

随机变量及其分布

一、条件概率

1. 条件概率的定义

对于任何两个事件 A 和 B ，在已知事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率叫做条件概率，用符号“ $P(B|A)$ ”来表示。

2. 条件概率公式

条件概率公式： $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ，其中 $P(A) > 0$ ， $A \cap B$ 称为事件 A 与 B 的积或交（或积）。把由事件 A 与 B 的交（或积），记做 $D = A \cap B$ （或 $D = AB$ ）。

3. 条件概率的求法

（1）利用定义，分别求出 $P(A)$ 和 $P(A \cap B)$ ，得 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 。

（2）借助古典概型概率公式，先求事件 A 包含的基本事件数，即 $n(A)$ 再求事件 $n(A \cap B)$ ，得 $P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ 。

例1

1. 掷两枚均匀的骰子，记 A = “点数不同”， B = “至少有一个是6点”，则 $P(A|B) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，
 $P(B|A) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{10}{11}$ ； $\frac{1}{3}$

【解析】 法一：

$$\begin{aligned} \text{由题意得：} P(A) &= \frac{6 \times 5}{6 \times 6} = \frac{5}{6}；P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{5 \times 5}{6 \times 6} = \frac{11}{36}； \\ P(A \cap B) &= \frac{5}{6 \times 6} \times 2 = \frac{5}{18} \text{（在第一次或第二次得到6点）；} \\ \text{故} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{10}{11}，P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}。 \end{aligned}$$

法二：

$(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6)$
 $(2, 1), (2, 2), \dots, (2, 6)$
 $\vdots$
 $(6, 1), (6, 2), \dots, (6, 6)$

且每个基本事件发生的概率相同.

两次点数不同包含 $36 - 6 = 30$ 个基本事件, 其中至少含有一个6点的有10个,

$$\text{故 } P(B|A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3};$$

在含有6的11个基本事件中, 两个点数不同的情况包含其中的10个, 故 $P(A|B) = \frac{10}{11}$.

【标注】【知识点】条件概率

2. 从甲口袋摸出一个红球的概率是 $\frac{1}{3}$, 从乙口袋中摸出一个红球的概率是 $\frac{1}{2}$, 则 $\frac{2}{3}$ 是 ()
- A. 2个球不都是红球的概率 B. 2个球都是红球的概率
- C. 至少有一个红球的概率 D. 2个球中恰好有1个红球的概率

【答案】 C

【解析】 $P(A) = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$, $P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, $P(C) = 1 - (1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$, $P(D) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】相互独立事件的概率乘法公式

【素养】数学抽象

【素养】数学运算

练1

3. 抛掷一颗骰子两次, 在第一次掷得向上一面点数是偶数的条件下, 则第二次掷得向上一面点数也是偶数的概率为 _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 设第一次掷得向上一面点数是偶数的事件为 A , 第二次掷得向上一面点数是偶数的事件为 B ,

$$\text{则 } P(A) = \frac{1}{2}, P(AB) = \frac{1}{4}, \text{ 所求概率为 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{2}.$$

【标注】【知识点】条件概率

4. 1号箱中有2个白球和4个红球，2号箱中有5个白球和3个红球，现随机地从1号箱中取出一球放入2号箱，然后从2号箱随机取出一球，则从2号箱取出红球的概率是（ ）.
- A. $\frac{11}{27}$ B. $\frac{11}{24}$ C. $\frac{16}{27}$ D. $\frac{9}{24}$

【答案】 A

【解析】
$$P = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_6^1 C_9^1} + \frac{C_4^1 C_4^1}{C_6^1 C_9^1} = \frac{11}{27}$$

【标注】【知识点】相互独立事件的概率乘法公式

5. 一袋中装有10个球，其中3个黑球，7个白球，先后两次从袋中各取一球（不放回）.
- （1）已知第一次取出的是黑球，求第二次取出的仍是黑球的概率；
- （2）已知第二次取出的是黑球，求第一次取出的也是黑球的概率；
- （3）已知第一次取出的是黑球，求第二次取出的是白球的概率.

【答案】（1） $\frac{2}{9}$.
 （2） $\frac{2}{9}$.
 （3） $\frac{5}{9}$.

【解析】（1）设A表示事件“第一次取出的是黑球”，B表示事件“第二次取出的是黑球”，C表示事件“第二次取出的是白球”则 $P(A) = P(B) = \frac{3}{10}$ ， $P(C) = \frac{7}{10}$.

问题即求条件概率 $P(B|A)$ ， $P(A \cap B) = \frac{A_3^2}{A_{10}^2} = \frac{1}{15}$ ，所以

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{9}.$$

（2） $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{9}.$

（3）问题即求概率 $P(C|A)$ ， $P(A \cap C) = \frac{A_3^1 \cdot A_7^1}{A_{10}^2} = \frac{7}{30} = (P(A) - P(A \cap B))$ ，

$$\text{所以 } P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{7}{9},$$

$$\text{从结果可以看出 } P(C|A) = 1 - P(B|A) = \frac{5}{9}.$$

【标注】【知识点】超几何分布；条件概率

4. 事件的独立性

如果事件A是否发生对事件B发生的概率没有影响，即 $P(B|A) = P(B)$ ，这时，我们称两个事件A，B相互独立，并把这两个事件叫做相互独立事件.

5. 概率的乘法原理

如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 那么这 n 个事件都发生的概率, 等于每个事件发生的概率的积, 即 $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$, 并且上式中任意多个事件 A_i 换成其对立事件后等式仍成立.

6. 独立重复试验

如果每次试验, 只考虑有两个可能的结果 A 及 $\bar{A}$, 并且事件 A 发生的概率相同. 在相同的条件下, 重复地做 n 次试验, 各次试验的结果相互独立, 那么一般就称它们为 n 次独立重复试验. n 次独立重复试验中, 事件 A 恰好发生 k 次的概率为 $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k = 0, 1, 2, \dots, n)$.

例2

6. 下列事件 A, B 是相互独立事件的是 ().
- A. 一枚硬币掷两次, 事件 A 为“第一次为正面”, 事件 B 为“第二次为反面”
 - B. 袋中有2个白球, 2个黑球, 不放回地摸两球, 事件 A 为“第一次摸到白球”, 事件 B 为“第二次摸到白球”
 - C. 掷一枚骰子, 事件 A 为“出现点数为奇数”, 事件 B 为“出现点数为偶数”
 - D. 事件 A 为“人能活到20岁”, 事件 B 为“人能活到50岁”

【答案】 A

【解析】 把一枚硬币掷两次, 对于每次而言是相互独立的, 其结果不受先后影响, 故选项 A 中的两个事件是相互独立事件; 选项 B 中不放回地摸球, 显然事件 A 与事件 B 不相互独立; 对于选项 C , 其结果具有唯一性, A, B 应为对立事件; 选项 D 是条件概率, 事件 B 受事件 A 的影响.

【标注】 【知识点】相互独立事件的辨析; 相互独立事件

7. 某人忘记了电话号码的最后一个数字, 因而他随意地拨号, 假设拨过了的号码不再重复, 试求下列事件的概率.
- (1) 第3次拨号才接通电话;
 - (2) 拨号不超过3次而接通电话

【答案】 (1) $\frac{1}{10}$

$$(2) \frac{3}{10}.$$

【解析】(1) 设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次拨号接通电话}\}, i = 1, 2, 3$

第3次才接通电话可表示为 $\overline{A_1 A_2 A_3}$ 于是所求概率为

$$P(\overline{A_1 A_2 A_3}) = \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$$

(2) 拨号不超过3次而接通电话可表示为: $A_1 + \overline{A_1} A_2 + \overline{A_1 A_2} A_3$ 于是所求概率为

$$P(A_1 + \overline{A_1} A_2 + \overline{A_1 A_2} A_3) = P(A_1) + P(\overline{A_1} A_2) + P(\overline{A_1 A_2} A_3) = \\ \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{10}.$$

【标注】【知识点】互斥事件的概率加法公式; 相互独立事件的概率乘法公式

练2

8. 掷一枚硬币, 记事件 A : “出现正面”, B : “出现反面”, 则有 () .

A. A 与 B 相互独立

B. $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

C. A 与 $\overline{B}$ 不相互独立

D. $P(AB) = \frac{1}{4}$

【答案】C

【解析】因为不可能同时发生的两个事件是互斥事件;

事件 A (或 B) 是否发生对事件 B (或 A) 的发生的概率没有影响,

则称这两个事件是相互独立事件,

故 A 与 B 不相互独立, A, B, D 不正确.

故选 C.

【标注】【知识点】相互独立事件的辨析; 相互独立事件

9. 在奥运知识有奖问答竞赛中, 甲、乙、丙三人同时回答一道有关奥运知识的问题, 已知甲答对这道题的概率是 $\frac{3}{4}$, 甲、乙两人都回答错误的概率是 $\frac{1}{12}$, 乙、丙两人都回答正确的概率是 $\frac{1}{4}$. 设每人回答问题正确与否是相互独立的.

(1) 求乙答对这道题的概率.

(2) 求甲、乙、丙三人中, 至少有一人答对这道题的概率.

【答案】(1) $P(B) = \frac{2}{3}$.

(2) $P(M) = \frac{91}{96}$.

【解析】(1) 记甲、乙、丙3人独自答对这道题分别为事件 A, B, C ,

设乙答对这道题的概率 $P(B) = x$,

由于每人回答问题正确与否是相互独立的, 因此 A, B, C 是相互独立事件.

由题意, 并根据相互独立事件同时发生的概率公式,

$$\text{得 } P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - \frac{3}{4}) \times (1 - x) = \frac{1}{12},$$

$$\text{解得 } x = \frac{2}{3},$$

所以, 乙对这道题的概率为 $P(B) = \frac{2}{3}$.

(2) 设“甲、乙、丙三人中, 至少有一人答对这道题”为事件 M ,

丙答对这道题的概率 $P(C) = y$,

由(1), 并根据相互独立事件同时发生的概率公式,

$$\text{得 } P(B \cdot C) = P(B) \cdot P(C) = \frac{2}{3} \times y = \frac{1}{4},$$

$$\text{解得 } y = \frac{3}{8},$$

甲、乙、丙三人都回答错误的概率为 $P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C})$

$$= (1 - \frac{3}{4})(1 - \frac{2}{3})(1 - \frac{3}{8})$$

$$= \frac{5}{96}.$$

因为事件“甲、乙、丙三人都回答错误”与事件“甲、乙、丙三人中,

至少有一人答对这道题”是对立事件,

所以, 所求事件概率为 $P(M) = 1 - \frac{5}{96} = \frac{91}{96}$.

【标注】【知识点】概率的基本性质

10. 甲罐中有5个红球, 2个白球和3个黑球, 乙罐中有4个红球, 3个白球和3个黑球. 先从甲罐中随机取出一球放入乙罐, 分别以 A_1, A_2 和 A_3 表示由甲罐取出的球是红球, 白球和黑球的事件; 再从乙罐中随机取出一球, 以 B 表示由乙罐取出的球是红球的事件. 则下列结论中正确的是 ____ 写出所有正确结论的编号).

① $P(B) = \frac{2}{5}$;

② $P(B|A_1) = \frac{5}{11}$;

③事件 B 与事件 A_1 相互独立;

④ A_1, A_2, A_3 是两两互斥的事件.

【答案】 ②④

【解析】 由题意知 $P(B)$ 的值是由 A_1, A_2, A_3 中某一个事件发生所决定的, 故①③错误;

$$\therefore P(B|A_1) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{11}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{11}, \text{ 故②正确;}$$

由互斥事件的定义知④正确，故正确结论的编号是②④.

【标注】【知识点】概率的概念

二、随机变量定义及其分布

随机变量：如果随机试验的可能结果可以用一个变量 X 来表示，并且 X 是随着试验的结果的不同而变化的，我们把这样的变量 X 叫做一个随机变量. 如果随机变量 X 的所有可能的取值都能一一列举出来，则称 X 为离散型随机变量.

离散型随机变量的分布列：设离散型随机变量 X 的可能取值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ， X 取到每一个值 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的概率为 $P(X = x_i) = p_i$ ，则称表

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

为离散型随机变量 X 的分布列.

具有性质：

① $p_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$;

② $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

离散型随机变量在某个范围取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率和.

例3

11. 下列能称为随机变量 X 的分布列的是 ().

A.

X	1	2	3
P	0.3	0.4	0.4

C.

X	-1	0	1
P	0.3	0.4	0.3

B.

X	1	2	3
P	0.4	0.7	-0.1

D.

X	1	2	3
P	0.2	0.4	0.4

【答案】C

【解析】选项A，D不满足分布列的性质；② $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ，选项B不满足分布列的性质① $p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$.
故选C.

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望；离散型随机变量的分布列

12. 如果 X 是一个离散型随机变量, 则假命题是() .

- A. X 取每一个可能值的概率都是非负数
- B. X 取所有可能值的概率之和为1
- C. X 取某几个值的概率等于分别取其中每个值的概率之和
- D. X 在某一范围内取值的概率大于它取这个范围内各个值的概率之和

【答案】 D

【解析】 根据概率的基本性质, 概率都是在0到1之间的数字, 所有可能值的概率和为1, 随机变量取某几个值的概率等于分别取其中每个值的概率之和 .

【标注】 【知识点】 概率的基本性质

13. 离散型随机变量 X 的分布列如下 :

X	-1	0	1
P	a	b	c

其中 a, b, c 成等差数列, 则 $P(-1 < X < 1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 $\because a, b, c$ 成等差数列, $\therefore 2b = a + c$. 又 $a + b + c = 1$,
 $\therefore b = \frac{1}{3}$, $\therefore P(-1 < X < 1) = P(X = 0) = b = \frac{1}{3}$.

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的分布列; 离散型随机变量的数学期望

14. 若随机变量 X 的分布列为 $P(X = i) = \frac{i}{10} (i = 1, 2, 3, 4)$, 则 $P(x > 2) = (\quad)$.

- A. $\frac{1}{10}$
- B. $\frac{3}{10}$
- C. $\frac{5}{10}$
- D. $\frac{7}{10}$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 随机变量 X 的分布列为 $P(X = i) = \frac{i}{10} (i = 1, 2, 3, 4)$,
 $\therefore P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$.
故选D .

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的数学期望; 离散型随机变量的分布列

 练3

15. 若随机变量 X 的分布列如下表, 则 x 等于()

X	0	1	2	3	4	5
P	$2x$	$3x$	$7x$	$2x$	$3x$	x

A. $\frac{1}{18}$

B. $\frac{1}{9}$

C. $\frac{20}{9}$

D. $\frac{9}{20}$

【答案】 A

【解析】 由分布列的性质, 可得 $2x + 3x + 7x + 2x + 3x + x = 1$, $\therefore x = \frac{1}{18}$.

【标注】 【知识点】离散型随机变量的分布列

16. 若随机变量 X 的分布列为:

X	-2	-1	0	1	2	3
P	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.1

则当 $P(X < a) = 0.8$ 时, 实数 a 的取值范围是().

A. $(-\infty, 2]$

B. $[1, 2]$

C. $(1, 2]$

D. $(1, 2)$

【答案】 C

【解析】 由随机变量 X 的分布列知: $P(X < -1) = 0.1$, $P(X < 0) = 0.3$, $P(X < 1) = 0.5$, $P(X < 2) = 0.8$, 则当 $P(X < a) = 0.8$ 时, 实数 a 的取值范围是 $(1, 2]$.

【标注】 【知识点】离散型随机变量的分布列; 离散型随机变量的数学期望

17. 由于电脑故障, 使得随机变量 X 的分布列中部分数据丢失(以“ x, y ”代替), 如下表:

X	1	2	3	4	5	6
P	0.20	0.10	0. x5	0.10	0.1y	0.20

则丢失的两个数据依次为_____.

【答案】 2、5

【解析】 由 $0.20 + 0.10 + 0.x5 + 0.10 + 0.1y + 0.20 = 1$, 得 $0.x5 + 0.1y = 0.40$, 于是两个数据依次为2, 5.

【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列；离散型随机变量的数学期望

18. 设离散型随机变量 ξ 的概率分布列为

ξ	-1	0	1	2	3
P	$\frac{1}{10}$	m	$\frac{1}{10}$	n	$\frac{2}{5}$

则下列各式中不成立的是 () .

A. $P(\xi = 1.5) = 0$

B. $P(\xi \geq -1) = 1$

C. $P(\xi \leq 3) = 1$

D. $P(\xi < 0) = 0$

【答案】 D

【解析】 $\{\xi = 1.5\}$ 是不可能事件，故概率为0；

$\{\xi \geq -1\}$ ， $\{\xi \leq 3\}$ 均为必然事件，故概率为1；

$P(\xi < 0) = P(\xi = -1) = \frac{1}{10}$ ，故不成立．

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望；离散型随机变量的分布列

19. 已知随机变量 X 的分布列如下表（其中 a 为常数）：

X	0	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.4	0.2	a

则下列计算结果错误的是 () .

A. $a = 0.1$

B. $P(X \geq 2) = 0.7$

C. $P(X \geq 3) = 0.4$

D. $P(X \leq 1) = 0.3$

【答案】 C

【解析】 易得 $a = 0.1$ ，则 $P(X \geq 3) = 0.3$ ．

故选C．

【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列

20. 一袋中装有6个同样大小的黑球，编号分别为1, 2, 3, 4, 5, 6，现从中随机取出3个球，以 X 表示取出球的最大号码，求 X 的分布列．

【答案】

X	3	4	5	6

P	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$
-----	----------------	----------------	----------------	---------------

【解析】 随机变量 X 的可能取值为3, 4, 5, 6. 从袋中随机地取出3个球, 包含的基本事件总数为 $C_6^3 = 20$. 事件“ $X = 3$ ”包含的基本事件总数为 C_3^3 ; 事件“ $X = 4$ ”包含的基本事件总数为 C_3^2 ; 事件“ $X = 5$ ”包含的基本事件总数为 C_4^2 ; 事件“ $X = 6$ ”包含的基本事件总数为 C_5^2 .

从而有:

$$P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20};$$

$$P(X=4) = \frac{C_3^2}{C_6^3} = \frac{3}{20};$$

$$P(X=5) = \frac{C_4^2}{C_6^3} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10};$$

$$P(X=6) = \frac{C_5^2}{C_6^3} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

所以随机变量 X 的分布列为:

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列

21. 某一学校心理咨询中心服务电话接通率为 $\frac{3}{4}$, 某班3名同学商定明天分别就同一问题询问该服务中心. 且每人只拨打一次, 求他们中成功咨询的人数 ξ 的分布列.

【答案】 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

【解析】 3个人各做一次试验, 看成三次独立重复实验, 拨通这一电话的人数即为事件的发生次数 ξ , 故符合二项分布. 由题意可知: $\xi \sim B\left(3, \frac{3}{4}\right)$,

$$\text{所以 } P(\xi = k) = C_3^k \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列; n 次独立重复试验与二项分布

22. 某抽奖活动，现有六张分别标有1, 2, 3, 4, 5, 6六个数字的形状相同的卡片，其中标有偶数数字的卡片是有奖卡片，且奖品个数与卡片上所标数字相同，游戏规则如下：每人每次抽取两张，记奖品个数为随机变量 X ，求 X 的分布列。

【答案】

x	0	2	4	6	8	10
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

【解析】 X 的可能取值是：0, 2, 4, 6, 8, 10。

$$P(X=0) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}; \quad P(X=2) = \frac{C_3^1}{C_6^2} = \frac{1}{5}; \quad P(X=4) = \frac{C_3^1}{C_6^2} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=6) = \frac{1 + C_3^1}{C_6^2} = \frac{4}{15}; \quad P(X=8) = \frac{1}{C_6^2} = \frac{1}{15}; \quad P(X=10) = \frac{1}{C_6^2} = \frac{1}{15}.$$

X	0	2	4	6	8	10
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列

23. 甲、乙两人为了响应政府“节能减排”的号召，决定各购置一辆纯电动汽车。经了解目前市场上销售的主流纯电动汽车，按续驶里程数 R （单位：公里）可分为三类车型， $A: 80 \leq R < 150$ ， $B: 150 \leq R < 250$ ， $C: R \geq 250$ 。甲从 A, B, C 三类车型中挑选，乙从 B, C 两类车型中挑选，甲、乙二人选择各类车型的概率如下表：

人	概率 \ 车型	车型		
		A	B	C
甲		$\frac{1}{5}$	p	q
乙			$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

若甲、乙都选 C 类车型的概率为 $\frac{3}{10}$ 。

- (1) 求 p, q 的值；
 (2) 求甲、乙选择不同车型的概率；
 (3) 某市对购买纯电动汽车进行补贴，补贴标准如下表：

车型	A	B	C
补贴金额（万元/辆）	3	4	5

记甲、乙两人购车所获得的财政补贴和为 X ，求 X 的分布列。

【答案】(1) $p = \frac{2}{5}, q = \frac{2}{5}$

(2) $\frac{3}{5}$

(3)

X	7	8	9	10
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

【解析】(1) 因为 $\begin{cases} \frac{3}{4}q = \frac{3}{10} \\ p + q + \frac{1}{5} = 1 \end{cases}$
所以 $p = \frac{2}{5}$, $q = \frac{2}{5}$.

(2) 设“甲、乙选择不同车型”为事件A,
则 $P(A) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$.
答：所以甲、乙选择不同车型的概率是 $\frac{3}{5}$.

(3) X可能取值为7, 8, 9, 10.

$$P(X=7) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}, \quad P(X=8) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$P(X=9) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5}; \quad P(X=10) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}.$$

所以X的分布列为：

X	7	8	9	10
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列