

随机变量及其分布

一、条件概率

1. 条件概率的定义

对于任何两个事件 A 和 B ，在已知事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率叫做条件概率，用符号“ $P(B|A)$ ”来表示。

2. 条件概率公式

条件概率公式： $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ，其中 $P(A) > 0$ ， $A \cap B$ 称为事件 A 与 B 的积或交（或积）。把由事件 A 与 B 的交（或积），记做 $D = A \cap B$ （或 $D = AB$ ）。

3. 条件概率的求法

（1）利用定义，分别求出 $P(A)$ 和 $P(A \cap B)$ ，得 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 。

（2）借助古典概型概率公式，先求事件 A 包含的基本事件数，即 $n(A)$ 再求事件 $n(A \cap B)$ ，得 $P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ 。

例1

1. 掷两枚均匀的骰子，记 $A =$ “点数不同”， $B =$ “至少有一个是6点”，则 $P(A|B) =$ _____， $P(B|A) =$ _____。

2. 从甲口袋摸出一个红球的概率是 $\frac{1}{3}$ ，从乙口袋中摸出一个红球的概率是 $\frac{1}{2}$ ，则 $\frac{2}{3}$ 是（ ）

A. 2个球不都是红球的概率 B. 2个球都是红球的概率

C. 至少有一个红球的概率 D. 2个球中恰好有1个红球的概率

练1

3. 抛掷一颗骰子两次，在第一次掷得向上一面点数是偶数的条件下，则第二次掷得向上一面点数也是偶数的概率为 _____。

4. 1号箱中有2个白球和4个红球，2号箱中有5个白球和3个红球，现随机地从1号箱中取出一球放入2号箱，然后从2号箱随机取出一球，则从2号箱取出红球的概率是（ ）。

A. _____ B. _____ C. _____ D. _____

$$\frac{11}{27}$$

$$\frac{11}{24}$$

$$\frac{16}{27}$$

$$\frac{9}{24}$$

5. 一袋中装有10个球，其中3个黑球，7个白球，先后两次从袋中各取一球（不放回）。

- (1) 已知第一次取出的是黑球，求第二次取出的是黑球的概率；
- (2) 已知第二次取出的是黑球，求第一次取出的是黑球的概率；
- (3) 已知第一次取出的是黑球，求第二次取出的是白球的概率。

4. 事件的独立性

如果事件 A 是否发生对事件 B 发生的概率没有影响，即 $P(B|A) = P(B)$ ，这时，我们称两个事件 A, B 相互独立，并把这两个事件叫做相互独立事件。

5. 概率的乘法原理

如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立，那么这 n 个事件都发生的概率，等于每个事件发生的概率的积，即 $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$ ，并且上式中任意多个事件 A_i 换成其对立事件后等式仍成立。

6. 独立重复试验

如果每次试验，只考虑有两个可能的结果 A 及 $\bar{A}$ ，并且事件 A 发生的概率相同。在相同的条件下，重复地做 n 次试验，各次试验的结果相互独立，那么一般就称它们为 n 次独立重复试验。 n 次独立重复试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率为 $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ 。

例2

6. 下列事件 A, B 是相互独立事件的是（ ）。

- A. 一枚硬币掷两次，事件 A 为“第一次为正面”，事件 B 为“第二次为反面”
- B. 袋中有2个白球，2个黑球，不放回地摸两球，事件 A 为“第一次摸到白球”，事件 B 为“第二次摸到白球”
- C. 掷一枚骰子，事件 A 为“出现点数为奇数”，事件 B 为“出现点数为偶数”
- D. 事件 A 为“人能活到20岁”，事件 B 为“人能活到50岁”

7. 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而他随意地拨号，假设拨过了的号码不再重复，试求下列事件的概率。

- (1) 第3次拨号才接通电话；
- (2) 拨号不超过3次而接通电话

练2

8. 掷一枚硬币，记事件 A ：“出现正面”， B ：“出现反面”，则有（ ）.
- A. A 与 B 相互独立
B. $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
C. A 与 $\bar{B}$ 不相互独立
D. $P(AB) = \frac{1}{4}$
9. 在奥运知识有奖问答竞赛中，甲、乙、丙三人同时回答一道有关奥运知识的问题，已知甲答对这道题的概率是 $\frac{3}{4}$ ，甲、乙两人都回答错误的概率是 $\frac{1}{12}$ ，乙、丙两人都回答正确的概率是 $\frac{1}{4}$. 设每人回答问题正确与否是相互独立的.
- (1) 求乙答对这道题的概率.
- (2) 求甲、乙、丙三人中，至少有一人答对这道题的概率.
10. 甲罐中有5个红球，2个白球和3个黑球，乙罐中有4个红球，3个白球和3个黑球. 先从甲罐中随机取出一球放入乙罐，分别以 A_1, A_2 和 A_3 表示由甲罐取出的球是红球，白球和黑球的事件；再从乙罐中随机取出一球，以 B 表示由乙罐取出的球是红球的事件. 则下列结论中正确的是 ____ 写出所有正确结论的编号).
- ① $P(B) = \frac{2}{5}$;
② $P(B|A_1) = \frac{5}{11}$;
③ 事件 B 与事件 A_1 相互独立 ;
④ A_1, A_2, A_3 是两两互斥的事件 .

二、 随机变量定义及其分布

随机变量：如果随机试验的可能结果可以用一个变量 X 来表示，并且 X 是随着试验的结果的不同而变化的，我们把这样的变量 X 叫做一个随机变量. 如果随机变量 X 的所有可能的取值都能一一列举出来，则称 X 为离散型随机变量.

离散型随机变量的分布列：设离散型随机变量 X 的可能取值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ， X 取到每一个值 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的概率为 $P(X = x_i) = p_i$ ，则称表

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

为离散型随机变量 X 的分布列.

具有性质：

- ① $p_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$;
② $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

离散型随机变量在某个范围取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率和.



例3

11. 下列能称为随机变量 X 的分布列的是 () .

A.

X	1	2	3
P	0.3	0.4	0.4

C.

X	-1	0	1
P	0.3	0.4	0.3

B.

X	1	2	3
P	0.4	0.7	-0.1

D.

X	1	2	3
P	0.2	0.4	0.4

12. 如果 X 是一个离散型随机变量, 则假命题是 () .

- A. X 取每一个可能值的概率都是非负数
 B. X 取所有可能值的概率之和为1
 C. X 取某几个值的概率等于分别取其中每个值的概率之和
 D. X 在某一范围内取值的概率大于它取这个范围内各个值的概率之和

13. 离散型随机变量 X 的分布列如下:

X	-1	0	1
P	a	b	c

其中 a, b, c 成等差数列, 则 $P(-1 < X < 1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 若随机变量 X 的分布列为 $P(X=i) = \frac{i}{10} (i=1, 2, 3, 4)$, 则 $P(x > 2) = ()$.

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{5}{10}$ D. $\frac{7}{10}$

练3

15. 若随机变量 X 的分布列如下表, 则 x 等于 ()

X	0	1	2	3	4	5
P	$2x$	$3x$	$7x$	$2x$	$3x$	x

- A. $\frac{1}{18}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{20}{9}$ D. $\frac{9}{20}$

16. 若随机变量 X 的分布列为:

X	-2	-1	0	1	2	3
P	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.1

则当 $P(X < a) = 0.8$ 时, 实数 a 的取值范围是 () .

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[1, 2]$
 C. $(1, 2]$ D. $(1, 2)$

17. 由于电脑故障, 使得随机变量 X 的分布列中部分数据丢失(以“ x, y ”代替), 如下表:

若甲、乙都选C类车型的的概率为 $\frac{3}{10}$.

- (1) 求 p, q 的值；
- (2) 求甲、乙选择不同车型的的概率；
- (3) 某市对购买纯电动汽车进行补贴，补贴标准如下表：

车型	A	B	C
补贴金额(万元/辆)	3	4	5

记甲、乙两人购车所获得的财政补贴和为 X ，求 X 的分布列．