

组合问题练习题

一、组合定义与组合数计算

1. 计算： $C_{2019}^{2018} = (\quad)$.

A. 2018

B. 2019

C. 4037

D. 1

【答案】 B

【解析】 由组合的性质： $C_n^m = C_n^{n-m}$,

得： $C_{2019}^{2018} = C_{2019}^1 = 2019$.

故选B .

【标注】 【知识点】排列数计算

2. 若 $C_n^2 A_2^2 = 42$, 则 $\frac{n!}{3!(n-3)!}$ 的值为() .

A. 6

B. 7

C. 35

D. 20

【答案】 C

【解析】 $\because C_n^2 A_2^2 = 42$,

$\therefore \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = 42$,

$\therefore n = 7$,

$\therefore \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$.

故选C .

【标注】 【知识点】组合；排列

3. 按要求答题：

(1) 计算： $\frac{4A_8^4 + 2A_8^5}{A_8^8 - A_9^5}$.

(2) 解不等式： $\frac{1}{C_x^3} - \frac{1}{C_x^4} < \frac{2}{C_x^5}$. (结果用集合表示)

【答案】 (1) $\frac{4}{5}$.

(2) {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} .

【解析】(1) $\therefore$ 原式 $= \frac{4 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 + 2 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{8! - 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}$
 $= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times (4+8)}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times (4! - 9)}$
 $= \frac{12}{24 - 9}$
 $= \frac{4}{5}$.
故答案为 : $\frac{4}{5}$.

(2) 原不等式可化为 :

$$\frac{6}{x(x-1)(x-2)} - \frac{24}{x(x-1)(x-2)(x-3)} < \frac{240}{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$

化简得 : $x^2 - 11x - 12 < 0$,

$\therefore -1 < x < 12$.

又 $\because n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 5$,

$\therefore x = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} .

故答案为 : {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} .

【标注】【知识点】排列 ; 组合

4. 假设在200件产品中有3件是次品 , 其余都是正品 . 现在从中取出5件产品 , 其中至少有2件是次品的取法种数是 () .

- A. $C_3^2 C_{198}^3$
B. $C_3^2 C_{197}^3 + C_3^3 C_{197}^2$
C. $C_3^2 C_{197}^3$
D. $C_{200}^5 - C_{197}^5$

【答案】 B

【解析】 根据题意 , “至少有2件次品”可分为“有2件次品”与“有3件次品”两种情况 .

“有2件次品”的抽取方法有 $C_3^2 C_{197}^3$ 种 ,

“有3件次品”的抽取方法有 $C_3^3 C_{197}^2$ 种 ,

则共有 $C_3^2 C_{197}^3 + C_3^3 C_{197}^2$ 种不同的抽取方法 .

故选B .

【标注】【素养】逻辑推理 ; 数学运算

二、常见组合问题

5. 若将6本不同书放到5个不同盒子里，有多少种不同放法（ ）.

A. A_6^6

B. C_6^6

C. 5^6

D. 6^5

【答案】C

【解析】将6本不同书放到5个不同盒子里，每本书都有5种放法，

根据乘法原理可得不同放法为 5^6 种.

故选C.

【标注】【知识点】排列；组合

6. 从5男3女共8名学生中选出队长1人，副队长1人，普通队员2人组成4人志愿者服务队，要求服务队中至少有1名女生，共有 _____ 种不同的选法.（用数字作答）

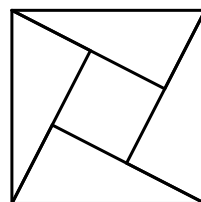
【答案】780

【解析】 $C_8^4 \cdot A_4^2 - C_5^4 \cdot A_4^2 = 780$.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】排除法；排列组合综合

7. 如图为我国数学家赵爽（约3世纪初）在为《周髀算经》作注时验证勾股定理的示意图，现在提供5种颜色给其中5个小区域涂色，规定每个区域只涂一种颜色，相邻区域颜色不相同，则不同的涂色方案共有（ ）.



A. 120

B. 260

C. 340

D. 420

【答案】 D

【解析】 上下两块区域可以相同，也可以不同，

则共有 $5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 3 + 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2$

$= 180 + 240 = 420$ 种 .

故选 D .

【标注】 【知识点】 组合；特殊位置优先法

8. 从 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 这八个数字中任取两个奇数和两个偶数，组成没有重复数字的四位数，则可组成的四位数中奇数的个数为 _____（用数字作答） .

【答案】 360

【解析】 ①先选出一个奇数在第四位 C_4^1 .

②若 0 被选，再选一个奇数为偶数 $C_3^1 C_3^1 C_2^1 A_2^2$.

若 0 未被选，再选 2 个偶数，1 个奇数 $C_3^2 C_3^1 A_3^3$.

$(C_3^1 C_3^1 C_2^1 A_2^2 + C_3^2 C_3^1 C_3^3) C_4^1 = 360$.

故答案为：360 .

【标注】 【知识点】 特殊位置优先法；特殊元素优先法

【素养】 数学运算；逻辑推理

9. 一次演出，原计划要排 4 个节目，因临时有变化，拟再添加 2 个小品节目，若保持原有 4 个节目的相对顺序不变，则这 6 个节目的不同的排列方法有（ ） .
- A. 30 种 B. 25 种 C. 24 种 D. 20 种

【答案】 A

【解析】 原计划 4 个节目顺序不变，则有 5 个空隙，插入 1 个小品有 C_5^1 ，再插入 1 个小品有 C_6^1 ，则一共有 $C_5^1 \cdot C_6^1 = 30$ 种 .

故选 A .

【标注】 【知识点】 倍缩法

10. 不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{50} = 100$ 中不同的正整数解有 _____ 组，非负整数解有 _____ 组 .

【答案】 $C_{99}^{49}; C_{149}^{49}$

【解析】 相当于把100个1分给50个未知数，采用挡板法，于是所有的方法数为 C_{99}^{49} ；非负整数解的问题，等价于 $(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) + \cdots + (x_{50} + 1) = 150$ 的非负整数解问题，等价于 $y_i = x_i + 1, y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{50} = 150$ 的正整数解问题，一共有 C_{149}^{49} 组。

故答案为： $C_{99}^{49}; C_{149}^{49}$ 。

【标注】【知识点】隔板法

11. 若有5本不同的书，分给三位同学，每人至少一本，则不同的分法数是（ ）。

A. 120

B. 150

C. 240

D. 300

【答案】 B

【解析】 根据题意，分2步进行分析：

①将5本不同的书分成3组，

若分成1、1、3的三组，有 $\frac{C_5^1 C_4^1 C_3^3}{A_2^2} = 10$ 种分组方法；

若分成1、2、2的三组，有 $\frac{C_5^1 C_4^2 C_2^2}{A_2^2} = 15$ 种分组方法；

则有 $15 + 10 = 25$ 种分组方法；

②将分好的三组全排列，对应三人，有 $A_3^3 = 6$ 种情况，

则有 $25 \times 6 = 150$ 种不同的分法。

故选B。

【标注】【知识点】分步乘法计数原理；分组分配法

12. 现有5项工程由甲、乙、丙3个工程队承包，每队至少一项，但甲承包的项目不超过2个，不同的承包方案有（ ）种。

A. 130

B. 150

C. 220

D. 240

【答案】 A

【解析】 5项工程分成3组的分法有1，1，3和1，2，2两种情况，

1，1，3的组数为 $\frac{C_5^1 C_4^1}{2!} = 10$ （组），

此时的承包方案有 $10 C_2^1 A_2^2 = 40$ （种），

1, 2, 2的组数为 $\frac{C_5^2 C_3^2}{2!} = 15$ (组),
 此时的承包方案有 $15A_3^3 = 90$ (种),
 所以不同的承包方案有 $40 + 90 = 130$ (种).
 故选A.

【标注】【知识点】分步乘法计数原理；加法原理与乘法原理的综合运用；分类加法计数原理

13. 将标号为1, 2, ..., 10的10个球放入标号为1, 2, ..., 10的10个盒子里, 每个盒内放一个球, 恰好3个球的标号与其在盒子的标号不一致的放入方法种数为 ().
- A. 120 B. 240 C. 360 D. 720

【答案】 B

【解析】 根据题意, 先确定标号与其在盒子的标号不一致的3个球,
 即从10个球中取出3个, 有 $C_{10}^3 = 120$ 种,
 而这3个球的排法有 $2 \times 1 \times 1 = 2$ 种;
 则共有 $120 \times 2 = 240$ 种,
 故选: B.

【标注】【知识点】分步乘法计数原理

【素养】 数学运算

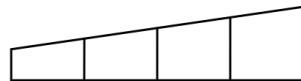
14. 在小语种提前招生考试中, 某学校获得5个推荐名额, 其中俄语2名, 日语2名, 西班牙语1名, 并且日语和俄语都要求必须有男生参加, 学校通过选锁定下3男2女共5个推荐对象, 则不同的推荐方法的种数为 ().
- A. 20 B. 22 C. 24 D. 36

【答案】 C

【解析】 ∵由题意知日语和俄语都要求必须有男生参加考试.
 ∴先从三个男生中选一个考日语有3种结果,
 再从剩下的男生中选一个考俄语有2种结果,
 剩下的三个考生在三个位置排列 A_3^3 种结果,
 这样重复一部分, 即当考日语的和考俄语的有两个男生时 $2A_3^3$ 种结果,
 ∴共有 $C_3^1 C_2^1 A_3^3 - 2A_3^3 = 24$.
 故选C.

【标注】【知识点】排除法；组合

15. 如图，用6种不同的颜色给图中的4个格子涂色，每个格子涂一种颜色．要求最多使用3种颜色且相邻的两个格子颜色不同，则不同的涂色方法共有 _____ 种（用数字作答）．



【答案】 390

【解析】方法一：用2色涂格子有 $C_6^2 \times 2 = 30$ 种方法，

用3色涂格子，第一步选色有 C_6^3 ，第二步涂色，从左至右，第一空3种，第二空2种，第三空分两种情况，一是与第一空相同，一是不相同，共有 $3 \times 2(1 \times 1 + 1 \times 2) = 18$ 种，所以涂色方法 $18 \times C_6^3 = 360$ 种方法，

故总共有390种方法．

方法二：①用2种颜色涂格子有 $C_6^2 \times 2 = 30$ 种方法；

②用3种颜色涂格子：

最左边的格子有3种，第二格有2种（与第一格不同），第三格有2种（与第二格不同），第四格有2种（与第三格不同），共有 $C_6^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ 种．但是这种方法可能只涂了2种颜色，只涂了2色的共有 $C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot 2$ 种．

综合知共有 $30 + C_6^3(3 \times 8 - C_3^2 \times 2) = 390$ 种方法．

故答案为：390．

【标注】【知识点】加法原理与乘法原理的综合运用；分类加法计数原理；分步乘法计数原理；组合

16. 将4个编号为1, 2, 3, 4的不同小球全部放入4个编号为1, 2, 3, 4的4个不同盒子中．求：
- (1) 每个盒至少一个球，有多少种不同的放法？
 - (2) 恰好有一个空盒，有多少种不同的放法？
 - (3) 每盒放一个球，并且恰好有一个球的编号与盒子的编号相同，有多少种不同的放法？
 - (4) 把已知中4个不同的小球换成四个完全相同的小球（无编号），其余条件不变，恰有一个空盒，有多少种不同的放法？

【答案】(1) 24．

(2) 144．

(3) 8．

(4) 12 .

【解析】 (1) $A_4^4 = 24$.

(2) $C_4^2 \cdot A_4^3 = 144$.

先选2个球“捆绑”成一组 .

(3) $C_4^1 \times 2 = 8$.

先选一个编号相同，另外3个编号不同，共2种 .

(4) $C_4^1 \cdot C_3^2 = 12$.

先选一个盒子放入2球，再选2个盒子各一球 .

【标注】【知识点】排列；分组分配法；错位法