。

$\therefore$ 所得图象经过点 $(\frac{3\pi}{4}, 0)$ ，

$\therefore \sin\left(\frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{4}\omega\right) = \sin \frac{\omega\pi}{2} = 0$ ，

$\therefore \frac{\omega\pi}{2} = k\pi$ ，即 $\omega = 2k$ ，($k \in \mathbf{Z}$)，

$\therefore \omega$ 的最小值为2。

故选：D。

【标注】【知识点】正弦型函数 ω 求最值问题

备注：2012年高考真题天津卷文科第7题

分析：本题考察平移变换和性质综合，首先根据题目给出的图像变换要求结合图像变换规则可得出变换之后函数解析式为 $y = \sin\left(\omega\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$ ，又图像满足的性质是经过点 $(\frac{3\pi}{4}, 0)$ ，可得

$\sin \frac{\pi\omega}{2} = 0$ ，则有 $\frac{\pi\omega}{2} = k\pi$ ，即 $\omega = 2k$ ，又因为 $k \in \mathbf{Z}$ ， $\omega > 0$ ，故而 $k = 1$ 时， ω 的最小值为2。

 参数确定

3. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x + \cos\omega x (\omega > 0), x \in \mathbf{R}$, 在曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 的交点中, 若相邻交点距离的最小值为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 ().
- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. π D. 2π

【答案】C

【解析】方法一: $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$.

令 $f(x) = 1$, 则 $\omega x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$.

则 $\omega|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{2}{3}\pi$, 故 $\omega = 2$, 最小正周期为 π .

方法二: $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x + \cos\omega x = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$, 由 $2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$, 得

$\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 设 x_1, x_2 分别为距离最小的相邻交点的横坐标, 则

$\omega x_1 + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \omega x_2 + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$, 两式相减, 得

$x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\omega = 2$, 故 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 π .

故选C.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

备注: 2014年高考真题天津卷文科第8题

分析: 本题考察伸缩变化对于图像的影响, 据此可以确定函数周期的变化, $y = \sin x$ 与 $y = \frac{1}{2}$ 的交点中, 相邻交点距离最小值为 $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$, 考虑到平移变换对于图像形状无影响, 故而

$y = \sin(\omega x + \varphi)$ 与 $y = \frac{1}{2}$ 的交点中, 相邻交点距离的最小值为 $\frac{\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}}{\omega} = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3}$, 则可得 $\omega = 2$, 进一步可通过 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 求出周期.

4. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi)$ 是奇函数, 将 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍 (纵坐标不变), 所得图象对应的函数为 $g(x)$, 若 $g(x)$ 的最小正周期为 2π , 且 $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, 则 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = ()$.
- A. -2 B. $-\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

【答案】C

【解析】 $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore \varphi = 0$,

则 $f(x) = A\sin(\omega x)$

将 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变), 所得图象对应的函数为 $g(x)$.

$$\text{即 } g(x) = A \sin\left(\frac{1}{2}\omega x\right)$$

$\therefore g(x)$ 的最小正周期为 2π ,

$$\therefore \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\omega} = 2\pi, \text{ 得 } \omega = 2,$$

$$\text{则 } g(x) = A \sin x, f(x) = A \sin 2x,$$

$$\text{若 } g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \text{ 则 } g\left(\frac{\pi}{4}\right) = A \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}A = \sqrt{2}, \text{ 即 } A = 2,$$

$$\text{则 } f(x) = 2 \sin 2x, \text{ 则 } f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2 \sin \frac{3\pi}{4} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

故选: C.

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换; 已知正弦型函数图象求参数值

备注: 2019年高考真题天津卷文科第7题

分析: 本题考察正弦型三角函数参数确定, 首先根据函数为奇函数可得 $f(0) = 0$, 即 $\sin \varphi = 0$, 则 $\varphi = k\pi$, 又 $-\pi < \varphi < \pi$, 则可得 $-1 < k < 1$, 又因为 $k \in \mathbb{Z}$, 所以 $k = 0$, 可得 $\varphi = 0$, 根据伸缩变换可得 $g(x) = A \sin x, f(x) = A \sin 2x$, 因为 $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, 则 $A = 2$, 故而

$$f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2 \sin \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

5. 已知函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi), x \in \mathbb{R}$, 其中 $\omega > 0, -\pi < \varphi \leq \pi$, 若 $f(x)$ 的最小正周期为 6π , 且当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 则().

A. $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 0]$ 上是增函数

B. $f(x)$ 在区间 $[-3\pi, -\pi]$ 上是增函数

C. $f(x)$ 在区间 $[3\pi, 5\pi]$ 上是减函数

D. $f(x)$ 在区间 $[4\pi, 6\pi]$ 上是减函数

【答案】 A

【解析】 $\therefore \frac{2\pi}{\omega} = 6\pi, \therefore \omega = \frac{1}{3}.$

$$\text{又 } \therefore \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{2} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \text{ 且 } -\pi < \varphi < \pi,$$

$$\therefore \text{当 } k = 0 \text{ 时, } \varphi = \frac{\pi}{3}, f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{要使 } f(x) \text{ 递增, 须有 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{解之得 } 6k\pi - \frac{5\pi}{2} \leq x \leq 6k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{当 } k = 0 \text{ 时, } -\frac{5}{2}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } \left[-\frac{5}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 上递增.}$$

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

6. 设函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $\omega > 0$, $|\varphi| < \pi$. 若 $f(\frac{5\pi}{8}) = 2$, $f(\frac{11\pi}{8}) = 0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π , 则 ().

- A. $\omega = \frac{2}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{12}$
 B. $\omega = \frac{2}{3}$, $\varphi = -\frac{11\pi}{12}$
 C. $\omega = \frac{1}{3}$, $\varphi = -\frac{11\pi}{24}$
 D. $\omega = \frac{1}{3}$, $\varphi = \frac{7\pi}{24}$

【答案】 A

【解析】 $f(\frac{5\pi}{8}) = 2\sin(\frac{5\pi}{8} \times \omega + \varphi) = 2$, $f(\frac{11\pi}{8}) = 2\sin(\frac{11\pi}{8} \times \omega + \varphi) = 0$,

所以 $\begin{cases} \frac{5\pi}{8} \times \omega + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, m \in \mathbf{Z} \\ \frac{11\pi}{8} \times \omega + \varphi = n\pi, n \in \mathbf{Z} \end{cases}$, 解得

$\begin{cases} \omega = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}(n - 2m), n \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{Z} \\ \varphi = \frac{11\pi}{12} + (\frac{11}{3}m - \frac{5}{6}n)\pi, n \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{Z} \end{cases}$

选项A, $\omega = \frac{2}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{12}$, 即 $\begin{cases} n - 2m = 1 \\ \frac{11}{3}m - \frac{5}{6}n = -\frac{5}{6} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m = 0 \\ n = 1 \end{cases}$, 合题;

选项B, $\omega = \frac{2}{3}$, $\varphi = -\frac{11\pi}{12}$, 即 $\begin{cases} n - 2m = 1 \\ \frac{11}{3}m - \frac{5}{6}n = -\frac{11}{6} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = 0 \end{cases}$, 不合题;

选项C, $\omega = \frac{1}{3}$, $\varphi = -\frac{11\pi}{24}$, 即 $\begin{cases} n - 2m = \frac{3}{4} \\ \frac{11}{3}m - \frac{5}{6}n = -\frac{11}{8} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m = -\frac{3}{8} \\ n = 0 \end{cases}$, 不合题;

选项D, $\omega = \frac{1}{3}$, $\varphi = \frac{7\pi}{24}$, 即 $\begin{cases} n - 2m = \frac{3}{4} \\ \frac{11}{3}m - \frac{5}{6}n = -\frac{5}{8} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m = 0 \\ n = \frac{3}{4} \end{cases}$, 不合题;

综上, 故选A.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】已知正弦型函数性质求解析式

🔴 零点问题

7. 已知函数 $f(x) = \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$), $x \in \mathbf{R}$. 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是 ().

- A. $(0, \frac{1}{8}]$
 B. $(0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{5}{8}, 1)$
 C. $(0, \frac{5}{8}]$
 D. $(0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{5}{8}]$

【答案】 D

【解析】 $f(x) = \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} = \frac{1 - \cos \omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(\omega x - \frac{\pi}{4} \right),$
 $f(x) = 0 \Rightarrow \sin \left(\omega x - \frac{\pi}{4} \right) = 0,$
 所以, $x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{\omega} \notin (\pi, 2\pi), k \in \mathbf{Z},$
 因此 $\omega \notin \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right) \cup \left(\frac{5}{8}, \frac{5}{4} \right) \cup \left(\frac{9}{8}, \frac{9}{4} \right) \cup \dots = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right) \cup \left(\frac{5}{8}, +\infty \right),$
 $\omega = \left(0, \frac{1}{8} \right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{8} \right],$ 选D.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

备注：2016年高考真题天津卷文科第8题

分析：本题考察含参正弦型三角函数的零点，在处理思路我们需要先带着参数写出函数的零点，就本

题而言，可以得到零点表示为 $x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{\omega}$ ，两个相邻的零点之间距离为 $\frac{\pi}{\omega}$ ，故要保证在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点，则区间长度需要小于等于相邻零点之间的距离，即 $\frac{\pi}{\omega} \geq \pi$ ，则 $\omega \leq 1$ ，令 $k \leq -1$ 或者 $k \geq 2$ 时，此时对应的零点一定不在给定区间，故而只要保证 $k = 0, 1$ 所对应的零点

$$\frac{\pi}{4\omega}, \frac{5\pi}{4\omega} \text{ 均不在区间 } (\pi, 2\pi) \text{ 内，即可得 } \begin{cases} \frac{\pi}{4\omega} \leq \pi \text{ 或者 } \frac{\pi}{4\omega} \geq 2\pi \\ \frac{5\pi}{4\omega} \leq \pi \text{ 或者 } \frac{5\pi}{4\omega} \geq 2\pi \end{cases} \text{ 即可求解出来 } \omega \text{ 的范围。}$$

化简+性质

8. 已知函数 $f(x) = 4 \tan x \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3}.$

- (1) 求 $f(x)$ 的定义域与最小正周期；
 (2) 讨论 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$ 上的单调性.

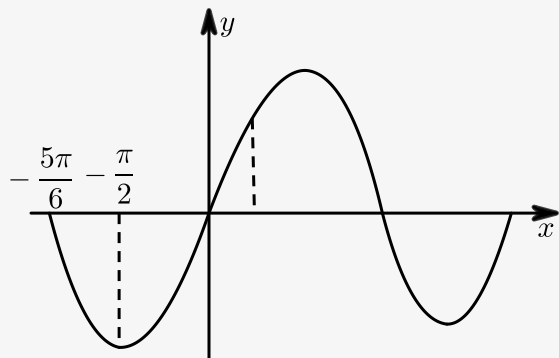
【答案】 (1) 定义域为 $\left\{ x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}, T = \pi.$

(2) 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4} \right)$ 上单调递增，
 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12} \right)$ 上单调递减

【解析】 (1) $f(x) = 4 \tan x \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3}$
 $= 4 \sin x \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) - \sqrt{3}$
 $= \sin 2x + \sqrt{3}(1 - \cos 2x) - \sqrt{3}$
 $= \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$
 $= 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right).$
 所以定义域为 $\left\{ x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}, T = \pi.$

$$(2) -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, -\frac{5\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6},$$

设 $t = 2x - \frac{\pi}{3}$, $\therefore y = \sin t$ 在 $t \in \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right]$ 时单调递减, 在 $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时单调递增



由 $-\frac{5\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{2}$ 解得 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq -\frac{\pi}{12}$, 由 $-\frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}$ 解得 $-\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$
 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}\right)$ 上单调递减

【标注】【知识点】求固定区间正弦型函数值域；正弦函数的图象和性质；辅助角公式

9. 已知函数 $f(x) = \cos x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 求 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

【答案】 (1) $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \pi$.

(2) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 $\frac{1}{4}$, 最小值为 $-\frac{1}{2}$.

【解析】 (1) 由已知, 有 $f(x) = \cos x \cdot \left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) - \sqrt{3}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}$
 $= \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \cos 2x) + \frac{\sqrt{3}}{4}$
 $= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$

所以, $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

(2) 方法一: 因为 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}\right]$ 上是减函数, 在区间 $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上是增函数.

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4}, f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

所以, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 $\frac{1}{4}$, 最小值为 $-\frac{1}{2}$.

方法二: $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right],$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-1, \frac{1}{2}\right], \text{ 从而 } f(x) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right].$$

即函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 $\frac{1}{4}$, 最小值为 $-\frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】求固定区间正弦型函数值域；倍角、和差角公式综合

2. 思路总结

题型总结：

- 1、图像变换；熟练掌握三角函数伸缩变换和图像变换的规则
- 2、参数确定；根据周期确定 ω ，根据最值确定 A ，根据函数图像上的特殊点确定 φ
- 3、零点问题；带参数表示零点，结合零点情况确定参数范围
- 4、化简+性质；化简需要熟练掌握正余弦的和差角公式、二倍角降次公式以及辅助角公式，性质求解需要熟练掌握正弦型三角函数的对称轴和对称中心、单调区间、值域、最小正周期的求解方式

3. 模拟演练

🔗 图像变换

10. 将函数 $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，所得图象对应的函数（ ）.
- A. 在区间 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递减
 - B. 在区间 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递增
 - C. 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减
 - D. 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增

【答案】 B

【解析】 由题可知，将函数 $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到函数 $y = 3 \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 3 \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象.

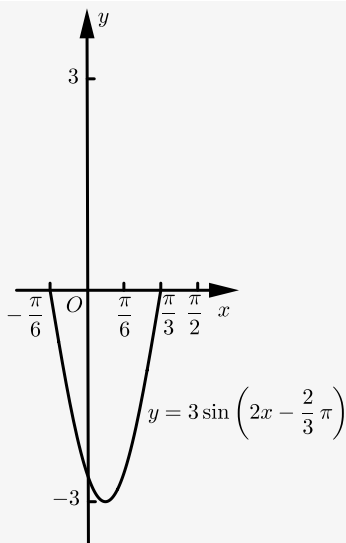
$$\text{由 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{得 } \frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

则函数 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$.

令 $k = 0$ 得函数 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 的一个递增区间为 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ ，故B正确.

画出函数 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上的简图，如图，



可知 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上不具有单调性，故C，D错误。
 故选B。

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

11. 要得到函数 $y = 3 \cos x$ 的图象，只需将函数 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点（ ）。
- A. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ （纵坐标不变），所得图象再向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位
 - B. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ （纵坐标不变），所得图象再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位
 - C. 横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），所得图象向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位
 - D. 横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），所得图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

【答案】 C

【解析】 将函数 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），
 可得到函数 $y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，
 再向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位，
 可得到函数 $y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = 3 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos x$ 的图象。
 故选C。

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换

12. 将函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) 图象上每一点的横坐标伸长为原来的2倍（纵坐标不变），再向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y = \cos x$ 的图象，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为（ ）。

- A. $\left[2k\pi - \frac{\pi}{12}, 2k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$
 B. $\left[2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}$
 C. $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$
 D. $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{5\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}$

【答案】C

【解析】将函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) 图象上每一点的横坐标伸长为原来的2倍(纵坐标不变),

可得 $y = \sin\left(\frac{1}{2}\omega x + \varphi\right)$ 的图象;

再向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度, 可得 $y = \sin\left(\frac{1}{2}\omega x + \frac{5\omega\pi}{12} + \varphi\right)$ 的图象,

再根据得到 $y = \cos x$ 的图象, 可得 $\frac{1}{2} \cdot \omega = 1$,

$\therefore \omega = 2$, 且 $\frac{5\omega\pi}{12} + \varphi = \frac{5\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

令 $k = 0$, 可得 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$,

$\therefore f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$,

令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 解得 $k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}$,

可得函数的增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$,

故选C.

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换; 正弦型函数的图象与性质; 正弦函数的图象和性质

13. 将函数 $f(x) = \sin \omega x$ (其中 $\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位, 所得图象经过点 $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$, 则

ω 的最小值是 ().

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

【答案】B

【解析】因为函数 $f(x) = \sin \omega x$ (其中 $\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个

长度单位得 $y = \sin \omega\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,

所以 $0 = \sin \omega\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$, $\frac{3\pi}{2}\omega = k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

$\therefore \omega = \frac{2}{3}k$,

因为 $\omega > 0$ ，所以 $\omega_{\min} = \frac{2}{3}$ ，

故选B.

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值；正弦函数的图象和性质

14. 将函数 $f(x) = \cos(x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 象上各点的横坐标伸长到原来的2倍 (纵坐标不变)，再把得到的函数向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，所得的函数图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称，则 φ 的值为 () .

A. $-\frac{5}{12}\pi$

B. $-\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{12}$

【答案】 B

【解析】 函数 $f(x) = \cos(x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 图象上各点的横坐标伸长到原来的2倍后得到

$y = \cos\left(\frac{1}{2}x + \varphi\right)$ 的图象，

再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得 $y = \cos\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \varphi\right]$ 的图象，

因为 $y = \cos\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \varphi\right]$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称，

$\therefore \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，解得 $\varphi = k\pi - \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$ ，

当 $k = 0$ 时， $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

故选B .

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换

参数确定

15. 已知 $\omega > 0$ ，在函数 $y = 2\sin(\omega x + \theta)$ 与 $y = 2\cos(\omega x + \theta)$ 的图象的交点中，距离最短的两个交点间的距离为 $2\sqrt{3}$ ，则 $\omega =$ () .

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\theta}{2}$

D. 1

【答案】 B

【解析】 $\because y = 2\sin(\omega x + \theta)$ 与 $y = 2\cos(\omega x + \theta)$ 图像的交点，

$\therefore$ 根据三角函数线可得出交点，

$$\left(\frac{k_1\pi + \frac{\pi}{4} - \theta}{\omega}, \sqrt{2} \right);$$

$$\left(\frac{k_2\pi + \frac{5}{4}\pi - \theta}{\omega}, -\sqrt{2} \right);$$

$k, k_2 \in \mathbf{Z}$.

$\therefore$ 距离最短的两个交点距离为 $2\sqrt{3}$,

$\therefore$ 这两个交点在同一周期内,

$$\therefore 12 = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\pi}{4} - \theta - \frac{5}{4}\pi + \theta \right)^2 + (-\sqrt{2} - \sqrt{2})^2,$$

$$\therefore \omega = \frac{\pi}{2}.$$

故选B.

【标注】【知识点】三角函数线；正弦型函数的图象与性质；余弦型三角函数的图象与性质；两点间距离公式

16. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位以后得到一个偶函数, 则下列判断正确的是 ().
- A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π
- B. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi \right]$ 上单调递增
- C. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{7\pi}{12}, 0 \right)$ 对称
- D. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{7\pi}{12}$ 对称

【答案】 B

【解析】 A 选项: $\because$ 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$),

其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$,

$$\therefore \omega = 2, f(x) = \sin(2x + \varphi),$$

将函数的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位后,

得到的图象对应的函数为 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6} + \varphi\right)$ 为偶函数,

$$\therefore \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}, f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),$$

故 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 故A错误;

B 选项: 在 $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi \right]$ 上, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{3} \right]$,

故函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi \right]$ 上单调递增, 故B正确;

C 选项: 当 $x = \frac{7\pi}{12}$ 时, $f(x) = -1$, 故C错误;

故选 B.

17. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi) + 2\cos^2\left(\frac{\omega x}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)$ (其中 $\omega > 0$, $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) , 当 $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ 时, $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$, $f(x) = f\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$, 将 $f(x)$ 的图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数为 $g(x)$, 则 $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = (\quad)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$ B. $\sqrt{3} + 1$

C. $\frac{3}{2}$ D. 2

【解析】 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi) + 1 + \cos(\omega x + \varphi) = 2 \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{\pi}{6}\right) + 1$,
 $f'(x) = 2\omega \cos\left(\omega x + \varphi + \frac{\pi}{6}\right)$,
 $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$,
 即 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow T = \pi \rightarrow \omega = 2$.
 $f(x) = f\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \rightarrow f(x)$ 关于 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称 .
 $\therefore f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}) \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$,
 $\therefore f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$, 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 得到 $g(x) = 2 \sin 2x + 1$,
 $\therefore g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + 1$.
 故选 B .

18. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象上相邻的一个最大值点与对称中心分别为 $(\frac{\pi}{18}, 3)$, $(\frac{2\pi}{9}, 0)$, 则函数 $f(x)$ 的单调增区间为 ().

A. $(\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{9}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9})$, $k \in \mathbf{Z}$

B. $(\frac{2k\pi}{3} - \frac{4\pi}{9}, \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{9})$, $k \in \mathbf{Z}$

C. $(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{7\pi}{18})$, $k \in \mathbf{Z}$

D. $(\frac{2k\pi}{3} - \frac{5\pi}{18}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18})$, $k \in \mathbf{Z}$

13

【解析】由题意得，对称中心 $\left(\frac{2\pi}{9}, 0\right)$ ，

可得 $b = 0$ ，

图象上相邻的一个最大值点与对称中心分别为 $\left(\frac{\pi}{18}, 3\right)$ ， $\left(\frac{2\pi}{9}, 0\right)$ ，

$$\therefore \frac{1}{4}T = \frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{18},$$

$$\text{即 } T = \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 3,$$

$$\therefore A = -3,$$

$$\therefore f(x) = -3\sin(3x + \varphi) = 0,$$

$$\text{得 } \frac{2\pi}{3} + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore |\varphi| < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \varphi = -\frac{\pi}{3},$$

$$\therefore f(x) = -3\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{令 } -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq 3x - \frac{\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{得 } \frac{2}{3}k\pi - \frac{5\pi}{18} \leq x \leq \frac{2}{3}k\pi - \frac{\pi}{18}.$$

故选D.

【标注】【知识点】正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质

零点问题

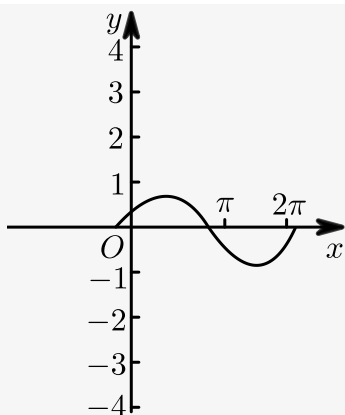
19. 已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2}$ ，($\omega > 0, x \in \mathbf{R}$)，若 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点，则 ω 的取值范围是() .

- A. $\left(0, \frac{5}{12}\right]$
B. $\left(0, \frac{5}{12}\right] \cup \left[\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right]$
C. $\left(0, \frac{5}{6}\right]$
D. $\left(0, \frac{5}{12}\right] \cup \left[\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right]$

【答案】D

【解析】函数 $f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cos \omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，

可得 $T = \frac{2\pi}{\omega} \geq \pi, 0 < \omega \leq 2$ ， $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点，函数的图象如图两种类型，



结合三角函数可得： $\begin{cases} \omega\pi + \frac{\pi}{6} \geq 0 \\ 2\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq \pi \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \omega\pi + \frac{\pi}{6} \geq \pi \\ 2\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \end{cases}$ ，

解得 $\omega \in \left(0, \frac{5}{12}\right] \cup \left[\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right]$ 。

故选：D。

【标注】【知识点】正弦型函数 ω 求最值问题

20. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\omega x + \frac{2\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$)，($x \in \mathbf{R}$)，若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内没有零点，则 ω 的取值范围是 _____。

【答案】 $\left(0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]$

【解析】 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\omega x + \frac{2\pi}{3}\right)$
 $= \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$
 $= \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$
 $= \frac{1}{2} \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 。

$$T = \frac{2\pi}{2\omega}, \frac{T}{2} \geq \pi - \frac{\pi}{2}, \therefore \omega \leq 1$$

$$f(x) = 0 \text{ 时, } 2\omega x + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$x = \frac{k\pi - \frac{\pi}{3}}{2\omega} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

$$\omega \in \left(\frac{k}{2} - \frac{1}{6}, k - \frac{1}{3}\right) k \in \mathbf{Z}.$$

此时 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内有零点，

故当 $\omega \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]$ 时无零点，

故答案为： $\left(0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]$ 。

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；函数零点的概念；正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质

 化简+性质

21. 已知函数 $f(x) = -\sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 6\sin x \cos x - 2\cos^2 x + 1, x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

【答案】 (1) π .

(2) $2\sqrt{2}, -2$.

【解析】 (1) $\because \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$

$$\therefore f(x) = -\sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 6\sin x \cos x - 2\cos^2 x + 1$$

$$= -\sin 2x - \cos 2x + 3\sin 2x - (1 + \cos 2x) + 1$$

$$= 2\sin 2x - 2\cos 2x = 2\sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}),$$

因此, $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

$$(2) \because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \therefore -\frac{\pi}{4} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4},$$

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $\sin(2x - \frac{\pi}{4})$ 取得最小值 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 当 $x = \frac{3\pi}{8}$ 时, $\sin(2x - \frac{\pi}{4})$ 取得最大值 1,

由此可得, $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $f(\frac{3\pi}{8}) = 2\sqrt{2}$; 最小值为 $f(0) = -2$

【标注】【知识点】求固定区间正弦型函数值域; 倍角、和差角公式综合

22. 设函数 $f(x) = -\sin(\frac{3\pi}{2} - x) \cdot \sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}, x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和对称中心.

(2) 若函数 $g(x) = f(x + \frac{\pi}{4})$, 求函数 $g(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上的最值.

【答案】 (1) 最小正周期为 $T = \pi$, 对称中心为 $(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, 0), k \in \mathbf{Z}$.

(2) 最大值为 $\frac{1}{2}$, 最小值为 $-\frac{1}{4}$.

【解析】 (1) 由题知,

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \cdot \left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \right) - \sqrt{3}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4} (1 + \cos 2x) + \frac{\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 2x \\
&= \frac{1}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right),
\end{aligned}$$

∴最小正周期为 $T = \pi$,

由 $2x - \frac{\pi}{3} = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$,

∴对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, 0 \right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

(2) 由 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 得 $g(x) = \frac{1}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$,

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right]$,

可得 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$ 上单调递增,

当 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right]$, 可得 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$ 上单调递减,

∴ $g(x)_{\max} = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

又 $g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4} < g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$,

∴ $g(x)_{\min} = g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质；求固定区间正弦型函数值域

二、综合创新

23. 设函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 是常数, $A > 0, \omega > 0$). $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right]$ 上具有单调性, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为_____.

【答案】 π

【解析】 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right]$ 上具有单调性,

且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right)$,

则 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$,

且函数的图象关于直线 $x = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{7\pi}{12}$ 对称,

且一个对称点为 $\left(\frac{\pi}{3}, 0 \right)$.

可得 $0 < \omega \leq 3$ 且 $\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega}$,

求得 $\omega = 2$,

∴ $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

【标注】【知识点】求正弦型函数的周期

24. 已知 $\omega > 0$ ，函数 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递增，则 ω 的取值范围是（ ）.

A. $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]$
C. $\left[\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right]$

B. $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right]$
D. $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$

【答案】D

【解析】函数 $y = \cos x$ 的单调递增区间为 $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$ ，其中 $k \in \mathbf{Z}$ ，

依题意，则有 $-\pi + 2k\pi \leq \frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < \omega x + \frac{\pi}{4} < \omega\pi + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi (\omega > 0)$ ，

得 $4k - \frac{5}{2} \leq \omega \leq 2k - \frac{1}{4}$ ，

由 $\left(4k - \frac{5}{2}\right) - \left(2k - \frac{1}{4}\right) \leq 0$ 且 $4k - \frac{5}{2} > 0$ 得 $k = 1$ ，因此 ω 的取值范围是 $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$ 。

故选D。

【标注】【知识点】余弦型函数 ω 求最值问题

25. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$ ， $x \in \mathbf{R}$ ，若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\omega, \omega)$ 内单调递增，且函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \omega$ 对称，则 ω 的值为_____。

【答案】 $\frac{\sqrt{6}\pi}{6}$

【解析】 $f(x) = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，

由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ，

结论已知可得 $-\omega \geq \frac{-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi}{\omega}$ ， $\omega \leq \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{\omega}$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，

再由 $\omega x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ， $\omega = \frac{\frac{\pi}{6} + k\pi}{\omega}$ ，

可得 $k = 0$ ， $\omega^2 = \frac{\pi}{6}$ ， $\omega = \frac{\sqrt{6}\pi}{6}$ 。

故答案为： $\frac{\sqrt{6}\pi}{6}$ 。

【标注】【知识点】正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质；倍角、和差角公式综合；辅助角公式

26. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + 3 \cos \omega x (\omega > 0)$ ，对任意的 x_1, x_2 ，当 $f(x_1)f(x_2) = -12$ 时， $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$ 。则下列判断正确的是（ ）。

- A. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$
 B. 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上递增
 C. 函数 $f(x)$ 的一条对称轴是 $x = \frac{7\pi}{6}$
 D. 函数 $f(x)$ 的一个对称中心是 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$

【答案】 D

【解析】 $\because f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + 3 \cos \omega x = 2\sqrt{3} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$,
 又 $\because -1 \leq \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$, 即 $-2\sqrt{3} \leq 2\sqrt{3} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2\sqrt{3}$,
 $\therefore$ 有且仅有 $-2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = -12$ 满足条件;
 又 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$, 则 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \pi$,
 $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,
 $\therefore$ 函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,
 A选项: $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3} = 3$, 故A错误;
 B选项: 由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,
 解得 $-\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 故B错误;
 C选项: 当 $x = \frac{7\pi}{6}$ 时, $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{7\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3}$, 故C错误;
 D选项: 由 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$, 故D正确.
 故选D.

【标注】 【知识点】 正弦型函数的图象与性质; 正弦函数的图象和性质

27. 已知函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象过点 $B(0, \sqrt{3})$, 且在 $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$ 上单调, 把 $f(x)$ 的图象向右平移 π 个单位之后与原来的图象重合, 当 $x_1, x_2 \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ 且 $x_1 \neq x_2$ 时, $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $f(x_1 + x_2) = ()$.
 A. $-\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. -1 D. 1

【答案】 B

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象过点 $B(0, \sqrt{3})$,
 $\therefore 2 \sin \varphi = \sqrt{3}$,
 $\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$,
 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$ 上单调,

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12},$$

$$\therefore 0 < \omega \leq 3.$$

把 $f(x)$ 的图象向右平移 π 个单位之后与原来的图象重合,

$$\therefore k \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \omega = 2, f(x) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right).$$

当 $x_1, x_2 \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right)$ 且 $x_1 \neq x_2$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{5\pi}{3}, 3\pi \right)$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot \frac{5\pi}{2} = 5\pi,$$

$$f(x_1 + x_2) = 2 \sin \left(10\pi + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

故选B.

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换