

组合问题

一、组合定义与组合数计算

1. 组合的定义

一般地，从 n 个不同元素中，任意取出 $m(m \leq n)$ 个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中任取 m 个元素的一个**组合**。

【补充说明】

(1) 具体来说，组合的要求是 n 个元素不同，被取出的 m 个元素也不同，而且取出方式不放回取出；
(2) 组合取出的 m 个元素不讲求顺序，无序性是组合的本质。例如，从 $\{a, b, c\}$ 中取出两个元素形成两个序列 ab 与 ba ，它们属于两种排列，但却是一种组合。

2. 组合数及其运算

组合数

从 n 个不同元素中，任意取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中，任意取出 m 个元素的**组合数**，用符号 C_n^m 表示。

组合数公式

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}_+, \text{ 并且 } m \leq n;$$
特别地，当 $m=0$ 时，有 $C_n^0=1$ 。

例1

1. 完成下列问题

- (1) 计算： $C_{10}^4 - C_7^3 \cdot A_3^3$ 。
- (2) 求值： $C_{3n}^{38-n} + C_{21+n}^{3n}$ 。
- (3) 证明： $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$ 。

【答案】(1) 0

(2) 466

(3) 见解析。

【解析】(1) 原式 = $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} - 7 \times 6 \times 5 = 210 - 210 = 0$.

(2) $\begin{cases} 38 - n \leq 3n \\ 3n \leq 21 + n \end{cases} \Rightarrow 9.5 \leq n \leq 10.5 \Rightarrow n = 10$, 以下略.

(3) $mC_n^m = m \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}$
 $= \frac{n \cdot (n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = nC_{n-1}^{m-1}$.

【标注】【知识点】排列数计算；组合数计算

练1

2. 若 $C_n^2 A_2^2 = 42$, 则 $\frac{n!}{3!(n-3)!}$ 的值为 ().

A. 6

B. 7

C. 35

D. 20

【答案】C

【解析】 $\because C_n^2 A_2^2 = 42$,

$$\therefore \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = 42,$$

$$\therefore n = 7,$$

$$\therefore \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35.$$

故选C.

【标注】【知识点】组合；排列

3. 方程 $C_{28}^x = C_{28}^{3x-8}$ 的解为 _____.

【答案】4或9

【解析】已知 $C_{28}^x = C_{28}^{3x-8}$,

$$\therefore C_n^m = C_n^m \text{ 或 } C_n^m = C_n^{n-m},$$

$$\therefore x = 3x - 8 \text{ 或 } x + 3x - 8 = 28,$$

$$\therefore x = 4 \text{ 或 } x = 9.$$

【标注】【知识点】组合

3. 组合数的两个性质



性质一

$$C_n^m = C_n^{n-m} \text{ (证明留给读者) .}$$

性质二

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1} \text{ (两种证明方法, 具体留给读者) .}$$

【补充说明】

(1) 性质一反映了组合数的对称性: 当 $m > \frac{n}{2}$ 时, 不直接计算 C_n^m 而改为计算 C_n^{n-m} , 这样起到了简化运算的效果;

(2) 要注意性质二的灵活运用: 顺用可以将一个组合数拆成两个, 在进行化简时此种手段可以产生抵消的效果; 逆用可以将两个组合数合并为一个, 求值时可以循环使用此种手段进行并项.

例2

4. 若 $C_{n+1}^7 - C_n^7 = C_n^8$, 则 n 等于 ().

A. 12

B. 13

C. 14

D. 15

【答案】 C

【解析】 $C_{n+1}^7 - C_n^7 = C_n^8$, 即 $C_{n+1}^7 = C_n^7 + C_n^8 = C_{n+1}^8$,
所以 $n+1 = 7+8$, 即 $n = 14$.

【标注】 【知识点】 组合数计算

5. $C_5^5 + C_6^5 + C_7^5 + C_8^5 = ()$.

A. 28

B. 126

C. 84

D. 70

【答案】 C

【解析】 $C_5^5 + C_6^5 + C_7^5 + C_8^5 = C_6^6 + C_6^5 + C_7^5 + C_8^5 = C_7^6 + C_7^5 + C_8^5 = C_8^6 + C_8^5 = C_9^6 = C_9^3 = 84$.

【标注】 【知识点】 组合数计算

练2

6. 若 $C_{20}^{2n+6} = C_{20}^{n+2}$, ($n \in \mathbf{N}$), 则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 4

【解析】 ①若 $2n + 6 = n + 2$, 得 $n = -4$ (舍) ; ②若 $2n + 6 + n + 2 = 20$, 得 $n = 4$, 综上 $n = 4$.

【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】 组合数计算

7. 证明: $C_k^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+2}^2 + \cdots + C_n^{n-k} = C_{n+1}^{n-k}$.

【答案】 证明见解析.

【解析】 左边 $= C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+2}^2 + \cdots + C_n^{n-k}$
 $= (C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1) + C_{k+2}^2 + \cdots + C_n^{n-k}$
 $= C_{k+2}^1 + C_{k+2}^2 + \cdots + C_n^{n-k}$
 $= \cdots = C_{n+1}^{n-k}$.

【标注】 【知识点】 组合数计算

二、 常见组合问题

1. 直接法

例1

8. 从10名大学毕业生中选3人担任村长助理, 则甲、乙至少有1人入选, 而丙没有入选的不同选法的种数为 () .

A. 28种

B. 49种

C. 56种

D. 85种

【答案】 B

【解析】 若甲、乙有一人入选, 丙未入选, 共有 $C_2^1 C_7^2 = 42$ 种,
若甲、乙同时入选, 丙未入选, 有 $C_7^1 = 7$ 种.
共有49种.
故选B.

【标注】 【知识点】 组合; 加法原理与乘法原理的综合运用

9. 在上海高考改革方案中，要求每位高中生必须在物理、化学、生物、政治、历史、地理6门学科（3门理科学科，3门文科学科）中选择3门学科参加等级考试，小丁同学理科成绩较好，决定至少选择两门理科学科，那么小丁同学的选科方案有 _____ 种。

【答案】 10

【解析】 选择两门理科学科，一门文科学科，有 $C_3^2 C_3^1 = 9$ 种。选择三门理科学科，有1种，故共有10种。
故答案为：10。

【标注】 【知识点】分类加法计数原理；简单的组合问题

练1

10. 从5名男生和4名女生中选出4人去参加座谈会，问：
- （1）如果4人中男生和女生各选2人，有多少种选法？
 - （2）如果男生中的甲与女生中的乙至少要有1人在内，有多少种选法？
 - （3）如果4人中必须既有男生又有女生，有多少种选法？

【答案】 （1）60种。

（2）91种。

（3）120种。

【解析】 （1）根据题意，从5名男生中选出2人，有 $C_5^2 = 10$ 种选法，从4名女生中选出2人，有 $C_4^2 = 6$ 种选法，则4人中男生和女生各选2人的选法有 $10 \times 6 = 60$ 种。

（2）先在9人中任选4人，有 $C_9^4 = 126$ 种选法，其中甲乙都没有入选，即从其他7人中任选4人的选法有 $C_7^4 = 35$ 种，则甲与女生中的乙至少要有1人在内的选法有 $126 - 35 = 91$ 种。

（3）先在9人中任选4人，有 $C_9^4 = 126$ 种选法，其中只有男生的选法有 $C_5^4 = 5$ 种，只有女生的选法有 $C_4^4 = 1$ 种，则4人中必须既有男生又有女生的选法有 $126 - 5 - 1 = 120$ 种。

【标注】 【知识点】排除法；分步乘法计数原理

在产品质量检验时，常从产品中抽出一部分进行检查，现在从98件正品和2件次品共100件产品中，任意抽出3件抽查．

(1) 抽出的3件中至少有两件是正品的抽法有多少种？

(2) 抽出的3件中恰好有一件是次品，再把抽出的3件产品放在展台上，排成一排进行对比展览，共有多少种不同的排法？

【答案】 (1) 161602 .

(2) 57036 .

【解析】 (1) $n = C_{98}^3 + C_{98}^2 \cdot C_2^1 = 161602$.

(2) $n = C_{98}^2 \cdot C_2^1 \cdot A_3^3 = 57036$.

【标注】【知识点】排列组合综合

2. 分组分配

分堆问题的特点是堆与堆之间的区别仅仅是元素个数，而不强调元素本身，因此若出现了若干组元素个数相同的情况，在采取分步乘法计数原理处理问题之后还需要做除序处理．

(1) 非均匀分堆

【模型】 n 个不同元素分成 m 组，每组元素数目均不相等，且不考虑各组间的顺序，求其分法种数．

【实例】 10本书分成2, 3, 5三堆，其分法种数为 $C_{10}^2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^5 = 2520$.

(2) 均匀分堆

【模型】 n 个不同元素分成 m 组，其中 r 组元素个数相同且不考虑各组之间的顺序，求其分法种数．

【实例】 10本书分成2, 4, 4三堆，其分法种数为 $\frac{C_{10}^2 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4}{A_2^2} = 1575$.

例2

12. 有6本不同的书

(1) 甲、乙、丙3人每人2本，有多少种不同的分法？

(2) 分成3堆，每堆2本，有多少种不同的分堆方法？

(3) 分成3堆，一堆1本，一堆2本，一堆3本，有多少种不同的分堆方法？

(4) 分给甲、乙、丙3人，一人1本，一人2本，一人3本，有多少不同的分配方法？

(5) 分给甲1本、乙1本、丙4本，有多少种不同的分配方法？

(6) 分成3堆，有2堆各一本，另一堆4本，有多少种不同的分堆方法？

(7) 摆在3层书架上，每层2本，有多少种不同的摆法？

(8) 假设6本书相同，分给甲、乙、丙三人，每人至少一本，则有多少种不同的分法？

【答案】见解析.

【解析】(1) 在6本书中, 先取2本给甲, 再从剩下的4本书中取2本给乙, 最后2本给丙, 共有 $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 90$ (种). 这是均匀编号分组问题

(2) 6本书平均分成3堆, 用(1)中方法重复了 A_3^3 倍, 故共有 $\frac{C_6^2 \cdot C_4^2}{A_3^3} = 15$ (种).

这是均匀分组问题.

(3) 从6本书中, 先取1本做1堆, 再在剩下的5本中取2本做一堆, 最后3本做一堆, 共有 $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 = 60$ (种). 这是非均匀分组问题

(4) 在(3)的分堆中, 甲、乙、丙3人任取一堆, 故共有 $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 \cdot A_3^3 = 360$ (种).

这是非均匀编号分组问题.

(5) 甲先取1本, 乙在剩下的取1本, 余下4本给丙, 故共有 $C_6^1 C_5^1 = 30$ (种). 这是部分均匀编号分组问题.

(6) 平均分堆要除以堆数的全排列数, 不平均分堆则不除, 故共有 $\frac{C_6^1 \cdot C_5^1}{A_2^2} = 15$ (种).

这是部分均匀分组问题.

(7) 本题即为6本书放在6个位置上, 共有 $A_6^6 = 720$ (种).

(8) 此为挡板问题, 结果为 $C_5^2 = 10$ (种).

【标注】【知识点】分组分配法

练2

13. 某年级有6个班, 派3名语文教师任教, 每个教师教2个班, 则不同的任课方法种数为 ().

- A. $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2$
- B. $A_6^2 \cdot A_4^2 \cdot A_2^2$
- C. $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 \cdot C_3^3$
- D. $\frac{A_6^2 \cdot A_4^2 \cdot A_2^2}{A_3^3}$

【答案】A

【解析】先对班级进行平均分组有 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3}$ 种分法,

再对三个语文教师全排列, 于是共有不同的任课方法种数为

$$\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} \cdot A_3^3 = C_6^2 C_4^2 C_2^2 .$$

【标注】【知识点】分组分配法

14. 将甲，乙等4位同学分别保送到北京大学，上海交通大学，中山大学这3所大学就读，则每所大学至少保送1人的不同保送方法数共有（ ）.
- A. 36种 B. 72种 C. 144种 D. 288种

【答案】A

【解析】将4名同学分为3组，共有 C_4^2 种分法，
再将这3组分配给3所学校，共有 A_3^3 种分法，
 $\therefore$ 总共有 $C_4^2 \cdot A_3^3 = 36$ 种方法.
故选A.

【标注】【知识点】分组分配法

15. 我市拟向新疆哈密地区的三所中学派出5名教师支教，要求每所中学至少派遣一名教师，则不同的派出方法有（ ）.
- A. 300种 B. 150种 C. 120种 D. 90种

【答案】B

【解析】将5名老师分为三队，有“一人，一人，三人”和“一人，两人，两人”，两种方式，
第一种方式：先选一个学校，再选三人去该校，共有 $C_3^1 C_5^3$ 种选法，剩下两人分配到剩余的两校有 A_2^2 种选法；
第二种方式：先选一个学校，再选一人去该校，共有 $C_3^1 C_5^1$ 种选法，剩余两校任一学校从四人选两人，剩余两人自动分配到另一学校有 C_4^2 种选法，
故共有 $C_3^1 C_5^3 A_2^2 + C_3^1 C_5^1 C_4^2 = 150$ 种分配方式.
故选：B.

【标注】【知识点】计数原理综合

3. 隔板法

n 个相同元素，分成 $m(m \leq n)$ 组，每组至少一个的分组问题——把 n 个元素排成一排，从 $n-1$ 个空中

选 $m-1$ 个空，各插一个隔板，有 C_{n-1}^{m-1} 。

例3

16. 有10个运动员名额，分给7个班，每班至少一个，有多少种分配方案？

【答案】 84种。

【解析】 采用隔板法，用6个隔板填入9个空隙，结果为 $C_9^6 = C_9^3 = 84$ 种。

【标注】 【知识点】隔板法

17. 16个球，球和球之间没有任何区别：

- (1) 把16个球分别放到编号为1, 2, 3的三个盒子当中，要求每个盒子都必须得有球，则不同的放球方式有多少种？
- (2) 把16个球分别放到编号为1, 2, 3的三个盒子当中，要求1号盒子至少得有一个球，2号盒子至少得有两个球，3号盒子至少得有三个球，则不同的放球方式有多少种？
- (3) 把16个球分别放到编号为1, 2, 3的三个盒子当中，盒子可以空着不放球，则不同的放球方式有多少种？

【答案】 (1) 105。

(2) 66。

(3) 153。

【解析】 (1) 采用隔板法，从16个球中间构成的15个空隙中插入2个板即可，共有 C_{15}^2 种方式。

(2) 采用隔板法，先将3个盒子分别放入0个，1个，2个球，保证三者完全等价，再从剩余的13个球中间构成的12个空隙中插入2个板即可，共有 C_{12}^2 种方式。

(3) 采用隔板法，先将3个盒子各分别放入1个球，保证盒子完全等价，此时放球的方式相当于从19个球中间构成的18个空隙中插入2个板即可，共有 C_{18}^2 种方式。

【标注】 【知识点】隔板法

【素养】 逻辑推理

【素养】 数学运算

练3

18. 要将5个小球放入3个盒子中：

- (1) 若小球完全相同，盒子不同，每个盒子中都必须放入小球，有多少种不同的放入方法？
 (2) 若球完全相同，盒子不同，任意放入，有多少种不同的放入方法？

【答案】 (1) 6种 .

(2) 21种 .

【解析】 (1) 采用隔板法，有 $C_4^2 = 6$ 种方法 .

(2) 注意条任意放入，即可以有盒子中无球，可以先在每个盒子中各添加1球，问题转化为8个小球放入3个盒子中，每个盒子至少一个小球的不同放入方法，同样采取隔板法，此时有 $C_7^2 = 21$ 种方法 .

【标注】 【知识点】排列

19. 将15个相同的小球，分给3个人，每人至少分2个，则有 _____ 种不同的分法 .

【答案】 55

【解析】 本题*cai4*用隔板法（相同元素的不同去处），

由于要求每人至少2个，不直接满足隔板法至少一个元素的要求，
 则需向隔板法转化，转化方式为在用隔板法前先每个人发一个球，
 然后再利用隔板法，则需每个人至少再发一个球即可，

每个人发一个球后，剩余12个球，形成11个空，选出2个放挡板即可，
 $\therefore C_{11}^2 = 55$.

【标注】 【知识点】隔板法

4. 排除法

例4

20. 在100件产品中有6件次品，现从中任取3件产品，至少取到1件次品的不同取法的种数是（ ） .

A. $C_6^1 C_{94}^2$

B. $C_6^1 C_{99}^2$

C. $C_{100}^3 - C_{94}^3$

D. $A_{100}^3 - C_{94}^3$

【答案】 C

【解析】

采取“正难则反”的思想，显然取法总数为 C_{100}^3 ，取不到次品的取法为从94件正品中取出3件，为 C_{94}^3 ，故至少取到1件次品的不同取法的种数是 $C_{100}^3 - C_{94}^3$ ，选C.

【标注】【素养】数学运算；逻辑推理

【知识点】排除法

21. 在报名的3名男教师和6名女教师中，选取5人参加义务献血，要求男、女教师都有，则不同的选取方式的种数为（ ）.

A. 60

B. 75

C. 105

D. 120

【答案】D

【解析】根据题意，报名的有3名男老师和6名女教师，共9名老师，在9名老师中选取5人，参加义务献血，有 $C_9^5 = 126$ 种，其中只有女教师的有 $C_6^5 = 6$ 种情况，则男、女教师都有的选取方式的种数为 $126 - 6 = 120$ 种，故选D.

【标注】【知识点】排除法

练4

22. 某班级要从4名男生、2名女生中选派4人参加某次社区服务，如果要求至少有1名女生，那么不同的选派方案种数为（ ）.

A. 14

B. 24

C. 28

D. 48

【答案】A

【解析】方法一：4人中至少有1名女生包括1女3男及2女2男两种情况，故不同的选派方案种数为 $C_2^1 \cdot C_4^3 + C_2^2 \cdot C_4^2 = 2 \times 4 + 1 \times 6 = 14$.
方法二：从4男2女中选4人共有 C_6^4 种选法，4名都是男生的选法有 C_4^4 种，故至少有1名女生的选派方案种数为 $C_6^4 - C_4^4 = 15 - 1 = 14$.
故选A.

【标注】【知识点】分组分配法

【素养】逻辑推理

23. 在小语种提前招生考试中，某学校获得5个推荐名额，其中俄语2名，日语2名，西班牙语1名，并且日语和俄语都要求必须有男生参加，学校通过选锁定下3男2女共5个推荐对象，则不同的推荐方法的种数为（ ）.

- A. 20 B. 22 C. 24 D. 36

【答案】 C

【解析】 ∵由题意知日语和俄语都要求必须有男生参加考试.

∴先从三个男生中选一个考日语有3种结果，

再从剩下的男生中选一个考俄语有2种结果，

剩下的三个考生在三个位置排列 A_3^3 种结果，

这样重复一部分，即当考日语的和考俄语的有两个男生时 $2A_3^3$ 种结果，

∴共有 $C_3^1 C_2^1 A_3^3 - 2A_3^3 = 24$.

故选C.

【标注】【知识点】排除法；组合

24. 在12件产品中，有10件正品，2件次品，从这12件产品中任意抽取3件.

- (1) 共有多少种不同的抽法？
 (2) 抽出的3件中恰有1件次品的抽法有多少种？
 (3) 抽出的3件中至少有1件次品的抽法有多少种？

【答案】 (1) 220种 .

(2) 90种 .

(3) 100种 .

【解析】 (1) 从这12件产品中任意抽取3件，共有 $C_{12}^3 = 220$ 种不同抽法 .

(2) 抽出的3件中恰有1件次品的抽法有 $C_{10}^2 \cdot C_2^1 = 90$ 种不同抽法 .

(3) 抽出的3件中至少有1件次品的抽法有 $C_{12}^3 - C_{10}^3 = 100$ 种不同抽法 .

【标注】【知识点】排除法

5. 综合问题

例5

25. 一次演出，原计划要排4个节目，因临时有变化，拟再添加2个小品节目，若保持原有4个节目的相对顺序不变，则这6个节目的不同的排列方法有（ ）.
- A. 30种 B. 25种 C. 24种 D. 20种

【答案】 A

【解析】 原计划4个节目顺序不变，则有5个空隙，插入1个小品有 C_5^1 ，再插入1个小品有 C_6^1 ，则一共有 $C_5^1 \cdot C_6^1 = 30$ 种.
故选A.

【标注】 【知识点】 倍缩法

 练5

26. 现有5本相同的《数学家的眼光》和3本相同的《数学的神韵》要将它们排在同一层书架上，并且3本相同的《数学的神韵》不能放在一起，则不同的放法种数为（ ）.
- A. 20 B. 120 C. 2 400 D. 14 400

【答案】 A

【解析】 根据题意，可分两步：

第一步，先放5本相同的《数学家的眼光》有1种情况；

第二步，5本相同的《数学家的眼光》排好后，有6个空位，在6个空位中任选3个，把3本相同的《数学的神韵》插入，有 $C_6^3 = 20$ 种情况.

故不同的放法有20种.

故选A.

【标注】 【知识点】 插空法

27. 某城市新修建的一条道路上有11盏路灯，为了节省用电而又不能影响正常的照明，可以熄灭其中的4盏灯，但两端的灯不能熄灭，也不能熄灭相邻的两盏灯，则熄灯的方法有（ ）.
- A. C_8^4 B. C_7^4
C. C_6^4 D. 以上答案都不对

【答案】 C

【解析】

根据题意，使用插空法分析：先将亮的7盏灯排成一排，由于两端的灯不能熄灭，则有6个符合条件的空位，进而在6个空位中，任取4个插入熄灭的4盏灯，有 C_6^4 种方法．
故选：C．

【标注】【知识点】插空法；组合