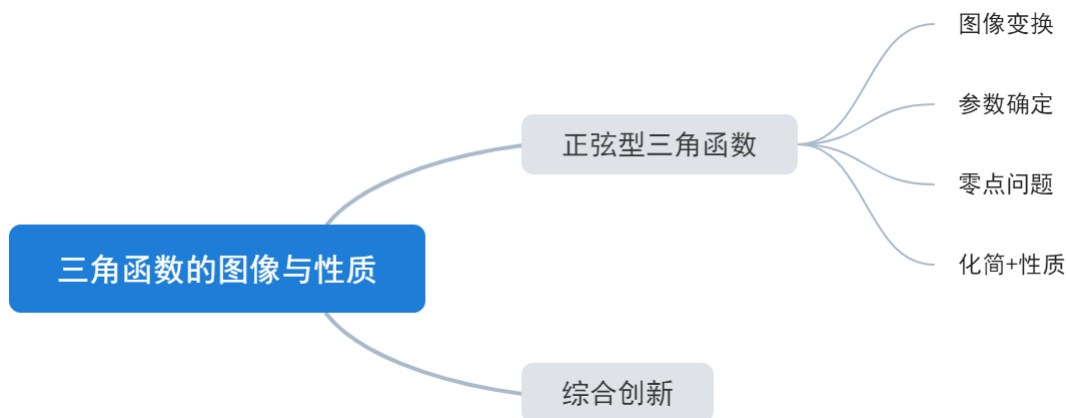


第三讲-三角函数图像性质

1. 知识梳理



一、 正弦型三角函数性质综合

1. 真题分析

🔔 图像变换

1. 将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，所得图象对应的函数（ ）.
A. 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增
B. 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ 上单调递减
C. 在区间 $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递增
D. 在区间 $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ 上单调递减
2. 将函数 $f(x) = \sin \omega x$ (其中 $\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，所得图象经过点 $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ ，则 ω 的最小值是（ ）.
A. $\frac{1}{3}$ B. 1 C. $\frac{5}{3}$ D. 2

🔔 参数确定

3. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x (\omega > 0), x \in \mathbf{R}$ ，在曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 的交点中，若相邻交点距离的最小值为 $\frac{\pi}{3}$ ，则 $f(x)$ 的最小正周期为（ ）.

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{2\pi}{3}$

C. π

D. 2π

4. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 是奇函数, 将 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍 (纵坐标不变), 所得图象对应的函数为 $g(x)$, 若 $g(x)$ 的最小正周期为 2π , 且 $g(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$, 则 $f(\frac{3\pi}{8}) = ()$.

A. -2

B. $-\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. 2

5. 已知函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $\omega > 0, -\pi < \varphi \leq \pi$, 若 $f(x)$ 的最小正周期为 6π , 且当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 则 $()$.

A. $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 0]$ 上是增函数

B. $f(x)$ 在区间 $[-3\pi, -\pi]$ 上是增函数

C. $f(x)$ 在区间 $[3\pi, 5\pi]$ 上是减函数

D. $f(x)$ 在区间 $[4\pi, 6\pi]$ 上是减函数

6. 设函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $\omega > 0, |\varphi| < \pi$. 若 $f(\frac{5\pi}{8}) = 2$, $f(\frac{11\pi}{8}) = 0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π , 则 $()$.

A. $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = \frac{\pi}{12}$

B. $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{12}$

C. $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{24}$

D. $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = \frac{7\pi}{24}$

🔴 零点问题

7. 已知函数 $f(x) = \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$), $x \in \mathbf{R}$. 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是 $()$.

A. $(0, \frac{1}{8}]$

B. $(0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{5}{8}, 1)$

C. $(0, \frac{5}{8}]$

D. $(0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{5}{8}]$

🔴 化简+性质

8. 已知函数 $f(x) = 4 \tan x \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cos(x - \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域与最小正周期;

(2) 讨论 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的单调性.

9. 已知函数 $f(x) = \cos x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值.

2. 思路总结

题型总结：

- 1、图像变换；熟练掌握三角函数伸缩变换和图像变换的规则
- 2、参数确定；根据周期确定 ω ，根据最值确定 A ，根据函数图像上的特殊点确定 φ
- 3、零点问题；带参数表示零点，结合零点情况确定参数范围
- 4、化简+性质；化简需要熟练掌握正余弦的和差角公式、二倍角降次公式以及辅助角公式，性质求解需要熟练掌握正弦型三角函数的对称轴和对称中心、单调区间、值域、最小正周期的求解方式

3. 模拟演练

🔴 图像变换

10. 将函数 $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，所得图象对应的函数（ ）.
- A. 在区间 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递减
B. 在区间 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递增
C. 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减
D. 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增
11. 要得到函数 $y = 3 \cos x$ 的图象，只需将函数 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点（ ）.
- A. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ （纵坐标不变），所得图象再向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位
B. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ （纵坐标不变），所得图象再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位
C. 横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），所得图象向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位
D. 横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），所得图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位
12. 将函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) 图象上每一点的横坐标伸长为原来的2倍（纵坐标不变），再向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y = \cos x$ 的图象，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为（ ）.
- A. $\left[2k\pi - \frac{\pi}{12}, 2k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$
B. $\left[2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}$
C. $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$
D. $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{5\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}$
- 13.

将函数 $f(x) = \sin \omega x$ (其中 $\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位, 所得图象经过点 $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$, 则 ω 的最小值是 ().

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

14. 将函数 $f(x) = \cos(x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 象上各点的横坐标伸长到原来的2倍 (纵坐标不变), 再把得到的函数向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 所得的函数图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 则 φ 的值为 ().

- A. $-\frac{5}{12}\pi$ B. $-\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{12}$

参数确定

15. 已知 $\omega > 0$, 在函数 $y = 2\sin(\omega x + \theta)$ 与 $y = 2\cos(\omega x + \theta)$ 的图象的交点中, 距离最短的两个交点间的距离为 $2\sqrt{3}$, 则 $\omega =$ ().

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\pi}{2}$
C. $\frac{\theta}{2}$ D. 1

16. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位以后得到一个偶函数, 则下列判断正确的是 ().

- A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π
B. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ 上单调递增
C. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{7\pi}{12}, 0\right)$ 对称
D. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{7\pi}{12}$ 对称

17. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin(\omega x + \varphi) + 2\cos^2\left(\frac{\omega x}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)$ (其中 $\omega > 0, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$), 当 $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ 时, $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$, $f(x) = f\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$, 将 $f(x)$ 的图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数为 $g(x)$, 则 $g\left(\frac{\pi}{6}\right) =$ ().

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$ B. $\sqrt{3} + 1$
C. $\frac{3}{2}$ D. 2

18. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象上相邻的一个最大值点与对称中心分别为 $\left(\frac{\pi}{18}, 3\right)$, $\left(\frac{2\pi}{9}, 0\right)$, 则函数 $f(x)$ 的单调增区间为 ().

- A. $\left(\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{9}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9}\right), k \in \mathbf{Z}$
B. $\left(\frac{2k\pi}{3} - \frac{4\pi}{9}, \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{9}\right), k \in \mathbf{Z}$
C. $\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{7\pi}{18}\right), k \in \mathbf{Z}$

D. $\left(\frac{2k\pi}{3} - \frac{5\pi}{18}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}\right), k \in \mathbf{Z}$

🔴 零点问题

19. 已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2}$, ($\omega > 0, x \in \mathbf{R}$), 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是 ().

- A. $\left(0, \frac{5}{12}\right]$
 B. $\left(0, \frac{5}{12}\right] \cup \left[\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right)$
 C. $\left(0, \frac{5}{6}\right]$
 D. $\left(0, \frac{5}{12}\right] \cup \left[\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right]$

20. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\omega x + \frac{2\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$), ($x \in \mathbf{R}$), 若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是 _____.

🔴 化简+性质

21. 已知函数 $f(x) = -\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 6 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x + 1, x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

22. 设函数 $f(x) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}, x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和对称中心.

(2) 若函数 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 求函数 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上的最值.

二、综合创新

23. 设函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 是常数, $A > 0, \omega > 0$). $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 _____.

24. 已知 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递增, 则 ω 的取值范围是 ().

- A. $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]$
 B. $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right]$
 C. $\left[\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right]$
 D. $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$

25. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x$ ($\omega > 0$), $x \in \mathbf{R}$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\omega, \omega)$ 内单调递增, 且函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \omega$ 对称, 则 ω 的值为 _____.

26. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + 3 \cos \omega x (\omega > 0)$, 对任意的 x_1, x_2 , 当 $f(x_1)f(x_2) = -12$ 时 ,

$|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$. 则下列判断正确的是 () .

A. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$

B. 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上递增

C. 函数 $f(x)$ 的一条对称轴是 $x = \frac{7\pi}{6}$

D. 函数 $f(x)$ 的一个对称中心是 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$

27. 已知函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的图象过点 $B(0, \sqrt{3})$, 且在 $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$ 上单

调 , 把 $f(x)$ 的图象向右平移 π 个单位之后与原来的图象重合 , 当 $x_1, x_2 \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ 且 $x_1 \neq x_2$ 时 ,

$f(x_1) = f(x_2)$, 则 $f(x_1 + x_2) = ()$.

A. $-\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. -1

D. 1