第一讲-三角恒等变换练习题

一、 逆向合并+知值求值

1. 已知a，b，c分别是$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边，且$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\cos A}{2-\cos B}$．

求$\dfrac{a}{c}$．

【答案】（ 1 ）$\dfrac{1}{2}$．

【解析】（ 1 ）$\because \dfrac{a}{b}=\dfrac{\cos A}{2-\cos B}$，$\therefore 2a-a\cos B=b\cos A$，

由正弦定理得$2\sin A=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)=\sin C$，

$\therefore \dfrac{a}{c}=\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{1}{2}$．

故答案为：$\dfrac{1}{2}$．

【标注】【知识点】倍角、和差角公式综合；SSA类三角形（利用余弦定理）

2. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$3\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$．

（ 1 ）求$\cos C$的值．

（ 2 ）求$\sin\left(2C+\dfrac{\pi}{6}\right)$的值．

【答案】（ 1 ）$\cos C=\dfrac{1}{3}$．

（ 2 ）$\dfrac{2\sqrt{6}+1}{9}-\dfrac{1}{2}$．

【解析】（ 1 ）已知$3\cos C(a\cdot\cos B+b\cdot\cos A)=C$，

由余弦定理可得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

故上式可化为：$\dfrac{3\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2ab}\cdot\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)=c$，

整理得$\dfrac{3\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2ac}=1$，即$c^2=a^2+b^2-\dfrac{2}{3}ac$，

由余弦定理知$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$，故有$2\cos C=\dfrac{2}{3}$，

即$\cos C=\dfrac{1}{3}$．

（ 2 ）由（1）知$\cos C=\dfrac{1}{3}$，$0<c<\pi$，

故$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以$\sin\left(2C+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2C+\dfrac{1}{2}\cos 2C$

$=\sqrt{3}\sin C\cdot\cos C+\cos^2 C-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{2\sqrt{6}+1}{9}-\dfrac{1}{2}$．

【标注】【知识点】余弦定理；正余弦定理综合求解边角；和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正弦

3. 在$\triangle ABC$中，角A、B、C的对边分别为a，b，c，且$\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{2a+c}=0$．

求角B的大小．

【答案】（ 1 ）$\dfrac{2\pi}{3}$．

【解析】（ 1 ）$\because\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\cdot\cos B$

$\therefore a=b\cos C+C\cdot\cos B$

又$\because\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{2a+c}=0$

$\therefore -2a\cdot\cos B-c\cdot\cos B=b\cos C$

$-2a\cos B=b\cos C+C\cdot\cos B=a$

$\therefore\cos B=-\dfrac{1}{2}$

又$\because B\in(0,\pi)$

$\therefore B=\dfrac{2\pi}{3}$．

【标注】【知识点】正弦定理；余弦定理；正余弦定理综合求解边角

4. 已知在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$c=1$，

$\cos B\sin C+\left(\sqrt{3}a-\sin B\right)\cos(A+B)=0$．

（ 1 ）求角C的大小．

（ 2 ）若$a=3b$，求$\cos(2B-C)$的值．

【答案】（ 1 ）$\dfrac{\pi}{3}$．

（ 2 ）$\dfrac{13}{14}$．

【解析】（ 1 ）由$\cos B\sin C+\left(\sqrt{3}a-\sin B\right)\cos(A+B)=0$，

可得$\cos B\sin C-\left(\sqrt{3}a-\sin B\right)\cos C=0$，

即$\sin(B+C)-\sqrt{3}a\cos C=0$,

$\therefore \sin A-\sqrt{3}a\cos C=0$，$\dfrac{\sin A}{a}=\sqrt{3}\cos C$，

由正弦定理及$c=1$可得$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin C}{c}=\sin C$，

所以$\sin C=\sqrt{3}\cos C$，即$\tan C=\sqrt{3}$，故$C=\dfrac{\pi}{3}$．

（2）由余弦定理得$1^2=a^2+b^2-2ab\cos\dfrac{\pi}{3}=9b^2+b^2-3b^2=7b^2$，

则$b=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，由正弦定理得$\sin B=\dfrac{b\sin C}{c}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，

因为$b<c$，

所以$B<C$，B为锐角，

故$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，

$\sin 2B=2\sin B\cos B=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，$\cos 2B=2\cos^2 B-1=\dfrac{11}{14}$，

所以$\cos(2B-C)=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos 2B+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin 2B=\dfrac{13}{14}$．

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角；正弦定理；两角和与差的余弦；和差角公式化简求值综合运用

二、 正向拆解

5. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a ，b，c，且满足$\dfrac{a}{b}-1=\dfrac{c}{b}\cos B-\cos C$．求角$C$的大小．

【答案】（1）$\dfrac{\pi}{3}$．

【解析】（1）由$\dfrac{a}{b}-1=\dfrac{c}{b}\cos B-\cos C$得：$a-b=c\cos B-b\cos C$，

由正弦定理可得：$\sin A-\sin B=\sin C\cos B-\sin B\cos C$，

又$A=\pi-(B+C)$，

$\therefore \sin(B+C)-\sin B=\sin C\cos B-\sin B\cos C$，

故：$-\sin B=-2\sin B\cos C$，

又$\because \sin B>0$，

$\therefore \cos C=\dfrac{1}{2}$，

$\because C\in(0,\pi)$，

$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$．

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角；三角形面积公式；正弦定理；余弦定理

三、 化简+知值求值

6. 已知函数$f(x)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}+\sin x$．

当$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，且$f(x_0)=\frac{4\sqrt{2}}{5}$，求$f\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right)$的值．

【答案】（1）$\frac{4\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{10}$．

【解析】（1）$\because f(x_0)=\frac{4\sqrt{2}}{5}$，$\sqrt{2}\sin\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{5}$，

即$\sin\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，

$\because x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\therefore x_0+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$．

从而$\cos\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$，

$f\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x_0+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\sin\left[\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{6}\right]$

$=\sqrt{2}\left[\sin\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right]=\sqrt{2}\left(\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{4\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{10}$

．

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

7. 已知函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x-1(x\in\mathbf{R})$．

若$f(x_0)=\frac{6}{5}$，$x_0\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，求$\cos 2x_0$的值．

【答案】（1）$\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$．

【解析】（1）由（1）可知$f(x_0)=2\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)$，

又$\because f(x_0)=\frac{6}{5}$，$\therefore\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，

由$x_0\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，得$2x_0+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$，

从而$\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{4}{5}$．

$\therefore$

$\cos 2x_0=\cos\left[\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$

．

8. 已知函数$f(x)=\frac{1}{2}\sin x\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{4}$．

若$x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，且$f(x_0)=\frac{1}{2}$，求$f(2x_0)$的值．

【答案】（ 1 ）$f(2x_0)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$．

【解析】（ 1 ）由$x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

得$2x_0-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，

又因为$f(x_0)=\frac{1}{2}\sin\left(2x_0-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，

所以$2x_0-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，

即$2x_0=\frac{5\pi}{6}$．

所以$f(2x_0)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(2\cdot\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$．

【标注】【知识点】求正弦型函数的周期；最简三角方程

9. 已知函数$f(x)=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$．

若$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{13}{10}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，求$\cos\alpha$的值．

【答案】（ 1 ）$\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$．

【解析】（ 1 ）由$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{13}{10}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$得$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，

$\cos\alpha=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$．

【标注】【知识点】和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的余弦；正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质

10. 已知函数$f(x)=2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\sin^2 x+\sqrt{3}$．

设$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{10}{13}$，求$\sin\alpha$的值．

【答案】（ 1 ）$\frac{5+12\sqrt{3}}{26}$．

【解析】（ 1 ）因为$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{10}{13}$，

所以$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{13}$，

$\frac{5\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，

所以$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{12}{13}$，

$$\begin{aligned}\sin\alpha&=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]\\&=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}\\&=\frac{5+12\sqrt{3}}{26}\end{aligned}$$

【标注】【知识点】两角和与差的正弦；和差角公式化简求值综合运用；正弦函数的图象和性质；求固定区间正弦型函数值域；函数的值域

11. 若$\tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=4$，则$\sin\alpha\cos\alpha=$______ .

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】 $\because\tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=4$，

$\frac{\tan\frac{\alpha}{2}-1}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+1}{1-\tan\frac{\alpha}{2}}=4$，

$\frac{-\left(\tan\frac{\alpha}{2}-1\right)^2+\left(\tan\frac{\alpha}{2}+1\right)^2}{\left(1-\tan\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\tan\frac{\alpha}{2}\right)}=4$，

则$\frac{4\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=4$，

$\therefore\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}-1=0$，

$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

①当$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，

$\because\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$，

则$\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$，

解得$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

由$\tan\frac{\alpha}{2}>0$，若$\frac{\alpha}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

则$\alpha\in(0,\pi)$.

$\because\cos\alpha>0$，则$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

若$\frac{\alpha}{2}\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$，

则$\alpha \in (2\pi, 3\pi)$，

$\because \cos\alpha > 0$，$\alpha \in \left(2\pi, \frac{5}{2}\pi\right)$，

$\therefore \sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$．

$\therefore \sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{5}$．

②当$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$，

$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$，

$\frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$，

解得$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$，

由$\tan\frac{\alpha}{2} < 0$，若$\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，

则$\alpha \in (\pi, 2\pi)$，

$\because \cos\alpha < 0$，则$\alpha \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$，

$\therefore \sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

若$\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$，

则$\alpha \in (3\pi, 4\pi)$，

$\because \cos\alpha < 0$，$\alpha\left(3\pi, \frac{7}{2}\pi\right)$，

$\therefore \sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{5}$．

综上所述$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{5}$．

【标注】【知识点】两角和与差的正切；和差角公式化简求值综合运用；半角公式；同角三角函数的基本关系式的化简和求值；同角三角函数的基本关系式

12. 已知$\frac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{2}{3}$，则$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值是______．

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{10}$

【解析】$\frac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{2}{3}$，

化简得$\frac{\tan\alpha(1-\tan\alpha)}{1+\tan\alpha} = -\frac{2}{3}$，

整理得$3\tan^2\alpha - 5\tan\alpha - 2 = 0$，

$\therefore \tan\alpha = -\frac{1}{3}$或$2$，

$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha$

$=\sqrt{2}\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)$

$=\frac{\sqrt{2}\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\frac{\sqrt{2}\tan\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\tan^2\alpha\right)}{\tan^2\alpha+1}$，

当$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$时，

上式$=\frac{\sqrt{2}\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{9}\right)}{\frac{1}{9}+1}=\frac{\sqrt{2}}{10}$，

当$\tan\alpha=2$时，

上式$=\frac{\sqrt{2}\times 2+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-4)}{4+1}=\frac{\sqrt{2}}{10}$，

$\therefore\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$．

【标注】【知识点】和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正切