

二项式定理练习题

一、二项式定理

1. 二项式 $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为 _____ .

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】 二项式 $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^6$ 展开式的通项公式为

$$T_{r+1} = C_6^r \cdot x^{6-r} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^r = \left(\frac{1}{2}\right)^r \cdot C_6^r \cdot x^{6-2r},$$

令 $6 - 2r = 0$, 求得 $r = 3$,

故展开式中的常数项为 $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot C_6^3 = \frac{5}{2}$.

故答案为: $\frac{5}{2}$.

【标注】 【知识点】 求二项式展开式的特定项

2. $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中 x^7 的系数为 _____ . (用数字作答)

【答案】 -56

【解析】 展开式通项为 $T_{r+1} = C_8^r (x^2)^{8-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r C_8^r x^{16-3r}$,

令 $16 - 3r = 7$, 得 $r = 3$,

所以展开式中 x^7 的系数为 $(-1)^3 C_8^3 = -56$.

故答案为: -56.

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式

3. $(a + x)^5$ 展开式中 x^2 的系数为 10, 则实数 a 的值为 _____ .

【答案】 1

【解析】 $(a + x)^5$ 展开式中 x^2 的系数为 $C_5^2 a^3$,

因为 $(a + x)^5$ 展开式中 x^2 的系数为 10, 所以 $C_5^2 a^3 = 10$, 解得 $a = 1$.

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

4. 已知 $(1+3x)^n$ 的展开式中含有 x^2 项的系数是54, 则 $n =$ _____.

【答案】4

【解析】 $(1+3x)^n$ 的展开式中通项： $T_{r+1} = C_n^r (3x)^r = 3^r C_n^r x^r$,

$\therefore$ 含有 x^2 的系数是54,

$\therefore r = 2$.

$\therefore 3^2 C_n^2 = 54$, 可得 $C_n^2 = 6$,

$\therefore \frac{n(n-1)}{2} = 6, n \in \mathbf{N}^*$.

解得 $n = 4$.

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

5. $(1+2x^2)(1+x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数是().

A. 12

B. 16

C. 20

D. 24

【答案】A

【解析】 $(1+2x^2)(1+x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数为：

$$1 \times C_4^3 \times 1^3 + 2 \times C_4^1 \times C_3^3 \times 1^3 = 12.$$

故选：A.

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数

6. 若 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式中存在常数项, 则 n 的值可以是()

A. 10

B. 11

C. 12

D. 14

【答案】A

【解析】因为 $T_{r+1} = C_n^r x^{\frac{n-r}{2}} x^{-\frac{r}{3}} = C_n^r x^{\frac{3n-5r}{6}}$,

又因为存在常数项,

所以令 $3n - 5r = 0$, 得 $r = \frac{3}{5}n$,

所以 $n = 10$ 时, 存在常数项.

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

7. 若 $(1+2x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$, 则 $a_0 + a_2 + a_4 =$ _____ .

【答案】 121

【解析】 令 $x = 1$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3^5$;

令 $x = -1$, 则 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 = -1$,

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 = \frac{3^5 - 1}{2} = 121 ,$$

故答案为 : 121 .

【标注】【知识点】赋值问题 ; 二项式系数的性质

8. 若 $(x+1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_5(x-1)^5$, 则 $a_0 =$ ()

A. 32

B. 1

C. -1

D. -32

【答案】 A

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数

9. 用二项式定理证明 $55^{55} + 9$ 能被 8 整除 .

【答案】 能 .

【解析】 用二项式定理证明 $55^{55} + 9$ 能被 8 整除 .

$$\begin{aligned} \therefore 55^{55} + 9 &= (56 - 1)^{55} + 9 \\ &= C_{55}^0 \cdot 56^{55} + C_{55}^1 \cdot 56^{54} \cdot (-1)^1 + C_{55}^2 \cdot 56^{53} \cdot (-1)^2 \\ &\quad + \cdots + C_{55}^{54} 56^1 \cdot (-1)^{54} + C_{55}^{55} \cdot (-1)^{55} + 9 \\ &= C_{55}^0 \cdot 56^{55} - C_{55}^1 \cdot 56^{54} + C_{55}^2 \cdot 56^{53} + \cdots - C_{55}^{54} 56^1 - 1 + 9 \\ &= C_{55}^0 \cdot 56^{55} - C_{55}^1 \cdot 56^{54} + C_{55}^2 \cdot 56^{53} + \cdots - C_{55}^{54} \cdot 56^1 + 8 , \end{aligned}$$

由于各项都含有因数 8 ,

故 $C_{55}^0 \cdot 56^{55} - C_{55}^1 \cdot 56^{54} + C_{55}^2 \cdot 56^{53} + \cdots - C_{55}^{54} \cdot 56^1 + 8$ 能倍 8 整除 ,

即 $55^{55} + 9$ 能被 8 整除 .

【标注】【知识点】二项式定理的展开式 ; 整除问题 ; 求二项式展开式的特定项

二、二项式系数性质

10. $(2x-1)^5$ 的展开式中各项系数之和与各项的二项式系数之和分别为() .

- A. 1, 32 B. 32, 1 C. 16, -1 D. -1, 16

【答案】 A

【解析】 各项系数之和：令 $x=1$ ，得 $(2x-1)^5=1$ ，

各项的二项式系数之和： $C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=32$ ，

故选A .

【标注】 【知识点】 二项式系数的性质；求项的系数或二项式系数

11. 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第5项与第9项的二项式系数相等，则奇数项的二项式系数和为() .

- A. 2^9 B. 2^{10} C. 2^{11} D. 2^{12}

【答案】 C

【解析】 $(1+x)^n$ 的展开通项公式 $T_{r+1}=C_n^r 1^{n-r} x^r = C_n^r x^r$ ，

$\therefore$ 第5项和第9项二项式系数相等，

$\therefore C_n^4 = C_n^8$ ，

$\therefore n=12$ ，

奇数项的二项式系数之和为 $2^{n-1}=2^{11}$.

(注： $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$ ， $C_n^0+C_n^2+\cdots+C_n^4+C_n^6+\cdots+C_n^8+C_n^{10}+C_n^{12}=2^{n-1}$.)

【标注】 【知识点】 求项的系数或二项式系数；求二项式展开式的特定项；二项式系数的性质

12. 在 $(x-2)^8$ 的二项展开式中，二项式系数的最大值为 a ，含 x^5 项的系数为 b ，则 $\frac{a}{b}=()$.

- A. $\frac{5}{32}$ B. $-\frac{5}{32}$ C. $\frac{32}{5}$ D. $-\frac{32}{5}$

【答案】 B

【解析】 在 $(x-2)^8$ 的二项展开式中，二项式系数的最大值为 $C_8^4=70$ ，

含 x^5 项的为 $C_8^3 x^5 (-2)^3 = -448x^5$ ，

即系数为 -448 ，

因此 $\frac{a}{b} = \frac{70}{-448} = -\frac{5}{32}$.

故选：B .

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数；求二项式展开式的特定项；二项式系数的性质

13. 已知 $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中只有第四项的二项式系数最大，则展开式中的常数项等于 _____（用数字作答）.

【答案】 240

【解析】 $\because \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中只有第四项的二项式系数最大，
 $\therefore C_n^3$ 最大，故 $n = 6$ ，
故 $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式的通项公式为
 $T_{r+1} = C_6^r \cdot (2\sqrt{x})^r \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^{6-r} = (-1)^{6-r} \cdot 2^r C_6^r \cdot x^{\frac{3}{2}r-6}$ ，
当 $\frac{3}{2}r - 6 = 0$ 时， $r = 4$ ， $(-1)^{6-4} \times 2^4 \times C_6^4 = 240$ ，
故展开式中的常数项等于 240 .

【标注】【知识点】二项式系数的性质；求项的系数或二项式系数；求二项式展开式的特定项

14. 若 $\left(x - \frac{1}{2x}\right)^n$ 的展开式中第3项的二项式系数是15，则展开式中所有项的系数之和为（ ）.
- A. $\frac{1}{32}$ B. $\frac{1}{64}$ C. $-\frac{1}{64}$ D. $\frac{1}{128}$

【答案】 B

【解析】 $T_3 = C_n^2 x^{n-2} \left(-\frac{1}{2x}\right)^2$ ，
 $\therefore$ 第三项的二项式系数为 $C_n^2 = 15$ ，
即 $\frac{n(n-1)}{2} = 15$ ，
解得 $n = 6$ ，
 $\therefore$ 原二项式 $\left(x - \frac{1}{2x}\right)^6$ ，
令 $x = 1$ 即知展开式中所有项系数之和为 $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$.
故选 B .

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数；求二项式展开式的特定项；赋值问题

15.

在二项式 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2x}\right)^n$ 的展开式中，恰好第五项的二项式系数最大．

(1) 求 n ．

(2) 求展开式各项的二项式系数和，展开式各项的项的系数和．

(3) 求展开式的第六项．

【答案】 (1) 8．

(2) 二项式系数和为256，系数和为 $\frac{1}{256}$ ．

(3) $-\frac{7}{4x^4}$ ．

【解析】 (1) $\because$ 展开式中第5项的二项式系数最大，

$\therefore$ 展开式共有9项，

$\therefore n = 8$ ．

(2) 二项式系数和为 $2^n = 2^8 = 256$ ，

令 $x = 1$ ，

得系数和为 $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$ ．

(3) $T_6 = C_8^5 (\sqrt[3]{x})^3 \left(-\frac{1}{2x}\right)^5 = -\frac{7}{4x^4}$ ．

【标注】【知识点】二项式定理的展开式；赋值问题；求项的系数或二项式系数；求二项式展开式的特定项

16. 已知 $(1 - 2x)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$ ．

(1) 求 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_7$ 的值．

(2) 求 $(1 - 2x)^7$ 中，所有二项式系数之和．

【答案】 (1) -1．

(2) 128．

【解析】 (1) 令 $x = 1$ ， $a_0 + a_1 + \cdots + a_7 = (1 - 2)^7 = -1$ ．

(2) $C_7^0 + C_7^1 + \cdots + C_7^7 = 2^7 = 128$ ．

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数；二项式系数的性质